Classification de paramètres pour la calibration photographique

Guillaume Moroz

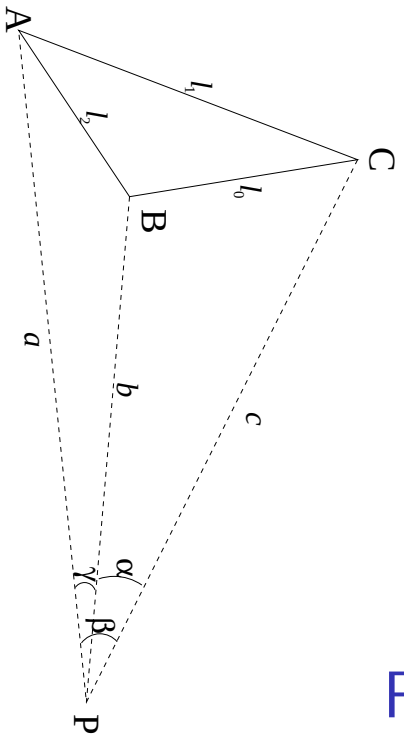
Lip6 (Université de Paris VI)

Salsa (INRIA)

30 septembre 2008

Problèmes paramétrés

- Origines variées

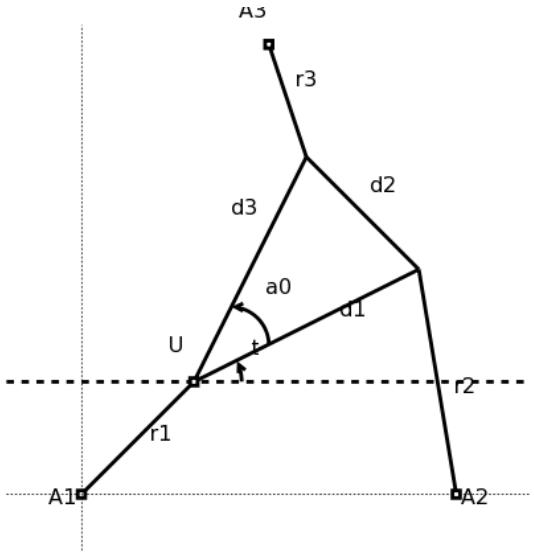


Chimie : réactions paramétrées par quantités initiales

Biologie : effet d'un vaccin paramétré par taux de vaccination

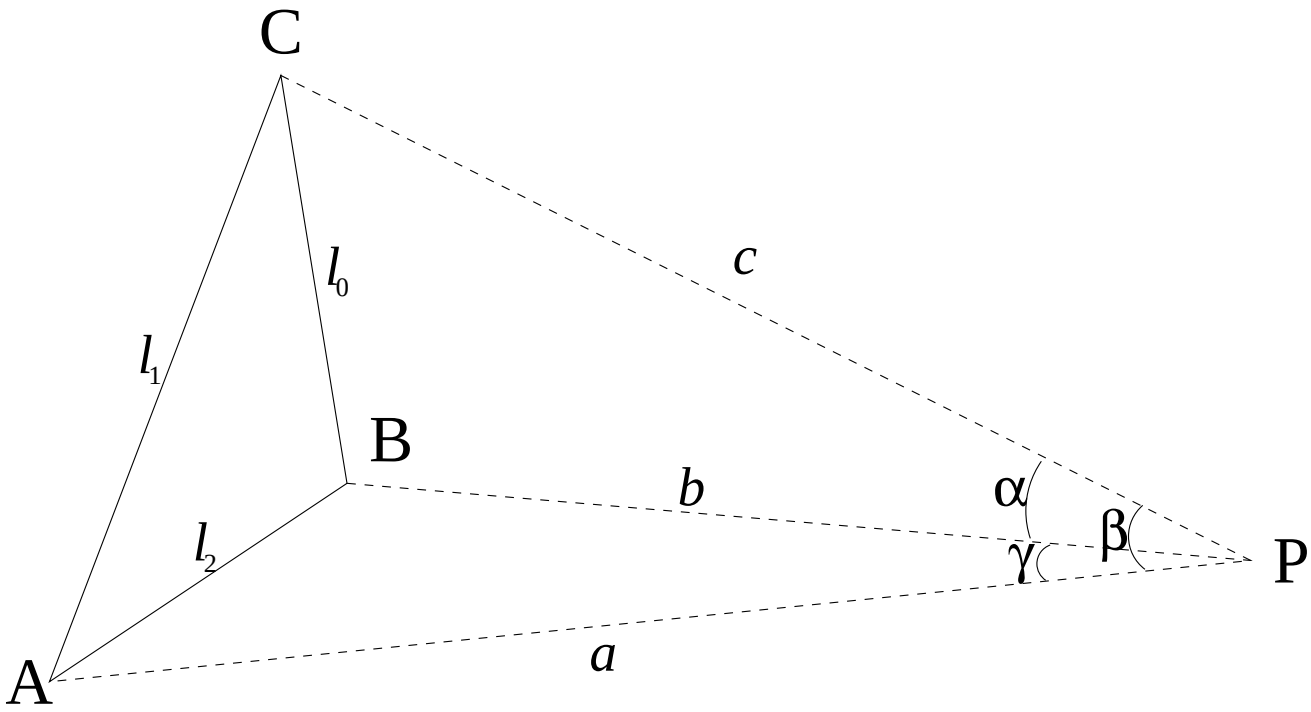
Vision : distance paramétrée par angles apparents

Robotique : robots parallèles



- Enjeux
  - Modélisation
  - Classification des paramètres
  - Critères usuels : nombre de solutions du système

Calibration



Problème directe : étant donné un triangle ABC, connaissant les angles α, β, γ, retrouver les longueurs a, b, c.

