



UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT - PARIS 7
École doctorale
Sciences Mathématiques de Paris Centre



THÈSE

pour l'obtention du diplôme de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT

Spécialité INFORMATIQUE

**SÉMANTIQUES ET SYNTAXES VECTORIELLES
DE
LA LOGIQUE LINÉAIRE**

Présentée et soutenue publiquement par

Christine TASSON

le 4 décembre 2009, devant le jury composé de

Directeurs de thèse : Pierre-Louis CURIEN
Thomas EHRHARD
Rapporteurs : Yves LAFONT
Thomas STREICHER
Examineurs : Martin HYLAND
Olivier LAURENT
Damiano MAZZA

REMERCIEMENTS

Je voudrais commencer par remercier mes directeurs de thèse. C'est avec une grande générosité que Thomas Ehrhard a partagé avec moi sa profonde vision scientifique ainsi que ses recherches. J'espère que notre collaboration ne s'arrêtera pas avec cette thèse. Jamais avare de son temps et de son expérience, Pierre-Louis Curien m'a guidée et aidée dans toutes les pistes que j'ai suivies. Leur tandem de choc m'a ouvert la voie dans le monde passionnant de la recherche.

Je remercie Yves Lafont et Thomas Streicher d'avoir accepté de rapporter ma thèse, ainsi que d'avoir lu mon manuscrit avec tant d'attention.

Je suis très heureuse que Martin Hyland, Olivier Laurent et Damiano Mazza aient accepté de faire partie de mon jury. Je les remercie plus particulièrement pour les discussions que nous avons pu avoir au cours de mes années de doctorat.

Je tiens aussi à dire un grand merci à Lionel, Alexis, Pierre, Michele, Nicolas et Samy qui ont relu les versions préliminaires de cette thèse et dont les questions, remarques et encouragements m'ont permis de mener ce travail à bien.

Depuis mes premiers pas dans le monde de la recherche, j'ai croisé beaucoup de chercheurs et professeurs qui m'ont inspirée et fait aimer ce métier : Rick Blute, Ryu Hasegawa, Jacques Garrigues, Christian Urban, Hubert Comon-Lundh, Michel Cognet... Je les en remercie.

Un grand merci à Odile, Audrey et Michèle pour leur efficacité, ainsi que pour la bonne humeur qu'elles distillent quotidiennement.

Je tiens aussi à remercier mes collègues et amis sans qui ces trois années auraient été bien fades : Lionel et Pierre, que je ne pourrai jamais trop remercier pour leur amour des navettes, leur goût pour les espaces de finitude, pour leur accueil généreux, ainsi que pour la recette de notre pain quotidien ; Michele et Daniel avec qui j'ai passé des heures à dessiner des triangles et des traits au tableau ; Benjamino et Irene qui m'ont fait découvrir la meilleure glace de Rome ; Nico, Sam, Malo, Sylvain et la loge ; Lisa, Mathilde et Sarah ; Séverine, de Bari à Cerisy que de souvenirs ; la bande du 6C12 Sylvain, Sam, Fabien, Raph et Pasquale ; Marie, la Suède, la course et les macarons ; Barabara et sa bonne humeur ; Joachim et son théâtre ; Gim et ses rollers ; Pierre et noir dés ; Grégoire, Medhi, Stéphane, Jonas, Thibaud, Stéphane, Antoine, Guillaume...

Ce travail n'aurait pas pu être mené à bien sans soupape de dépressurisation. Je tiens donc à remercier Alain, Francis et les autres du subaqua de m'avoir initiée à la sagesse de l'apnée. Merci aussi à William et à Valérie de m'avoir accueillie avec une telle générosité dans le monde artistique de la coiffure. Merci aussi à tous les cobayes qui sont passés sous mon peigne et mes ciseaux pendant ces trois années : Sam (indomptable), Marie (quelle masse), Nicolas

(presque crépu), Sam (dont les blagues défrisent même à 7h45), Séverine (glamour), Paolo (crête), Michel (stylé), Paolo (la mèche), Pierre-Louis (sourcilleux), Sylvain (Brad Pitt), Gim (semi rasé), Barbara (triangulée), Claire (blond suédois), Mathilde (quelle couleur), Lisa (même pas peur), Alexandre (ondulant), Julius (CAP), Raph (comme sur la photo qui fait moins d'un centimètre carré), Amélie, Fabien, Faten, Alice...

Last but not least, merci à mes amis Rachel, Alice et Cédric et à ma famille récemment élargie. Mes derniers remerciements sont évidemment pour Alain à qui je dédie ce manuscrit.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
I Prélude : la logique linéaire	7
I.1 Syntaxe	8
I.2 Sémantique	12
I.3 Orthogonalité	25
A Sémantique	37
Introduction	39
II Espaces de finitude relationnels	43
II.1 Généralités	44
II.2 Structure additive, limites et co-limites	51
II.3 Structure multiplicative	56
II.4 Structure exponentielle	58
III Espaces de Lefschetz	67
III.1 Topologies linéaires	71
III.2 Structure additive, limites et co-limites	93
III.3 Structure multiplicative	103
III.4 Structure exponentielle	157

B Syntaxe	173
Introduction	175
IV Totalité dans les espaces de finitude	179
IV.1 Rappels sur les espaces de finitude	180
IV.2 Extensions du λ -calcul	182
IV.3 Étude sémantique de la totalité	186
IV.4 λ -calcul barycentrique	193
V Développement de Taylor dans les réseaux	201
V.1 Logique linéaire différentielle	203
V.2 Développement de Taylor pour le λ -calcul	206
V.3 Réseaux	210
V.4 Réciproque du développement de Taylor syntaxique	218
Perspectives	247
Bibliographie	254
Table des figures	255
Index	259

INTRODUCTION

Cette thèse propose une exploration des sémantiques vectorielles de la logique linéaire. Elle contribue à l'étude sémantique et syntaxique de la formule de Taylor.

Programmes et preuves. Il peut paraître à première vue étrange de mélanger logique et langages de programmation. En fait, ces deux domaines parlent des mêmes objets avec des points de vue différents.

Intuitivement, la démonstration d'un théorème mathématique, c'est-à-dire d'une formule logique, fournit un algorithme permettant d'obtenir la conclusion du théorème à partir de ses hypothèses. Ainsi, la preuve de toute formule possède un contenu informatique.

Réciproquement, un programme induit une démarche répondant à un problème (par exemple, calculer un résultat, vérifiant une propriété spécifiée, à partir d'une donnée d'un certain type). Cette démarche peut être vue comme un enchaînement d'étapes logiques qui fournissent une preuve de la formule spécifiant le programme. On peut donc parler de façon équivalente de programmes comme de preuves.

De plus, cette correspondance s'étend au niveau calculatoire. Plus précisément, en logique, l'élimination des coupures est l'opération qui consiste à remplacer les lemmes utilisés dans une démonstration par leur preuve *mutatis mutandis*. On obtient ainsi une preuve indépendante de tout autre résultat. En informatique, cette opération revient à remplacer dans un programme tous les appels à des procédures externes par leur code *mutatis mutandis*.

