

ÉLÉMENT DE PORTFOLIO 04



Publication

1 DÉFINITION DE CET ÉLÉMENT

Titre de l'élément : A fixed-parameter algorithm for scheduling unit dependent tasks on parallel machines with time windows [3]

URL de l'élément : <https://hal.science/hal-03041735>

2 MOTIVATIONS DU CHOIX DE CET ÉLÉMENT

L'analyse de la complexité paramétrée d'un problème d'optimisation combinatoire permet d'aller un peu plus loin dans l'étude de la frontière entre problèmes NP-complets et polynomiaux [1, 2]. Pour un paramètre k fixé et une instance de taille n , un problème combinatoire est dans la classe FPT (pour Fixed-Parameter Tractable) si il existe un algorithme de complexité en temps $\mathcal{O}(f(k) \times \text{poly}(n))$, où f est une fonction calculable. Ainsi, si le paramètre est borné par une valeur constante, l'algorithme obtenu est de complexité polynomiale.

L'étude de la complexité paramétrée des problèmes d'ordonnancement avec contraintes de ressource est un sujet de recherche très ouvert avec de nombreux défis. A titre d'exemple, Mnich et Van Bevern [5] ont identifié quinze challenges en ordonnancement. Le point clé ici est d'identifier les paramètres appropriés, qui permettent de développer des algorithmes de complexité FPT. La majorité des résultats pour des problèmes d'ordonnancement avec contraintes de précédence et machines limitées concluent à la non existence d'algorithme FPT pour les paramètres considérés.

Dans l'article présenté ici, nous avons identifié un nouveau paramètre, le *pathwidth* noté μ associé à un problème d'ordonnancement avec des fenêtres de temps ; il correspond au nombre de tâches pouvant être exécutées simultanément. Un algorithme exact FPT est alors présenté pour résoudre l'existence d'un ordonnancement pour des tâches de durée unitaire sur m machines identiques avec fenêtres de temps et contraintes de précédence.

3 PRÉSENTATION DE CET ÉLÉMENT

Nous présentons à la suite les principes généraux de notre algorithme et les premières extensions de ce travail.

3.1 Présentation de l'algorithme FPT

L'algorithme présenté est un schéma de programmation dynamique original. Des propriétés de dominance basées sur la structure des intervalles permettent de réduire l'espace des solutions réalisables. A chaque instant t entier est associé un ensemble d'états \mathcal{V}_t . Un état est un ensemble de tâches qui sont effectuées dans l'intervalle $[0, t]$. On définit un arc entre deux états $E_1 \in \mathcal{V}_t$ et $E_2 \in \mathcal{V}_{t+1}$ si on peut construire un ordonnancement réalisable des tâches de E_2 dans $[0, t+1]$ en ordonnant celles de E_1 dans $[0, t]$.

On construit ainsi un graphe d'états, et on démontre que les chemins maximaux coïncident avec les ordonnancements réalisables. On montre que l'algorithme de construction de ce graphe est un algorithme FPT de paramètre μ .

3.2 Extensions

Ce résultat a permis d'ouvrir de nombreuses perspectives sur le développement d'algorithmes FPT paramétrés par le pathwidth pour des problèmes d'ordonnancement avec fenêtres de temps.

Ainsi, nous avons montré que cette approche pouvait s'étendre en présence de temps de communications unitaires. Tout arc (i, j) du graphe de précédence est associé à un transfert de données entre les deux tâches. Si elles sont effectuées sur des machines différentes, un temps de communication supplémentaire doit être considéré. Avec un codage des états qui intègre également les tâches exécutées à l'instant précédent $[t-1, t]$ pour les états

de \mathcal{V}_t , nous avons développé un algorithme FPT paramétré par la pathwidth pour le cas d'un nombre illimité de processeurs [7] puis étendu pour un nombre limité de processeurs [6].

Nous avons également étudié l'existence d'algorithme FPT paramétré par le pathwidth pour des problèmes d'ordonnement avec des contraintes de latence. Dans ce cas, tout arc (i, j) est associé à une valeur $\ell_{ij} \geq 0$ qui correspond à un temps minimum, maximum ou exact entre la fin de l'exécution de i et le démarrage de j . Cette étude est effectuée en collaboration avec des membres de l'équipe RO. Nous avons identifié comme second paramètre le délai maximum ℓ_{\max} . Nous avons ainsi démontré que pour des tâches de durée unitaire, m machines, les problèmes étaient para-NP-complets si on considère comme paramètre ℓ_{\max} ou μ séparément, et qu'un FPT existe si on considère les deux paramètres simultanément [4].

Enfin, ce résultat nous a permis de proposer avec un membre de l'équipe RO le projet Sorbonne Universités émergences EASI porté par Antoine Jouglet (Heudiasyc) sur l'étude et l'implantation d'un algorithme paramétré pour un problème d'ordonnement plus général. Ce projet permet de financer un post-doc commun entre les deux laboratoires pendant une année.

4 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Marek Cygan, Fedor V. Fomin, Łukasz Kowalik, Daniel Lokshtanov, Daniel Marx, Marcin Pilipczuk, Michal Pilipczuk, and Saket Saurabh. *Parameterized Algorithms*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2015.
- [2] Rodney G. Downey and Michael R. Fellows. *Fundamentals of Parameterized Complexity*. Springer-Verlag London, 1st edition, 2013.
- [3] Alix Munier Kordon. A Fixed-Parameter Algorithm for Scheduling Unit Dependent Tasks on Parallel Machines with Time Windows. *Discrete Applied Mathematics*, December 2020.
- [4] Maher Mallem, Claire C. Hanen, and Alix Munier Kordon. Parameterized complexity of a parallel machine scheduling problem. In *International Symposium on Parameterized and Exact Computation (IPEC)*, Postdam, Germany, September 2022.
- [5] Matthias Mnich and René van Bevern. Parameterized complexity of machine scheduling : 15 open problems. *Computers and Operations Research*, 100 :254 – 261, 2018.
- [6] Alix Munier-Kordon and Ning Tang. A fixed-parameter algorithm for a unit-execution-time unit-communication-time tasks scheduling problem with a limited number of identical processors. *RAIRO - Operations Research*, 56(5) :3777–3788, September 2022.
- [7] Ning Tang and Alix Munier Kordon. A Fixed-Parameter Algorithm for Scheduling Unit dependent Tasks with Unit Communication Delays. In *Euro-Par 2021 - 27th International European Conference on Parallel and Distributed Computing*, volume 12820 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 105–119, Lisbon, Portugal, August 2021. Springer, Cham.