$\longrightarrow$ Solution pas toujours unique !

$\longrightarrow$ Discriminer les paramètres en fonction du nombre de solutions

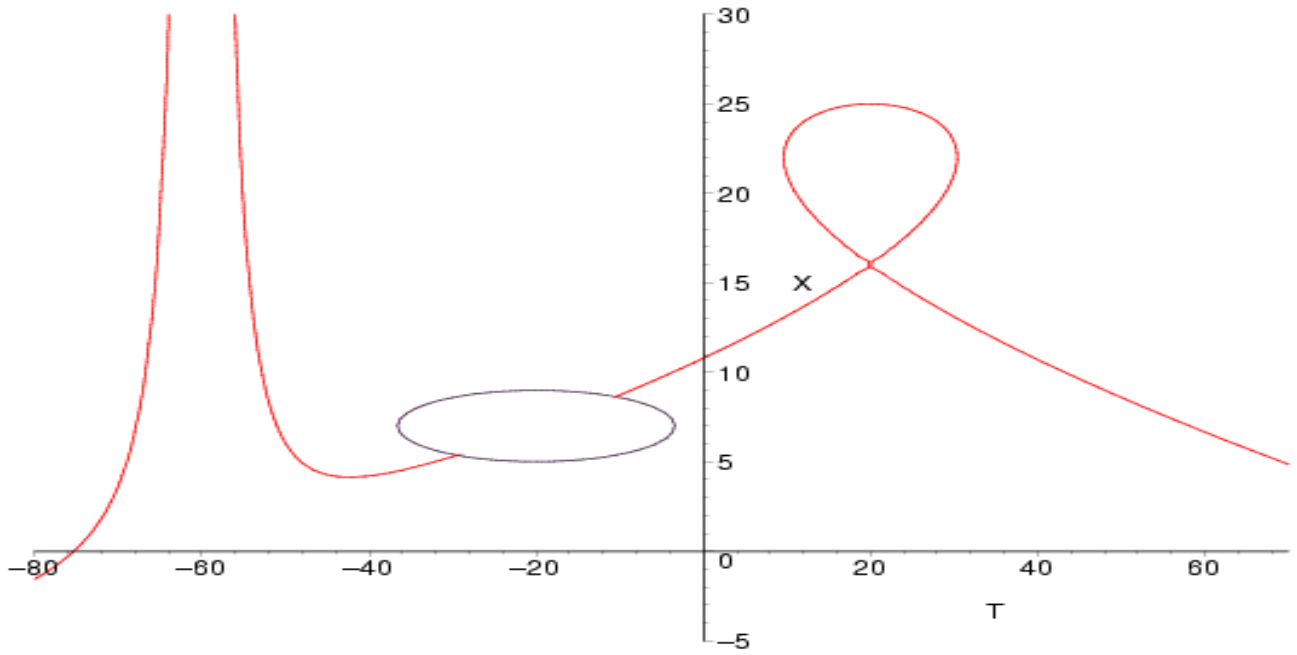
Mise en équations

$$\begin{cases} l_0^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha) \\ l_1^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\beta) \\ l_2^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\gamma) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a, b, c > 0 \\ l_0, l_1, l_2 > 0 \end{cases}$$

6 Paramètres : $l_0, l_1, l_2, \alpha, \beta, \gamma$

3 Inconnues : a, b, c

Problème général

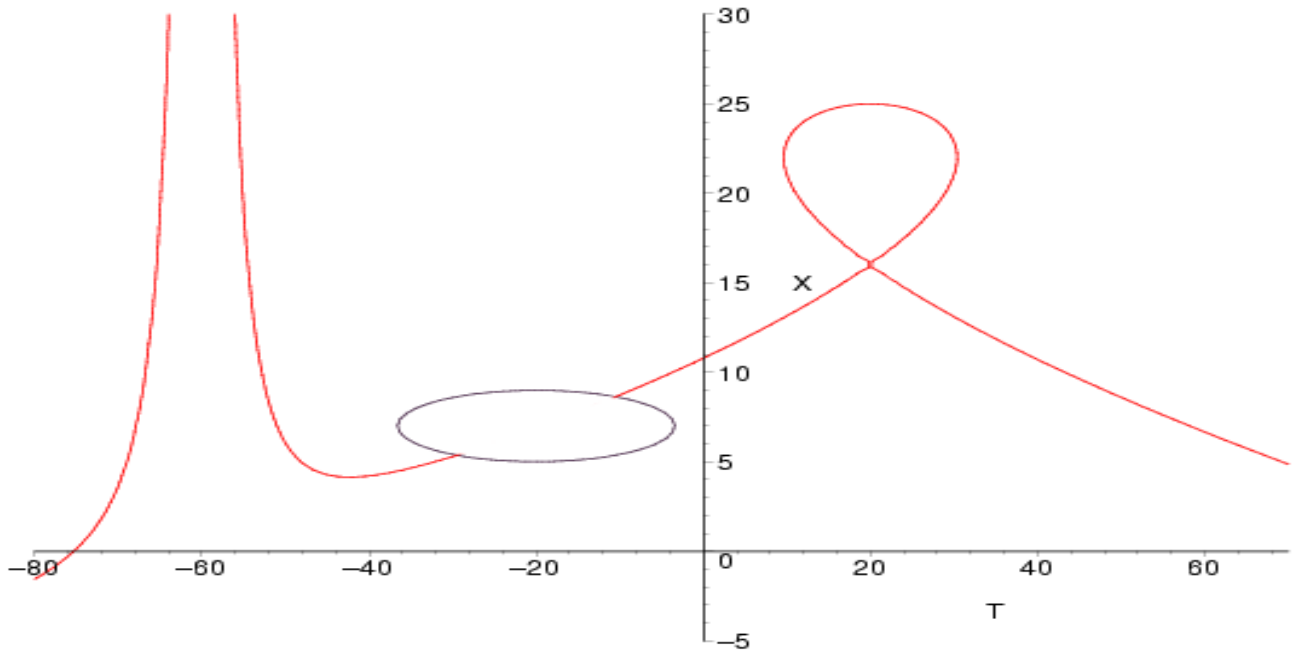


Motivation : Classifier les paramètres en fonction du nombre de solutions au système