En résumé, les trois niveaux d'une logique — formules, règles de déduction et élimination des coupures — sont respectivement en correspondance avec les trois éléments des langages de programmation typés — système de types, règles de typage et évaluation des programmes.

On appelle cette correspondance entre la logique et les langages de programmation l'isomorphisme de **Curry-Howard** [How80].

Sémantique. Par définition, la sémantique apporte un sens aux syntaxes de la logique et des langages de programmation. Nous allons voir qu'en retour, ces syntaxes nourrissent la sémantique.

En logique, la sémantique permet de donner un sens aux formules ainsi que des indications sur leurs propriétés et sur l'existence d'une preuve.

En informatique, la sémantique permet d'une part d'étudier le comportement des programmes — on parle de sémantique *opérationnelle* — et d'autre part de leur donner un sens

mathématique puis de s'en servir pour étudier leurs propriétés au cours de leur évaluation par la machine — on parle de sémantique *dénotationnelle*.

Mais la sémantique n'est pas seulement un outil pour étudier les syntaxes de la logique ou des langages de programmation. Les relations entre la sémantique et la syntaxe sont en fait bien plus riches.

D'une part, il est possible d'améliorer notre compréhension des langages de programmation par l'étude mathématique de la sémantique dénotationnelle. Pour ce faire, on restreint la sémantique d'un langage de programmation afin de capturer et de décrire au mieux ses propriétés.

À l'inverse, on peut étendre le langage de programmation pour qu'il remplisse sa sémantique. Ainsi de nouveaux langages de programmation émergeront.

D'un côté, on aura transformé une structure syntaxique en une structure mathématique et de l'autre, on aura créé une syntaxe reflétant une structure mathématique.

D'une manière générale, les langages de programmation sont introduits pour répondre à des besoins pratiques. Leur étude sémantique peut faire émerger de nouvelles structures mathématiques ou plus modestement apporter un nouveau point de vue sur des structures déjà existantes. Inversement, certaines sémantiques, assez éloignées des syntaxes usuelles, apporteront de nouvelles caractéristiques aux langages de programmation.

Logique linéaire. L'histoire de la logique linéaire illustre ce va-et-vient entre la syntaxe et la sémantique.

Elle a été introduite à la suite de l'étude sémantique d'un langage de programmation (le λ -calcul avec second ordre [Gir86]). En étudiant ce modèle (les espaces cohérents), Girard a constaté que tout espace interprétant une implication peut être obtenu en deux étapes résultant de l'interprétation de deux nouveaux opérateurs (l'exponentielle et l'implication linéaire). Girard a alors introduit une nouvelle logique dans laquelle l'implication est remplacée par ces deux opérateurs [Gir87].

La décomposition de l'implication dans la logique linéaire s'interprète algorithmiquement en termes de gestion des ressources informatiques. En effet, lors d'un calcul, le nombre d'utilisations d'un argument peut varier. En logique linéaire, au lieu d'octroyer à un programme un accès infini à l'argument, on va former un paquet contenant potentiellement une infinité de copies de cet argument (son exponentielle) et le fournir à un programme (dit linéaire) qui consulte une seule fois son argument, c'est-à-dire ce paquet.

On représente donc un programme par différents scénarios d'exécution, chaque scénario correspondant à un programme partiel qui utilise un nombre prédéterminé de fois ses données. La logique linéaire peut donc se comprendre comme une logique des ressources informatiques.

Née d'une étude sémantique, la logique linéaire a à son tour fait l'objet d'études sémantiques. Chacune de ces études a apporté un éclairage différent sur la logique linéaire.

D'une part, la sémantique quantitative [Gir88], introduite afin d'interpréter des programmes parallèles ou probabilistes, permet de mieux comprendre la gestion des ressources dans la logique linéaire. En effet, même si cette sémantique a été introduite avant la logique linéaire, elle en forme un modèle [Has02]. Dans ce modèle, les types sont interprétés par des ensembles

et les programmes par des foncteurs analytiques [Joy86] (l'équivalent catégorique des séries entières). L'interprétation d'un programme peut notamment être décomposée en une somme de polynômes homogènes (à une traduction près de ces notions dans la catégorie des ensembles). Dans les langages de programmation, un polynôme homogène de degré n correspond à un programme qui utilise exactement n fois son argument. La décomposition d'un programme en séries formelles revient donc à récrire le programme en associant à chaque entier n un algorithme effectuant exactement n appels à la ressource. On appelle cette décomposition *la formule de Taylor syntaxique* [ER08]; elle correspond dans la sémantique, au développement en série de Taylor.

Par ailleurs, plusieurs axiomatisations catégoriques ont été proposées afin de caractériser les modèles de la logique linéaire [See89, Bie95, Ben95]. Celles-ci ont permis de mettre en évidence deux univers dans la logique linéaire. Le premier est le monde *linéaire* dans lequel les ressources doivent toutes être utilisées exactement une fois. Le second est *non-linéaire*, les ressources de ce monde peuvent être effacées et dupliées. De plus, il existe un passage entre ces deux mondes à travers un opérateur nommé *exponentielle* car il permet de transformer l'additif en multiplicatif.

Enfin, dans les langages de programmation, on considère parfois que «l'interaction entre un programme et son environnement est réversible». Lorsqu'elle est transposée en logique via l'isomorphisme de Curry-Howard, cette propriété est appelée *dualité*¹. Elle est centrale en logique linéaire. La sémantique des jeux [AM99] et la ludique [Gir01] se sont ainsi attachées à l'étude des interactions entre entrées/sorties d'un programme, questions/réponses d'un dialogue. Soulignons que si les jeux ont une origine antérieure à la logique linéaire, ils ont été largement développés suite à son introduction. Ils ont notamment offert une solution au problème de la définissabilité des programmes séquentiels [AJ92, HO00].

La sémantique quantitative est également à l'origine de l'extension différentielle de la logique linéaire. Cette sémantique fait appel à la notion de série entière dans la catégorie des ensembles. On peut utiliser le cadre plus traditionnel des séries dans les espaces vectoriels topologiques [Gir96, BS96] pour mener une étude sémantique de la logique linéaire. Citons par exemple les espaces de Köthe [Ehr02] ou leur version discrète, les espaces de finitude [Ehr05]. Les types y sont interprétés par des espaces vectoriels topologiques, les données par des familles sommables et les programmes par des séries formelles. Ces modèles sont équipés d'une structure différentielle qui peut être transposée dans la syntaxe. C'est ainsi que sont nés le lambda-calcul différentiel [ER03] et les réseaux différentiels [ER06].