Idée

Variété discriminante minimale [Lazard,Rouillier 04]

Problème général

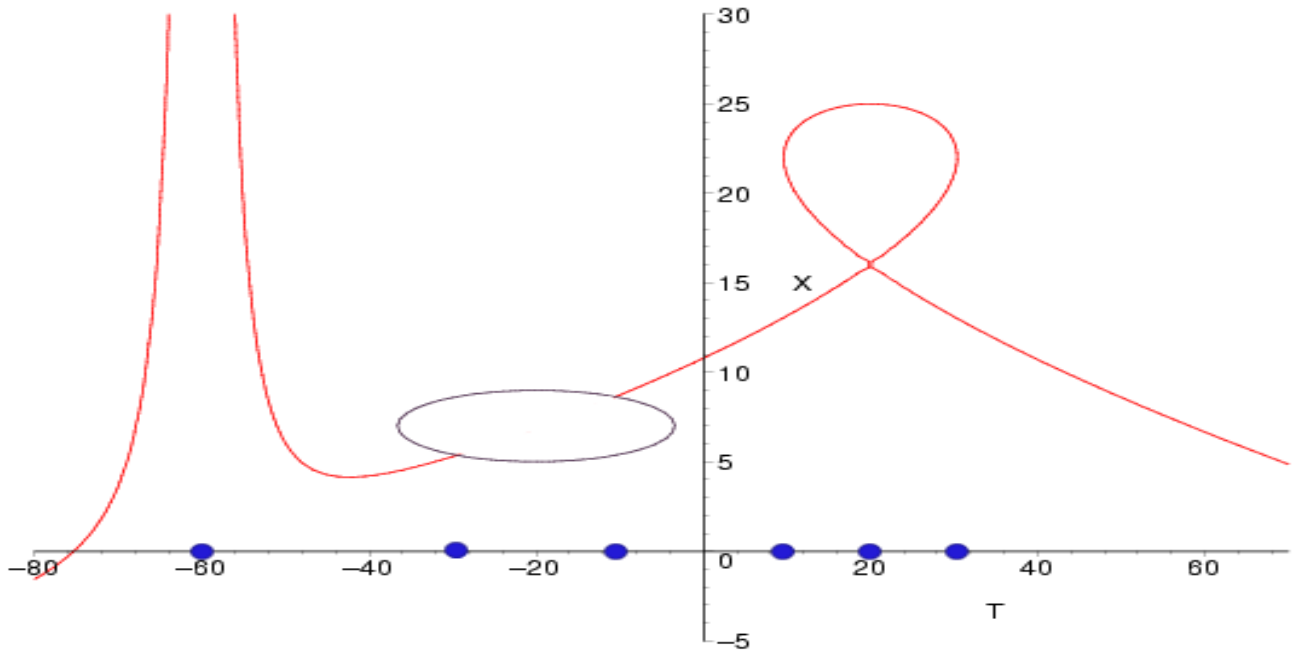


Motivation : Classifier les paramètres en fonction du nombre de solutions au système

Idée

Variété discriminante minimale [Lazard,Rouillier 04]

Problème général

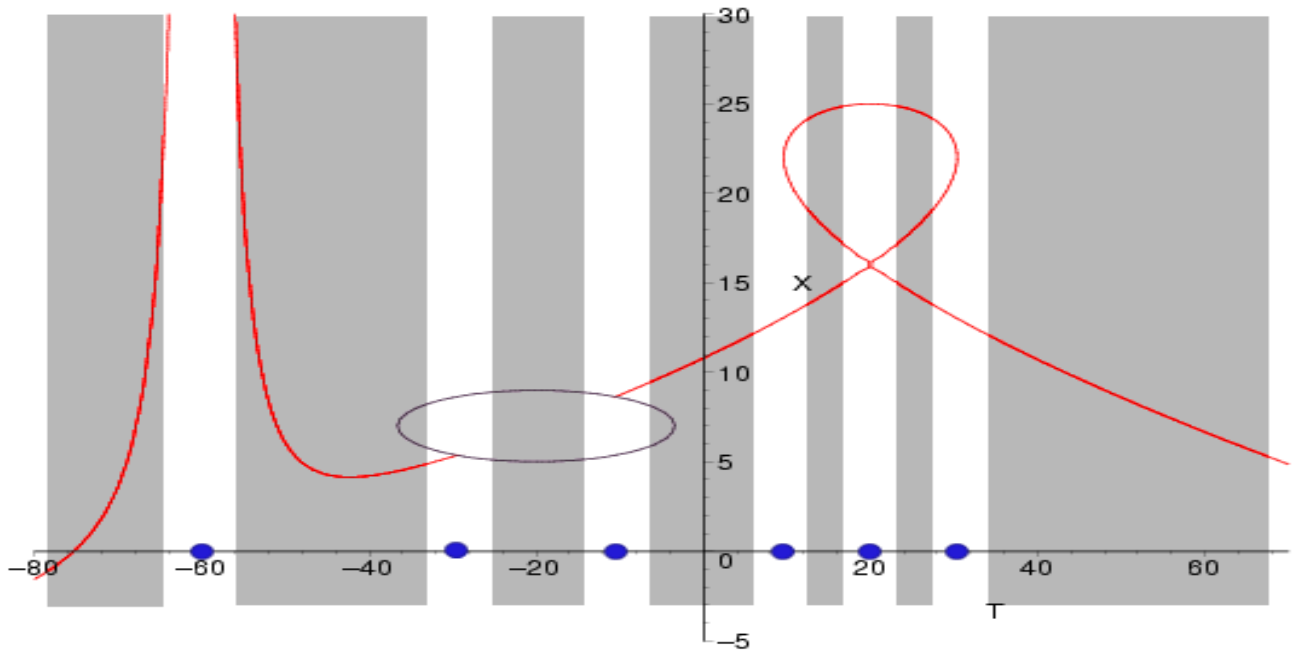


Motivation : Classifier les paramètres en fonction du nombre de solutions au système

Idée

Variété discriminante minimale [Lazard,Rouillier 04]

Problème général



Motivation : Classifier les paramètres en fonction du nombre de solutions au système

Idée

Variété discriminante minimale [Lazard,Rouillier 04]

Exemple

- 3 paramètres : a, b, c
- 1 inconnue : X
- Système : $aX^2 + bX + c = 0$

$\longrightarrow$ Nombre de solutions en fonction de a, b, c ?

Variété discriminante

Discriminant	*Dégénéré*
$b^2 - 4ac$	a

$\Downarrow$

Variété discriminante

$a(b^2 - 4ac)$

Exemple

- 3 paramètres : a, b, c
- 1 inconnue : X
- Système : $aX^2 + bX + c = 0$

$\longrightarrow$ Nombre de solutions en fonction de a, b, c ?

Variété discriminante

Discriminant	*Dégénéré*
$b^2 - 4ac$	a

$\Downarrow$

Variété discriminante

$a(b^2 - 4ac)$

Exemple

- 3 paramètres : a, b, c
- 1 inconnue : X
- Système : $aX^2 + bX + c = 0$

$\longrightarrow$ Nombre de solutions en fonction de a, b, c ?

Variété discriminante

Discriminant	*Dégénéré*
$b^2 - 4ac$	a

$$\Downarrow$$

Variété discriminante

$$a(b^2 - 4ac)$$

Exemple

- 3 paramètres : a, b, c
- 1 inconnue : X
- Système : $aX^2 + bX + c = 0$ et $3X + a \neq 0$

$\longrightarrow$ Nombre de solutions en fonction de a, b, c ?

Variété discriminante

Discriminant	*Dégénéré*
$b^2 - 4ac$	a

$$\Downarrow$$

Variété discriminante

$$a(b^2 - 4ac)$$

Exemple

- 3 paramètres : a, b, c
- 1 inconnue : X
- Système : $aX^2 + bX + c = 0$ et $3X + a \neq 0$

$\longrightarrow$ Nombre de solutions en fonction de a, b, c ?

Variété discriminante

Discriminant	*Inéquations*	*Dégénéré*
$b^2 - 4ac$	$9c - 3ab + a^3$	a

$$\Downarrow$$

Variété discriminante

$$a(b^2 - 4ac)(9c - 3ab + a^3)$$

Retour sur le problème de calibration

$$\begin{cases} l_0^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha) \\ l_1^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\beta) \\ l_2^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\gamma) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a, b, c > 0 \\ l_0, l_1, l_2 > 0 \end{cases}$$

6 Paramètres : $l_0, l_1, l_2, \alpha, \beta, \gamma$

3 Inconnues : a, b, c

Retour sur le problème de calibration

$$\begin{cases} l_0^2 &= a^2 + b^2 - abu \\ l_1^2 &= b^2 + c^2 - bcv \\ l_2^2 &= a^2 + c^2 - acw \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a, b, c > 0 \\ l_0, l_1, l_2 > 0 \\ 2 > u, v, w > -2 \end{cases}$$

6 Paramètres : l_0, l_1, l_2, u, v, w

3 Inconnues : a, b, c

Retour sur le problème de calibration

$$\begin{cases} l_0^2 &= a^2 + b^2 - abu \\ l_1^2 &= b^2 + c^2 - bcv \\ 1 &= a^2 + c^2 - acw \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a, b, c > 0 \\ l_0, l_1 > 0 \\ 2 > u, v, w > -2 \end{cases}$$

5 Paramètres : l_0, l_1, u, v, w

3 Inconnues : a, b, c

Retour sur le problème de calibration

$$\begin{cases} x &= a^2 + b^2 - abu \\ t &= b^2 + c^2 - bcv \\ 1 &= a^2 + c^2 - acw \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a, b, c > 0 \\ l_0, l_1 > 0 \\ 2 > u, v, w > -2 \end{cases}$$

5 Paramètres : x, t, u, v, w

3 Inconnues : a, b, c

Triangle équilatéral

$$\begin{cases} 1 = a^2 + b^2 - abu \\ 1 = b^2 + c^2 - bcv \\ 1 = a^2 + c^2 - acw \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a, b, c > 0 \\ 2 > u, v, w > -2 \end{cases}$$

3 Paramètres : u, v, w

3 Inconnues : a, b, c

Triangle équilatéral

Variété discriminante

3 variables, degree 27

$$
\left\{
\begin{array}{l}
(w+1)(w-1)(u-2)(v+1)(v-1)(u+2)(w+2)(v-2) \\
(v+2)(u+1)(u-1)(w-2)(-uvw+u^2+v^2+w^2-4) \\
(-256+256v^2+27u^4v^4-288u^2v^2+27u^4w^4- \\
288v^2w^2+27v^4w^4-288u^2w^2+256u^2+256w^2- \\
256uvw-144u^3v^3w-144u^3vw^3-18u^2v^4w^4+ \\
92u^3v^3w^3-144uv^3w^3+336u^2v^2w^2+192uv^3w+ \\
192uvw^3-6u^4v^2w^2-6u^2v^4w^2-u^4v^4w^4+ \\
4u^5v^3w^3+4u^3v^5w^3-6u^2v^2w^4+192u^3vw+ \\
4u^3v^3w^5-18u^4v^4w^2-18u^4v^2w^4)
\end{array}
= 0
$$