Comme nous l'avons vu, la sémantique quantitative de Girard permet de concrétiser les intuitions de la logique linéaire quant à la gestion des ressources. Elle a naturellement inspiré les syntaxes différentielles et des travaux syntaxiques sur la gestion des ressources [Bou93, GSS92]. On peut ainsi établir des liens entre logique linéaire et théorie de la concurrence [EL08].

On peut aussi espérer se servir de la structure des syntaxes différentielles pour mieux comprendre la structure différentielle en mathématiques. Il existe en effet des notions de différen-

¹Nous appellerons parfois cette propriété *réflexivité*, en référence à sa traduction dans les espaces vectoriels topologiques.

tiation dans de nombreuses branches des mathématiques qui sont reliées les unes aux autres sans pour autant être l'instance d'une seule et même généralisation. La voie syntaxique pourrait constituer un point d'ancrage pour aborder une telle question.

Problèmes étudiés. Ce travail participe à l'étude de la structure différentielle en logique linéaire à travers deux axes, sémantique pour l'un, syntaxique pour l'autre.

Tout d'abord, les espaces de finitude forment une sémantique dans laquelle les types sont interprétés par des espaces de suites généralisées munis d'une topologie. Dans cette théorie, le corps de base est supposé discret, ce qui simplifie bon nombre de considérations topologiques. Par conséquent, ces espaces fournissent un terrain d'entraînement pour étudier la sémantique des syntaxes différentielles.

Ensuite, des termes partiels (qui ne correspondent à aucune preuve de la logique linéaire) et des termes totaux (qui correspondent à une preuve) cohabitent dans les syntaxes différentielles. Comment caractériser les termes totaux dans la jungle différentielle ? La réponse à cette question permet de mieux comprendre la structure logique des syntaxes différentielles.

Les contributions que nous avons apportées sont les suivantes :

- Dans les espaces de finitude, de nombreuses constructions possèdent une description sémantique facile à manipuler. Pour le démontrer, on utilise souvent une technique qui permet d'importer la structure finitaire d'un espace à un autre. Nous appliquons cette technique pour construire l'interprétation de structures de données dans le modèle des espaces de finitude. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Lionel Vaux.
- Dans les espaces de finitude, la modalité exponentielle est librement engendrée. Pourtant la formule introduite par Melliès et Tabareau [MT] pour calculer le monoïde libre ne convient pas. Nous expliquons pourquoi. Ce travail a donné lieu à une publication dans la conférence ICALP [MTT09].
- Les espaces de finitude sont des cas particuliers d'espaces de Lefschetz [Lef42]. Nous décrivons les différentes constructions de la logique linéaire dans la catégorie des espaces de Lefschetz. Cette catégorie ne forme pas un modèle de la logique linéaire. Nous en proposons une sous-catégorie candidate pour être un modèle et montrons qu'elle généralise les espaces de finitude. Par ailleurs, nous définissons une notion intrinsèque d'espaces de finitude et montre qu'elle est stable par les différentes constructions de la logique linéaire.
- Afin de caractériser les termes totaux dans la syntaxe différentielle, nous introduisons un raffinement du modèle des espaces de finitude. Nous proposons ensuite une syntaxe (le lambda-calcul barycentrique) qui reflète cette sémantique pour les types booléens du premier ordre. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Pierre Hyvernât. Il a donné lieu à une publication dans la conférence TLCA [Tas09].
- Enfin, dans le cadre des réseaux différentiels, nous proposons un algorithme qui permet de déterminer si un ensemble fini de réseaux est issu du développement de Taylor d'une preuve de la logique linéaire. Nous montrons que cet algorithme est complet (tous les réseaux provenant d'une preuve sont reconnus) et correct (si un réseau est reconnu, il provient d'une preuve). Ce travail a été réalisé en collaboration avec Michele Pagani. Il a donné lieu à une publication dans la conférence LICS [PT09].

Plan. Dans le Chapitre I nous présentons la logique linéaire, sa syntaxe et sa sémantique. Nous introduisons aussi la construction par orthogonalité, classique en logique linéaire, qui sera utilisée par la suite.

Le manuscrit est ensuite divisé en deux parties selon l’approche qui est utilisée pour étudier la logique linéaire différentielle. La première partie est une étude sémantique des espaces de finitude. La seconde se consacre à la syntaxe sans pour autant perdre de vue la sémantique.

Dans la première partie, nous commençons par étudier les espaces de finitude au Chapitre II. Après avoir donné leur définition, leurs propriétés et les premiers exemples, nous énonçons un théorème qui permet de transporter les structures finitaires d’un espace à l’autre. Nous décrivons alors les constructions de la logique linéaire à la lumière de ce théorème. Nous concluons ce chapitre par une discussion sur la modalité exponentielle.

Dans le Chapitre III, nous décrivons les constructions de la logique linéaire dans les espaces de Lefschetz. Chaque notion décrite est ensuite illustrée dans le cadre des espaces de finitude. Nous donnons une définition intrinsèque de ces derniers. Nous montrons que les espaces ainsi définis forment une famille stable par les constructions de la logique linéaire et constitue un modèle de la logique linéaire. Les espaces de Lefschetz, quant à eux, ne forment pas un modèle de la logique linéaire. Après avoir étudié les caractéristiques des espaces de finitude sur lesquelles repose le modèle, nous proposons une famille généralisant ces espaces et candidate pour former un modèle de la logique linéaire. Nous concluons ce chapitre par une description de la formule de Taylor.

Dans la deuxième partie, nous abordons la logique des syntaxes différentielles.

Dans le Chapitre IV, nous munissons les espaces de finitude d’une notion de totalité. Nous obtenons ainsi un modèle de la logique linéaire qui permet de différencier les termes totaux des autres termes dans le lambda-calcul différentiel. En s’appuyant sur les propriétés sémantiques, nous introduisons le lambda-calcul barycentrique — une syntaxe à mi-chemin entre le lambda-calcul et sa version différentielle. Nous montrons que la sémantique est complète pour la hiérarchie booléenne du premier ordre de ce calcul.

Dans le Chapitre V, nous considérons les réseaux de la logique linéaire. Nous commençons par définir le développement de Taylor syntaxique, qui traduit un réseau de la logique linéaire en une somme de réseaux différentiels. Ensuite, nous introduisons une caractérisation des réseaux de la logique linéaire en termes d’étiquetage. Nous pouvons alors décrire l’algorithme de fusion qui permet de reconnaître si un ensemble fini de réseaux différentiels provient d’un réseau de la logique linéaire via le développement en série de Taylor. Après avoir montré que cet algorithme est correct et complet, nous en discutons les applications.

Liste des définitions et résultats principaux.