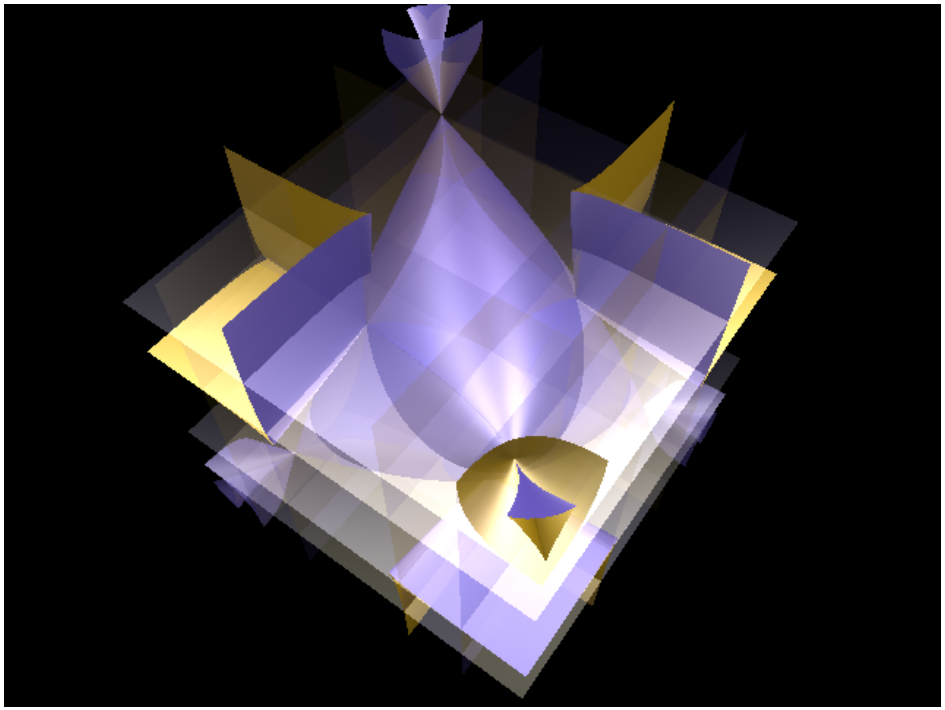
Calcul d'un point par composante connexe du complémentaire

- Méthodes de points critiques [Safey El Din : RAGLib] : 2510 points

Triangle équilatéral

Variété discriminante

3 variables, degree 27



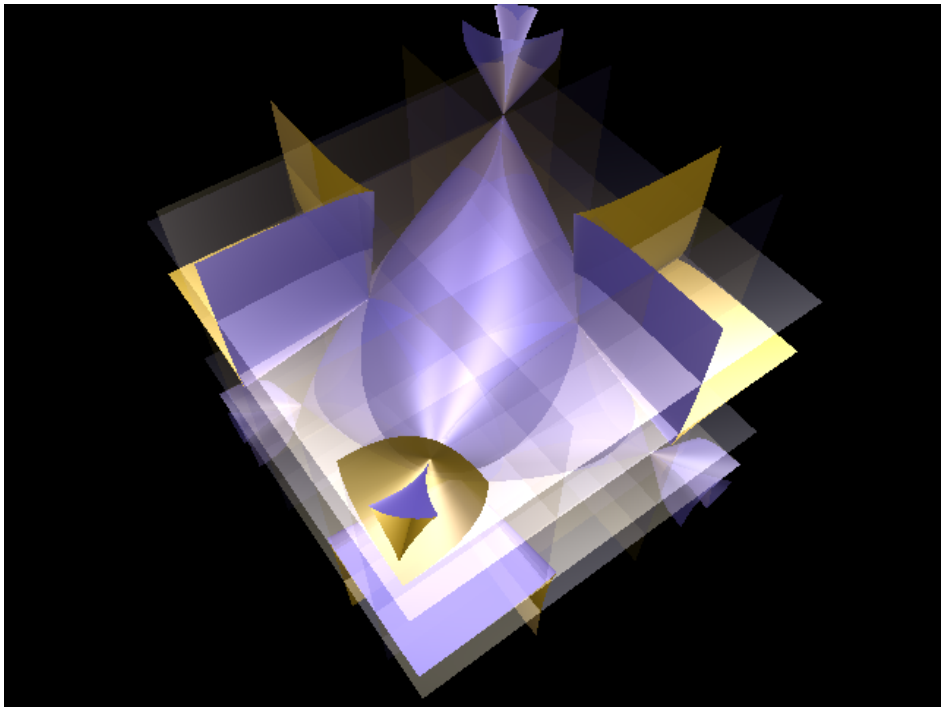
Calcul d'un point par composante connexe du complémentaire

- Méthodes de points critiques [Safey El Din : RAGLib] : 2510 points

Triangle équilatéral

Variété discriminante

3 variables, degree 27



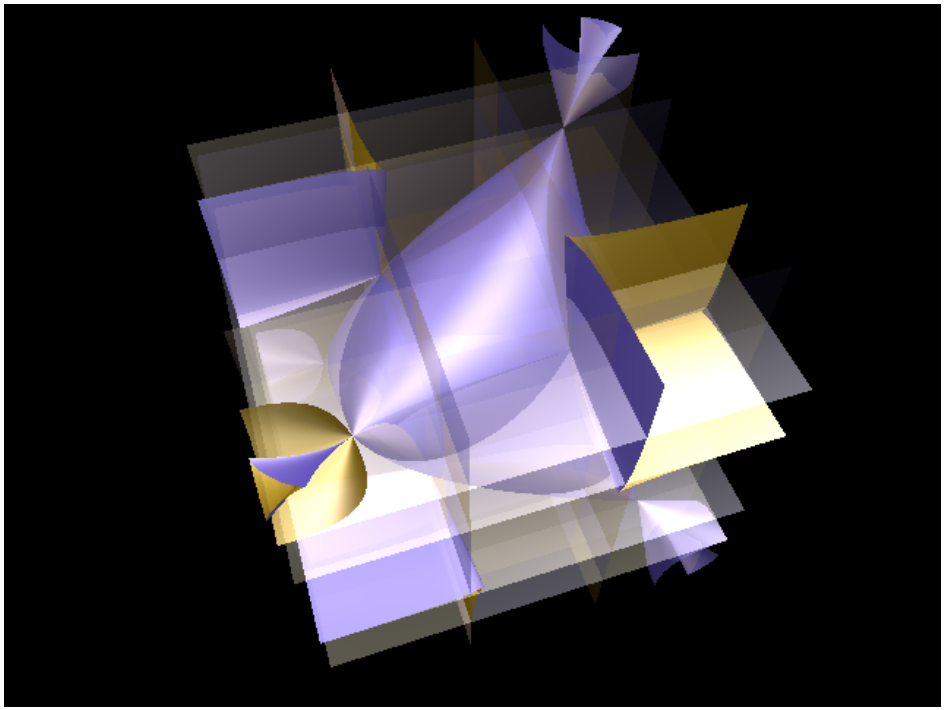
Calcul d'un point par composante connexe du complémentaire

- Méthodes de points critiques [Safey El Din : RAGLib] : 2510 points

Triangle équilatéral

Variété discriminante

3 variables, degree 27



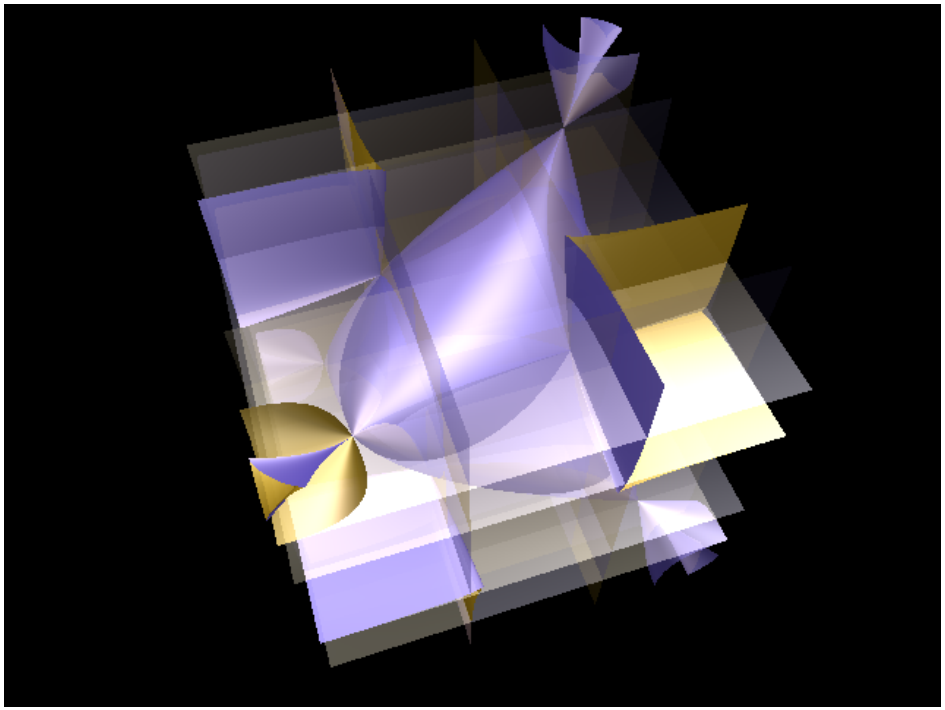
Calcul d'un point par composante connexe du complémentaire

- Méthodes de points critiques [Safey El Din : RAGLib] : 2510 points

Triangle équilatéral

Variété discriminante

3 variables, degree 27



Calcul d'un point par composante connexe du complémentaire

- Méthodes de points critiques [Safey El Din : RAGLib] : 2510 points

Triangle isocèle

$$\begin{cases} x &= a^2 + b^2 - abu \\ 1 &= b^2 + c^2 - bcv \\ 1 &= a^2 + c^2 - acw \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a, b, c, x > 0 \\ 2 > u, v, w > -2 \end{cases}$$