Chapitre II :

Définition II.2. [page 45] *Les espaces de finitude relationnels.*

Théorème II.1. [page 50] *Transport des structures finitaires.*

Chapitre III :

Définition III.1. [page 71] *Les espaces de Lefschetz.*

Définition III.4. [page 74] *Espaces de Lefschetz finitaires. La version intrinsèque des espaces de finitude vectoriels.*

Proposition III.9. [page 164] *Les espaces de Lefschetz finitaires forment un modèle de la logique linéaire.*

Définition III.22. [page 131] *Espaces de Lefschetz bornologiques. Catégorie d'espaces de Lefschetz candidate pour être un modèle de la logique linéaire et généraliser les espaces de Lefschetz finitaires.*

Chapitre IV :

Définition IV.3. [page 189] *Espaces de totalité. Raffinement des espaces de Lefschetz finitaires.*

Proposition IV.8. [page 190] *Les espaces de totalité forment un modèle de la logique linéaire.*

Paragraphe IV.4.2. [page 194] *Présentation du λ -calcul barycentrique.*

Théorème IV.3. [page 196] *Complétude des espaces de totalité pour la hiérarchie booléenne du premier ordre du λ -calcul barycentrique.*

Chapitre V :

Définition V.8. [page 217] *Le développement de Taylor des réseaux de la logique linéaire en somme de réseaux différentiels.*

Définition V.12. [page 224] *L'étiquetage des boîtes des réseaux de la logique linéaire.*

Proposition V.3. [page 225] *La notion d'étiquetage code exactement l'emboîtement des réseaux de la logique linéaire.*

Définition V.18. [page 229] *Définition de l'algorithme de fusion des réseaux différentiels en réseaux de la logique linéaire — Inversion du développement de Taylor.*

Théorème V.4. [page 241] *Correction de l'algorithme de fusion.*

Théorème V.3. [page 237] *Complétude de l'algorithme de fusion.*

I - PRÉLUDE : LA LOGIQUE LINÉAIRE

Plan du chapitre

I.1	Syntaxe	8
I.1.1	Formules	8
I.1.2	Calcul des séquents	8
I.1.3	Élimination des coupures	11
I.1.4	Codage de la logique intuitionniste	11
I.1.5	Formule de Taylor syntaxique	11
I.2	Sémantique	12
I.2.1	Modèle catégorique du lambda-calcul	12
I.2.2	Modèle catégorique de la logique linéaire intuitionniste	14
I.2.3	Modèle catégorique de la logique linéaire classique	23
I.2.4	Recollement de modèles de la logique linéaire	24
I.3	Orthogonalité	25
I.3.1	Principe	26
I.3.2	Exemples issus de la logique linéaire	28
I.3.3	Formalisation via le bi-recollement	30

Dans ce premier chapitre, nous allons présenter les modèles de la logique linéaire.

Pour cela, nous commençons par présenter le formalisme de la logique linéaire, sa syntaxe. Nous en profitons pour souligner les équivalences logiques qui nous serviront à présenter sa sémantique.

Ensuite, nous nous attardons sur la logique intuitionniste et son langage interne, le λ -calcul. Nous présentons la traduction de l'implication intuitionniste dans la logique linéaire. Puis nous abordons la sémantique via l'axiomatisation catégorique du λ -calcul.

Nous poursuivons par la description des différentes axiomatisations catégoriques de la logique linéaire et discutons quelques méthodes pour calculer l'exponentielle dans les modèles de la logique linéaire.

Enfin, nous consacrons une partie de ce préluce à la méthode de la bi-orthogonalité. Cette technique est souvent utilisée pour construire les modèles de la logique linéaire. Après l'avoir explicitée et illustrée, nous étudions sa formalisation catégorique, le bi-recollement («double glueing» en anglais).

I.1 Syntaxe

I.1.1 Formules

Les formules de la logique linéaire (LL) sont données par la grammaire :

$$\begin{array}{lll}
 A, B \stackrel{\text{def}}{=} & X \mid X^\perp \mid & \text{Variables Propositionnelles,} \\
 & \perp \mid 1 \mid A \otimes B \mid A \wp B \mid & \text{Structure Multiplicative (M),} \\
 & \top \mid 0 \mid A \oplus B \mid A \& B \mid & \text{Structure Additive (A),} \\
 & !A \mid ?A & \text{Structure Exponentielle (E),}
 \end{array}$$

où X et $X^\perp$ parcourent un ensemble de variables propositionnelles.

La négation linéaire $(-)^{\perp}$ est involutive, i.e. $A^{\perp\perp} = A$. C'est la **réflexivité** de la logique linéaire. Cette négation est étendue aux formules grâce aux lois de De Morgan :

$$1^\perp = \perp, \quad (A \& B)^\perp = A^\perp \oplus B^\perp, \quad (A \otimes B)^\perp = A^\perp \wp B^\perp, \quad (!A)^\perp = ?A^\perp.$$

Dans les formules, on distingue le monde additif du monde multiplicatif. Dans chacun de ces mondes, on a un connecteur «ou» ($\oplus$ et $\wp$) et un connecteur «et» ($\&$ et $\otimes$). Enfin, la structure exponentielle permet de passer de l'un à l'autre. Ainsi, les formules $!(A \& B)$ et $!A \otimes !B$ sont logiquement équivalentes. Algorithmiquement, une formule exponentielle $!A$ va typer des ressources inépuisables ou effaçables, alors que celles qui n'ont pas de marqueur exponentiel vont typer des ressources linéaires, c'est-à-dire ne pouvant être ni dupliquées, ni jetées.

I.1.2 Calcul des séquents

Nous donnons dans la Figure I.1 page 9 une description des séquents de la logique linéaire avec (Mix).

Remarquons que les règles structurelles de contraction et d'affaiblissement que l'on retrouve en logique ne s'appliquent ici que sur des formules qui ont été marquées par une modalité exponentielle. Seules ces formules peuvent être dupliquées ou effacées. Ainsi, la *déréliction* (?d) marque une formule par une modalité exponentielle, indiquant qu'elle va pouvoir être *dupliquée* par la règle (?c). La règle (?w) d'*affaiblissement* permet d'introduire une formule exponentielle à partir de rien.

Par ailleurs, contrairement au calcul des séquents de la logique intuitionniste, on n'a pas à proprement parler de règle d'introduction de la flèche. En fait cette dernière règle est codée grâce au connecteur $\wp$ et à l'orthogonal $(-)^{\perp}$. Ainsi, la définition $A \multimap B \stackrel{\text{def}}{=} A^\perp \wp B$ fait apparaître explicitement la négation cachée dans cette implication. Dans ce codage de la flèche linéaire, on peut voir une manifestation de la *réflexivité* de la logique linéaire. En effet, les implications linéaires sont réversibles dans le sens où $X \multimap Y$ et $Y^\perp \multimap X^\perp$ sont des formules logiquement équivalentes. Cette équivalence logique se traduit via l'isomorphisme de Curry-Howard par le fait que les entrées et les sorties d'un programme jouent des rôles interchangeables.

• **Groupe Identité :**

$$\frac{}{\vdash X, X^\perp} \text{ (ax)} \quad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash A^\perp, \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{ (Cut)}$$

• **Groupe Multiplicatif :**

$$\frac{}{\vdash 1} \text{ (1)} \quad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \perp} \text{ (\perp)}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \wp B} \text{ (\wp)} \quad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B} \text{ (\otimes)}$$

• **Groupe Additif :**

$$\frac{}{\vdash \Gamma, \top} \text{ (\top)} \quad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \& B} \text{ (\&)}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \oplus B} \text{ (\oplus}_g\text{)} \quad \frac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \oplus B} \text{ (\oplus}_d\text{)}$$

• **Groupe Exponentiel :**

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A} \text{ (?w)} \quad \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A} \text{ (?d)} \quad \frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A} \text{ (?c)}$$

$$\frac{\vdash ?\Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A} \text{ (promotion)}$$

• **Mix :**

$$\frac{}{\vdash} \text{ (Mix}_0\text{)} \quad \frac{\vdash \Gamma \quad \vdash \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{ (Mix)}$$

FIG. I.1: Calcul des séquents pour la logique linéaire (LL)

Quelques équivalences logiques. On dit que deux formules A et B sont **logiquement équivalentes**, noté $A \equiv B$, si l'on peut prouver les deux jugements $\vdash A \multimap B$ et $\vdash B \multimap A$.

Nous donnons quelques équivalences logiques¹ valables en logique linéaire et que nous retrouverons plus tard en sémantique.

Tout d'abord la distributivité du tenseur sur le plus :

$$A \otimes 0 \equiv 0, \tag{I.1}$$

$$A \otimes (B \oplus C) \equiv (A \otimes B) \oplus (A \otimes C). \tag{I.2}$$

¹Plus précisément, ce sont des isomorphismes de la logique linéaire autrement dit, non seulement $\vdash A \multimap B$ et $\vdash B \multimap A$ sont prouvables mais leur coupure est η -équivalente à un axiome.

Ensuite, le lien entre le monde additif et le monde multiplicatif via l'exponentielle. :

$$!(A \& B) \equiv !A \otimes !B, \quad ?(A \oplus B) \equiv ?A \wp ?B, \quad (\text{I.3})$$

$$!1 \equiv 1 \quad ?0 \equiv \perp. \quad (\text{I.4})$$

D'autres jugements sont prouvables en logique linéaire et sont remarquables car ils vont permettre de décrire les modèles de la logique linéaire à travers la sémantique catégorique (voir le Paragraphe I.2). En voici quelques uns, prouvables quel que soit A :

$$\vdash !A \multimap 1, \quad \vdash !A \multimap !A \otimes !A, \quad (\text{I.5})$$

$$\vdash !A \multimap A, \quad \vdash !A \multimap !!A. \quad (\text{I.6})$$

De plus la preuve de chacun de ces jugements est indépendante de la formule A .

Ces formules signifient respectivement que toute formule exponentielle peut être effacée, dupliquée ou linéarisée et que toute ressource infinie est infiniment infinie.

Le Mix. La règle (Mix) permet de juxtaposer deux preuves. On peut comprendre ceci via l'isomorphisme de Curry-Howard. Dans le monde des programmes, la règle (Mix) revient à faire tourner deux programmes en parallèle et à renvoyer le couple des résultats de chacun des programmes. On remarquera que ceci suppose que le (Mix) de deux programmes ne termine que quand chacun d'eux termine. D'un point de vue logique, la règle (Mix) permet de prouver les jugements :

$$\vdash \perp \multimap 1 \quad \text{et} \quad \vdash A \otimes B \multimap A \wp B.$$

Nous considérons de plus la version 0-aire (Mix₀) qui permet de prouver le jugement $\vdash \perp \multimap 1$. Elle implique donc l'équivalence logique :

$$1 \equiv \perp.$$

Cette équivalence n'est pas vérifiée par tous les modèles de la logique linéaire. Cependant, nous la considérons car elle est vérifiée par les modèles que nous allons étudier.

Soulignons que la règle (Mix₀) permet de prouver $\vdash \perp$. Elle joue le rôle d'un Daimon [Gir07] qui peut être considéré comme une preuve partielle.

Par ailleurs, la règle du (Mix₀) implique la règle (Mix) qui aurait pu être omise du calcul des séquents.

Différents fragments. Au cours de ce manuscrit, nous ferons référence à différents fragments de la logique linéaire. On désigne par **LL** l'ensemble des formules de la logique linéaire et des règles de formation des séquents. Le fragment **MALL** exclut les exponentielles, le fragment **MELL** les additifs. Enfin, le fragment **MLL** exclut les additifs et les exponentielles. On notera **ILL** la logique linéaire intuitionniste et **IMELL**, **IMALL** ses fragments respectifs. Comme la logique intuitionniste, elle est obtenue en considérant des jugements bilatères plutôt que monolatères (comme ici) et avec une *seule* formule à droite. L'étude de ce fragment va à l'encontre de la réflexivité inhérente à la logique linéaire. Pourtant, **ILL** est important d'un point de vue sémantique car il marque une étape dans la construction des modèles catégoriques de la logique linéaire (voir le Paragraphe I.2).

I.1.3 Élimination des coupures

L'élimination des coupures est une opération qui consiste à transformer une preuve d'une formule en une autre preuve de cette formule qui n'utilise pas la règle (Cut) et qui a le même contenu logique. La proposition suivante assure que la logique linéaire satisfait l'élimination des coupures.

Proposition I.1. *Pour tout jugement $\vdash \Gamma$, il existe une preuve de $\vdash \Gamma$ si et seulement s'il existe une preuve de $\vdash \Gamma$ sans coupure.*

Démonstration. Le lecteur intéressé trouvera une démonstration dans l'article de synthèse [Mel08a] où la procédure d'élimination des coupures est décrite. $\square$

I.1.4 Codage de la logique intuitionniste

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, la logique linéaire est née d'une étude sémantique de la logique intuitionniste. Dans le modèle étudié par Girard (les espaces de cohérence), l'interprétation de l'implication intuitionniste ($\Rightarrow$) est décomposée en une modalité exponentielle (!) et une implication linéaire ($\multimap$). Cette égalité sémantique peut être transportée dans la syntaxe. Plus précisément, on peut simuler le calcul des séquents de la logique intuitionniste en ajoutant à la logique linéaire l'équivalence logique :

$$A \Rightarrow B \equiv !A \multimap B,$$

Proposition I.2. [Gir87, §IV.5.1] *Toute formule de la logique intuitionniste est prouvable si et seulement si son codage dans la logique linéaire est prouvable.*

I.1.5 Formule de Taylor syntaxique

Dans les travaux sur la sémantique quantitative [Gir88, Ehr02, Ehr05] ce codage est effectué grâce au développement en séries de Taylor. Nous le présenterons dans le cadre des espaces de Lefschetz à la fin du Chapitre III.