4 Paramètres : u, v, w, x

3 Inconnues : a, b, c

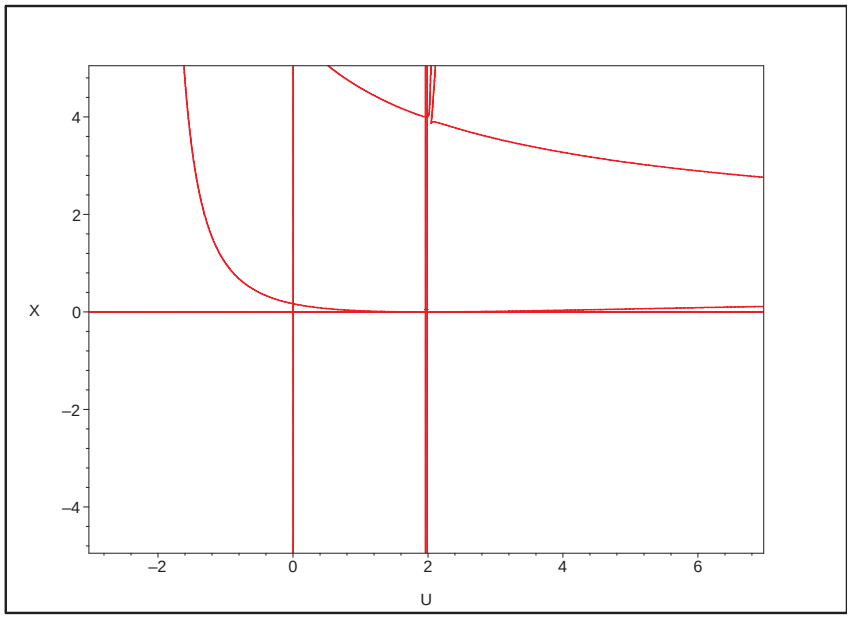
Triangle isocèle

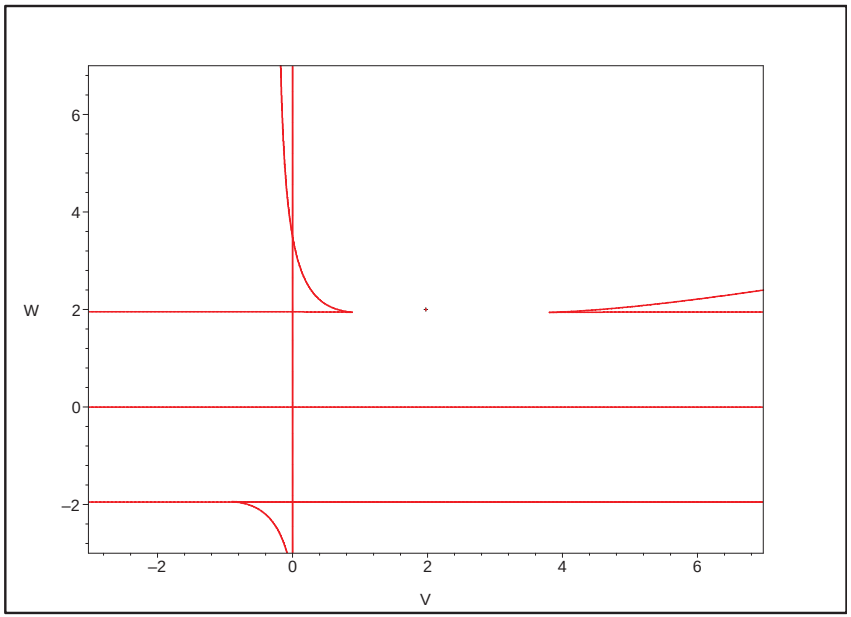
Variété discriminante

4 variables, degree 29

$$
\begin{cases}
x(-x+2+w)(x-2+w)(-x+u^2)(-x+v^2)(-uvw+w^2-4+v^2+u^2)\\
(-2x^2u^3v^5w^3-72xuv^5w-8u^3v^3w^3-96x^4u^3vw+6x^2uv^5w^3+4x^3u^4v^4w^2-8x^2u^3v^3w^3+1248xu^2v^2-\\
24x^3u^4v^2-4x^3u^6w^2-4x^3v^6w^2-24x^3u^2v^4-96xu^2v^4-128x^5v^2-18x^3u^2v^4w^2-384xu^3vw-\\
18x^3u^4v^2w^2-12uv^5w^3-96xu^4v^2+24x^3v^4w^2-240xv^4+576xu^4+x^5u^4v^4-768x^2u^2+\\
64x^5u^2v^2+576x^2v^4-768x^2v^2+64x^4u^4-416x^3v^4+64x^3v^6-96x^4uv^3w+256x^4uvw+\\
48x^2u^3vw^3+8x^2uv^5w+12x^2u^6v^2+168xv^4w^2-2x^2u^2v^6w^2+12x^2v^6w^2+12x^2u^2v^6-40x^2u^4v^4+\\
168xu^4w^2+12x^2u^6w^2-8xu^4v^4+16x^5v^4+xu^6v^2w^2-768x^3uvw+32x^4u^3v^3w-4xu^6v^2-\\
12xu^6w^2-12xv^6w^2+96xu^3vw^3+16x^2u^4v^4w^2+8x^4u^5vw+48x^2uv^3w^3+96x^3u^3vw-2x^2u^6v^2w^2+\\
96x^3uv^3w+60xu^4v^2w^2+96xuv^3w^3+60xu^2v^4w^2+6xu^2v^2w^4+8x^4uv^5w-336xu^2v^2w^2-384xuv^3w-\\
2xu^4vw^2-4xu^2v^6-1152x^2u^2v^2-27xu^4w^4-16x^4u^6-96x^2v^6+64x^3u^6+64xu^6+\\
64xv^6-240xu^4-128x^5u^2-1024x^4+1024x^3+768x^2uvw+xu^2v^6w^2+8xu^5v^3w+\\
6xu^4v^2w^4+48u^5vw+8x^3u^5vw+16x^5u^4-27xv^4w^4+24x^3u^4w^2+4x^4u^6v+192x^2v^2w^2-\\
128x^4u^2v^2+4v^6w^2-4x^4u^4v^4+64x^4v^4+6xu^2v^4w^4+8xu^3v^5w-2xu^5v^3w^3+192x^2u^3vw+\\
6xu^5vw^3+96u^3v^3w+192x^2uvw+32x^3u^3v^3w-2xu^3v^5w^3+4u^6w^2+256x^3u^2v^2+96x^3v^2w^2+\\
48uv^5w-36u^4v^2w^2+256x^4u^2-8x^5u^4v^2-416x^3u^4+256x^4v^2+384x^3v^2-96x^2u^6-\\
72xu^5vw-76xu^3v^3w^3+12u^4v^2w^4+4x^4u^2v^6-12x^3u^6v^2+96x^3u^2w^2-256x^3w^2-8x^5u^2v^4-\\
16v^6-16x^4v^6+384x^3u^2-16u^6+8x^3uv^5w+xu^4v^4w^4+6xuv^5w^3-36u^2v^4w^2+\\
12u^2v^4w^4-4u^3v^3w^5-2x^4u^3v^5w+x^3u^6v^2w^2-\\
6x^3u^5v^3w-192x^2v^4w^2-48u^2v^4-12x^3u^2v^6-\\
192x^2u^4w^2+8x^2u^5vw+192x^2u^2w^2-48u^4v^2+144xu^3v^3w-2x^4u^5v^3w-192x^2uvw^3+176x^2uv^2+\\
24x^3u^4v^4+176x^2u^2v^4-160x^2u^3v^3w-6x^3u^3v^5w+6x^2u^5vw^3-12u^5vw^3+x^3u^2v^6w^2-2x^2u^5v^3w^3+\\
256x^5)
\end{cases}
= 0
$$