Par ailleurs, l'introduction des syntaxes différentielles [ER03, ER06] repose sur une interprétation algorithmique de ce codage via l'isomorphisme de Curry-Howard. Nous allons présenter dans ce paragraphe et il fera l'objet de la seconde partie de la thèse (Chapitres IV et V)

Soit P un programme de type $A \Rightarrow B$. On note $\mathcal{T}(P)$ le programme résultant du codage de P . Intuitivement, le programme $P : A \Rightarrow B$ prend une ressource $x : A$, la place en mémoire et la consulte autant de fois qu'il veut. Le programme $\mathcal{T}(P) : !A \multimap B$ prend en entrée un paquet de type $!A$, c'est-à-dire un ensemble rassemblant des multi-ensembles finis de copies de la ressource. Le programme consulte le paquet une seule fois. À cette occasion, il choisit un multi-ensemble et le place en mémoire. Selon le cardinal n du multi-ensemble, il appelle un programme, noté $\mathcal{T}(P)^{(n)}$, qui va utiliser exactement une fois chacune des occurrences de la ressource contenues dans le multi-ensemble. De la même façon qu'un programme qui utilise exactement une fois sa variable est dit linéaire, le programme $\mathcal{T}(P)^{(n)}$ est dit n -linéaire car il utilise exactement n occurrences de la variable x .

Pour obtenir le programme $T(P)$ à partir du programme P , on utilise la modalité exponentielle. Celle-ci transforme une ressource $x : A$ en un paquet $x^! : !A$ qui regroupe les multi-ensembles de n copies de la ressource x pour n variant parmi les entiers.

Le codage de la logique intuitionniste dans la logique linéaire se traduit syntaxiquement par l'égalité suivante, appelée **formule de Taylor syntaxique** :

$$P(x) = T(P)(x^!) = \sum_{n \in \mathbb{N}} T(P)^{(n)}(x).$$

Dans la sémantique cette formule se traduit par le développement en série de Taylor. Le programme P est modélisé par une fonction analytique et les programmes $T(P)^{(n)}$ par des polynômes homogènes de degré n .

I.2 Sémantique

De manière générale, les catégories permettent de dégager les propriétés communes de certaines constructions afin de factoriser des démonstrations similaires. En informatique, les catégories permettent aussi d'appréhender les propriétés fondamentales de la logique et des langages de programmation, tout en caractérisant leur sémantique.

L'idée des sémantiques catégoriques est d'interpréter les formules par des objets, les preuves par des morphismes et les règles de déduction par des transformations naturelles.

Dans ce paragraphe, nous allons décrire les modèles catégoriques du λ -calcul et de la logique linéaire. L'interprétation d'une formule, d'une preuve ou d'un terme dans un modèle sera notée par les crochets $\llbracket \cdot \rrbracket$.

Définition I.1. On appelle **modèle catégorique** ou **modèle dénotationnel** d'une logique ou d'une syntaxe, une catégorie $\mathcal{C}$ telle que :

- (MC1) Toute formule est représentée par un objet de $\mathcal{C}$.
- (MC2) Pour toute preuve de $\Gamma \vdash s : A$, il existe un morphisme $\llbracket s \rrbracket : \Gamma \rightarrow A$ dans $\mathcal{C}$.
- (MC3) Pour toute preuve de $\Gamma \vdash s : A$ tel que s se réduit en t , on a $\llbracket s \rrbracket = \llbracket t \rrbracket$.

On utilisera parfois les mêmes notations pour les formules de la logique et leurs interprétations. De plus, pour tout modèle catégorique $\mathcal{C}$, s'il existe un isomorphisme dans $\mathcal{C}$ entre l'interprétation d'une formule A et celle d'une formule B , on écrit $A \simeq_{\mathcal{C}} B$. Remarquons pour finir que certaines équivalences logiques² impliquent l'équivalence sémantique pour toute catégorie modèle de la logique concernée.

I.2.1 Modèle catégorique du lambda-calcul

Comme l'ont remarqué Curry, Howard [How80] et Lambek [Lam80], la logique intuitionniste, le λ -calcul simplement typé et les catégories cartésiennes fermées sont trois présentations différentes du même concept. Plus précisément, l'isomorphisme de Curry-Howard associe à

²Plus précisément, ce sont les équivalences logiques qui sont des isomorphismes logiques.

tout terme du λ -calcul simplement typé une unique preuve en déduction naturelle de la logique intuitionniste. D'autre part, toute catégorie cartésienne fermée est un modèle dénotational du λ -calcul dans lequel les types simples sont interprétés par les objets de la catégorie et les λ -termes par ses morphismes.

Nous allons décrire quelques intuitions sur l'axiomatisation catégorique du λ -calcul simplement typé. Le lecteur intéressé par une description plus précise peut se référer à [AC98, §4.3].

Le λ -calcul simplement typé [Kri90] est donné par la **syntaxe** :

$$s, t \in \Lambda \stackrel{\text{def}}{=} x \in \mathcal{V} \mid \lambda x.s \mid (s)t$$

(quotientée par la relation d' α -équivalence) et par le **système de type** :

$$\frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A} \text{ (var)} \quad \frac{\Gamma, x : A \vdash s : B}{\Gamma \vdash \lambda x.s : A \Rightarrow B} \text{ (abs)} \quad \frac{\Gamma \vdash s : A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash r : A}{\Gamma \vdash (s)r : B} \text{ (app)}.$$

Dans une catégorie cartésienne fermée, le produit cartésien $(A \Rightarrow B) \times A$ modélise l'application du λ -calcul et l'exponentiation $A \Rightarrow B$ modélise son abstraction. L'adjonction entre le produit cartésien et l'exponentiation interprète alors l'équivalence logique $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \equiv (A \times B) \Rightarrow C$.

Par exemple, dans la catégorie **Set** des ensembles et fonctions, le type $A \times B$ est interprété par le produit cartésien ensembliste et le type $A \Rightarrow B$ est interprété par l'ensemble des fonctions de l'interprétation de A dans l'interprétation de B .

Enfin, la β -**réduction** est définie par la règle de calcul :

$$(\lambda x.t)s \rightarrow t[s/x]$$

où la substitution $t[s/x]$ de x par s dans t est réalisée en évitant la capture des variables liées (voir [Kri90] pour plus de précisions).

Théorème I.1 (Correction). [LS88] *Toute catégorie cartésienne fermée est un modèle dénotational du λ -calcul simplement typé. Autrement dit, l'interprétation des termes du λ -calcul dans une catégorie cartésienne fermée est un invariant de la réduction.*

Afin de comparer les différents modèles du λ -calcul, les théoriciens des modèles utilisent les relations logiques [Mit90, AC98]. Ces relations ont une formalisation catégorique, le **recollement** (en anglais, «glueing») [LS88, MS93].

Nous étudierons le recollement dans le cadre de ILL au Paragraphe I.2.4 page 24. Nous verrons notamment que le recollement permet de construire de nouveaux modèles catégoriques.

Set est une catégorie de Seely munie d'une exponentielle libre.