Triangle isocèle

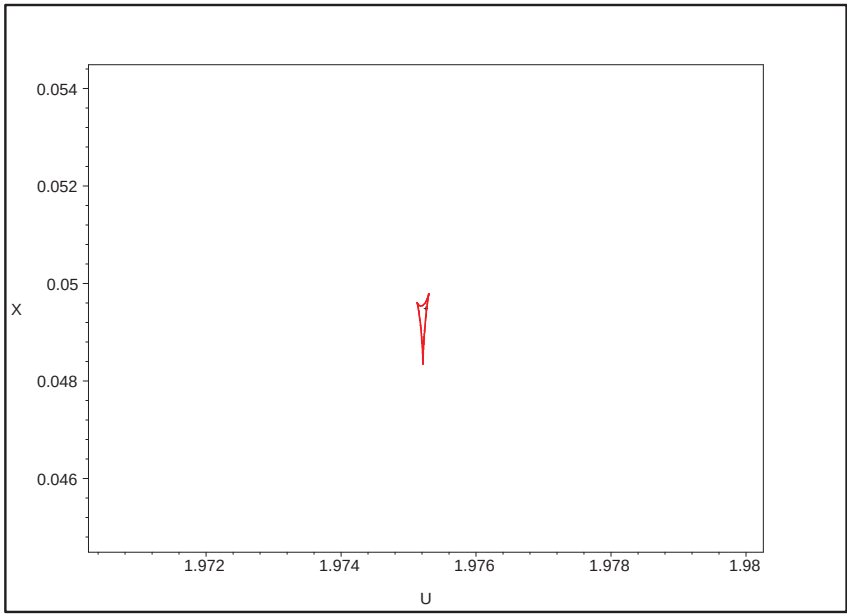


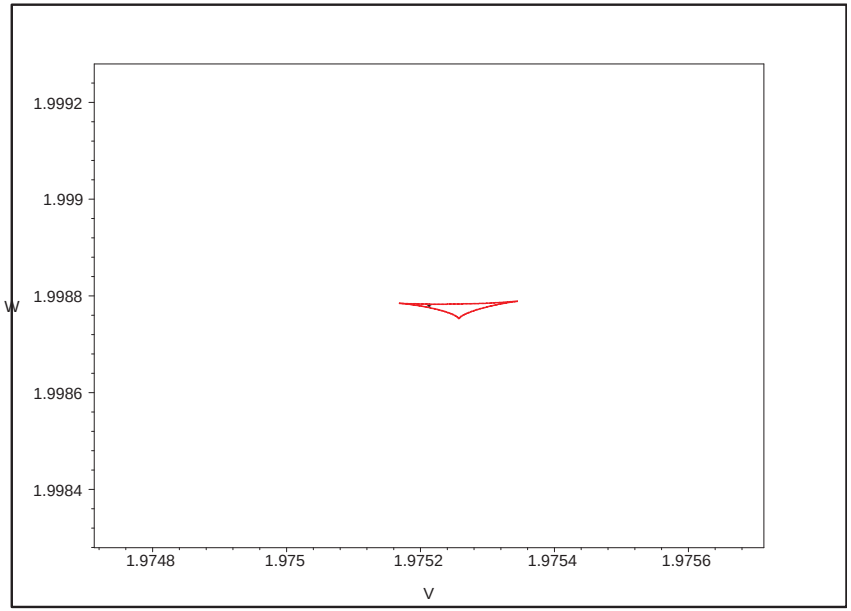


Calcul d'un point par composante connexe du complémentaire

- Méthodes de points critiques
  - 4266 secondes (environ 1h12)
  - 67548 points

Triangle isocèle





Calcul d'un point par composante connexe du complémentaire

- Méthodes de points critiques
  - 4266 secondes (environ 1h12)
  - 67548 points

Triangle général

$$\begin{cases} x &= a^2 + b^2 - abu \\ t &= b^2 + c^2 - bcv \\ 1 &= a^2 + c^2 - acw \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a, b, c, x, t > 0 \\ 2 > u, v, w > -2 \end{cases}$$

5 Paramètres : u, v, w, x, t

3 Inconnues : a, b, c

- Variété discriminante :
  - degré : 33
  - nombre de monômes : 651 (forme factorisée)
- Points dans le complémentaire :
  - Méthodes de points critiques prometteuses travaux en cours

Merci