- **Structure additive :** **Set** est une catégorie cartésienne avec tous les co-produits finis.
 - * *Produit :* $A \& B$ est le produit cartésien de A et B , les projections sont les fonctions $\pi_A : (a, b) \mapsto a$ et $\pi_B : (a, b) \mapsto b$;
 - * *Objet terminal :* $\top = \{*\}$ est le singleton ;
 - * *Co-produit :* $A \oplus B$ est l'union disjointe de A et B , les plongements sont les fonctions $\iota_A : a \mapsto a$ et $\iota_B : b \mapsto b$;
 - * *Objet initial :* $0 = \emptyset$ est l'ensemble vide.
- **Structure multiplicative :** **Set** est une catégorie monoïdale symétrique close
 - * *Produit tensoriel :* $A \otimes B$ est le produit cartésien des ensembles A et B ;
 - * *Unité :* $1 = \{*\}$ est le singleton ;
 - * *Exponentiation monoïdale :* $A \multimap B$ est l'ensemble des fonctions.
- **Objet dualisant :** **Set** n'admet d'objet dualisant.
- **Structure exponentielle :** **Set** est munie d'une exponentielle :
 - * *Exponentielle :* $!A \stackrel{\text{def}}{=} A$ est dégénérée, c'est le foncteur identité.
 - * *Co-monoïde commutatif :* $e_A = a \mapsto *$, $d_A : a \mapsto (a, a)$.
 - * *Co-monade :* $\epsilon_A = \text{id}_A$ $\delta_A = \text{id}_A$.

FIG. I.2: Interprétation dans **Set** des différentes structures de ILL

I.2.2 Modèle catégorique de la logique linéaire intuitionniste

Historiquement, il existe trois axiomatisations catégoriques de la logique linéaire intuitionniste : les catégories de Seely [See89], les catégories de Lafont [Laf88] et les catégories linéaires [BBPH92]. Ces trois axiomatisations sont *correctes* (toute catégorie vérifiant leurs axiomes est un modèle de la logique linéaire), mais ne sont pas nécessairement *complètes* (par exemple, il existe des modèles de la logique linéaire qui ne satisfont pas la définition de Lafont). Un consensus semble avoir été trouvé autour d'une quatrième axiomatisation, c'est la formulation linéaire-non-linéaire [Ben95]. Chacune des trois axiomatisations historiques se traduit dans ce formalisme (le lecteur intéressé par les différentes axiomatisations et leurs relations pourra consulter l'article de synthèse [Mel08a]).

Intuitions sur le modèle catégorique. Commençons par donner quelques intuitions sur l'axiomatisation catégorique de la logique linéaire. Nous allons illustrer nos propos par des exemples de modèles de différents fragments de la logique linéaire :

Exemple I.1. **Set**, catégorie des ensembles et fonctions, forme un modèle de ILL, nommé **modèle ensembliste**. Les constructions de la logique linéaire dans ce modèle sont résumées dans la Figure I.2 page 14.

Exemple I.2. **Rel**, catégorie des ensembles et relations, forme un modèle de LL.

Le **modèle relationnel** constitue le modèle canonique de LL. Certains modèles dits avec *trames* sont des raffinements du modèle relationnel, comme par exemple le modèle des espaces

Rel est une catégorie de Seely *-autonome munie d'une exponentielle.

- **Structure additive** : **Rel** est une catégorie cartésienne avec tous les co-produits finis.
 - * *Produit* : $A \& B$ est l'union disjointe de A et B , les projections sont données par leur support $\pi_A = \{(a, a) ; a \in A\}$ et $\pi_B = \{(b, b) ; b \in B\}$;
 - * *Objet terminal* : $\top = \emptyset$ est l'ensemble vide ;
 - * *Co-produit* : $A \oplus B$ est l'union disjointe de A et B , les plongements sont donnés par leur support $\iota_A = \{(a, a) ; a \in A\}$ et $\iota_B = \{(b, b) ; b \in B\}$;
 - * *Objet initial* : $0 = \emptyset$ est l'ensemble vide.
- **Structure multiplicative** : **Rel** est une catégorie monoïdale symétrique close
 - * *Produit tensoriel* : $A \otimes B$ est le produit cartésien des ensembles A et B ;
 - * *Unité* : $1 = \{*\}$ est le singleton ;
 - * *Exponentiation monoïdale* : $A \multimap B$ est l'ensemble $A \times B$.
- **Objet dualisant** : **Rel** admet pour objet dualisant le singleton $\perp = \{*\}$. L'isomorphisme $A \rightarrow (A \multimap \perp) \multimap \perp$ est donné par sa trame $\{(a, ((a, *), *)) ; a \in A\}$.
- **Structure exponentielle** : **Rel** est munie d'une exponentielle.
 - * *Exponentielle* : $!A \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}_{\text{fin}}(A)$ est l'exponentielle multi-ensembliste, elle associe à un ensemble A l'ensemble de ses multi-ensembles finis.
 - * *Co-monoïde commutatif* :

$$e_A = \{([], *)\}, \quad d_A = \{(\mu_1 + \mu_2, (\mu_1, \mu_2)) ; \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(A)\}.$$
 - * *Co-monade* :

$$\epsilon_A = \{([a], a) ; a \in A\}, \quad \delta_A = \left\{ \left(\sum_{i \leq n} \mu_i, [\mu_1, \dots, \mu_n] \right) ; \mu_i \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(A) \right\}.$$

FIG. I.3: Interprétation dans **Rel** des différentes structures de LL

cohérents [Gir87] et le modèle des espaces de finitude [Ehr05]. Nous décrivons les différentes structures de ce modèle dans la Figure I.3 page 15.

Étant donnés deux ensembles A et B , une relation $R \in \mathbf{Rel}(A, B)$ est une partie $R \subseteq A \times B$. Une relation est décrite de manière équivalente par la donnée de

- * sa **trame**, c'est-à-dire la partie R de $A \times B$;
- * sa **transposée**, c'est-à-dire ${}^t R \stackrel{\text{def}}{=} \{(b, a) ; (a, b) \in R\} \in \mathbf{Rel}(B, A)$.
- * sa **fonction image** $R \cdot - : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$, définie par

$$\forall u \in \mathcal{P}(A), R \cdot u = \{b ; \exists a \in u, (a, b) \in R\}.$$

- * sa **fonction pré-image**, i.e. ${}^t R \cdot - : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A)$.

Afin de décrire la structure exponentielle du modèle relationnel, nous avons besoin de notations pour les multi-ensembles finis. Étant donné un ensemble A , un **multi-ensemble** fini est une fonction $\mu : A \rightarrow \mathbb{N}$ presque nulle qui à tout élément associe son nombre d'occurrences. Nous utilisons indifféremment les notations $\mu = [a, a, a, b, b, c]$ et $\mu : a \mapsto 3, b \mapsto 2, c \mapsto 1$. L'ensemble des multi-ensembles finis à valeur dans A est noté $\mathcal{M}_{\text{fin}}(A)$. Le cardinal d'un multi-ensemble μ est noté $\#\mu$, il est défini par $\#\mu = \sum_{a \in A} \mu(a)$. L'ensemble des multi-ensembles de cardinal n est noté $\mathcal{M}_{\text{fin}}^n(A)$. Étant donnés deux multi-ensembles μ_1 et μ_2 , l'addition $\mu_1 + \mu_2$

*La catégorie de **LinDF** est une catégorie *-autonome.*

- **Structure additive : LinDF** est une catégorie cartésienne avec tous les co-produits finis.
 - * *Produit* : $A \times B$ est le produit cartésien des espaces A et B ;
 - * *Objet terminal* : $\top = \{0\}$ est l'espace vectoriel réduit au point 0 ;
 - * *Co-produit* : $A \oplus B$ est la somme directe des espaces A et B (elle coïncide avec le produit cartésien) ;
 - * *Objet initial* : $0 = \{0\}$ est l'espace vectoriel réduit au point 0.
- **Structure multiplicative : LinDF** est une catégorie monoïdale symétrique close.
 - * *Produit tensoriel* : $A \otimes B$ est le produit tensoriel des espaces A et B ;
 - * *Unité* : $1 = \mathbb{k}$ est la droite ;
 - * *Exponentiation monoïdale* : $A \multimap B$ est l'ensemble des fonctions linéaires de A dans B .
- **Objet dualisant : LinDF** admet pour objet dualisant l'espace à une dimension $\mathbb{k}$. L'isomorphisme $A \rightarrow (A \multimap \perp) \multimap \perp$ provient de la réflexivité des espaces vectoriels de dimension finie : A est isomorphe à son deuxième dual. Il est donné par l'isomorphisme $x \mapsto (x' \mapsto \langle x', x \rangle)$.

FIG. I.4: Interprétation dans **LinDF** des différentes structures de MALL

désigne l'addition des fonctions, par exemple $[a, b, b] + [a, c] = [a, a, b, b, c]$, son unité est le multi-ensemble vide, noté $[]$.

Exemple I.3. **LinDF**, catégorie des espaces vectoriels de dimension finie et fonctions linéaires, forme un modèle de MALL. Nous donnons les différentes structures de ce modèle dans la Figure I.4. Le **modèle linéaire** permet de concrétiser l'analogie entre l'algèbre linéaire et la logique linéaire. Il est obtenu en enrichissant le modèle relationnel avec une structure d'espaces vectoriels. Ainsi, l'interprétation d'une formule dans **Rel** est un ensemble qui forme une base de l'interprétation de cette formule dans **LinDF**.

Pour chacune des structures de la logique linéaire (voir la Figure I.1 page 9), nous allons maintenant donner une description informelle, puis l'illustrer dans chacun des exemples introduits ci-dessus.

- **Structure additive :** Le connecteur $\&$ correspond au produit et le connecteur $\oplus$ au co-produit. La formule $\top$ est interprétée par l'objet terminal et le 0 par l'objet initial.
 - Dans **Set**, $\&$ est interprété par le produit cartésien, $\oplus$ par l'union disjointe, l'unité $\top$ par le singleton et 0 par l'ensemble vide.
 - Dans **Rel**, $\&$ et $\oplus$ sont interprétés par l'union disjointe et 0 et $\top$ par l'ensemble vide.
 - Dans **LinDF**, $\&$ est interprété par le produit cartésien, $\oplus$ par la somme directe (qui coïncide avec le produit cartésien), l'unité $\top$ et 0 par l'espace réduit à $\{0\}$.
- **Structure multiplicative :** Le connecteur $\otimes$ correspond au produit tensoriel, la formule 1 à son unité et le connecteur $\multimap$ à son exponentiation.
 - Dans **Set**, $\otimes$ est interprété par le produit cartésien et $\multimap$ par les fonctions.
 - Dans **Rel**, $\otimes$ et $\multimap$ sont interprétés par le produit cartésien.

Dans **LinDF**, $\otimes$ est interprété par le produit tensoriel, $\multimap$ par les fonctions linéaires et l'unité par l'espace à une dimension. On retrouve la correspondance entre **Rel** et **LinDF** en considérant le support de la *matrice* canoniquement associée à une *fonction linéaire*.

- **Structure exponentielle** : Le connecteur ! est muni des opérations qui viennent des formules logiques présentées aux Équations (I.3) page 10 et (I.5) page 10. C'est un foncteur qui à tout objet A associe un co-monoïde commutatif $(!A, d_A, e_A)$:

$$d_A : !A \rightarrow !A \otimes !A, \quad e_A : !A \rightarrow 1,$$

et c'est une co-monade :

$$\delta_A : !A \rightarrow !!A, \quad \epsilon_A : !A \rightarrow A.$$

Ces morphismes correspondent aux jugements prouvables que nous avons mis en évidence dans les équations de la page 10.

Dans **Set**, le foncteur identité satisfait les propriétés de l'exponentielle. En ce qui concerne la structure de co-monoïde commutatif, la diagonale $\Delta : x \mapsto (x, x)$ vérifie les propriétés de la duplication et le singleton 1 est l'objet terminal de **Set** : il induit un effacement. Ce modèle est dégénéré sur la partie exponentielle, puisqu'une formule et son exponentielle sont interprétées de la même façon.

Dans **Rel**, la modalité exponentielle est interprétée par le foncteur qui, à un ensemble, associe l'ensemble des multi-ensembles finis sur celui-ci :

$$!A \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}_{\text{fin}}(A).$$

La structure de co-monoïde commutatif est interprétée par :

$$e_A = \{([], 1)\}, \quad d_A = \{(\mu_1 + \mu_2, (\mu_1, \mu_2)) ; \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(A)\}.$$

La structure de co-monade est donnée par :

$$\begin{aligned} \epsilon_A &= \{([a], a) ; a \in A\}, \\ \delta_A &= \left\{ \left(\sum_{i \leq n} \mu_i, [\mu_1, \dots, \mu_n] \right) ; n \in \mathbb{N}, \forall i \leq n, \mu_i \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(A) \right\}, \end{aligned}$$

et le lien entre le monde additif et le monde multiplicatif (voir l'Équivalence (I.3) page 10) par :

$$\begin{aligned} m^2 : ([a_1, \dots, a_p], [b_1, \dots, b_q]) &\leftrightarrow [(1, a_1), \dots, (1, a_p), (2, b_1), \dots, (2, b_q)], \\ m^0 : * &\leftrightarrow []. \end{aligned}$$

Dans **LinDF**, l'exponentielle induite par celle de **Rel** engendre des espaces de dimension infinie (dont la base $\mathcal{M}_{\text{fin}}(A)$ est de cardinal infini) qui ne sont donc pas dans **LinDF**.

Présentation de Seely. Toutes les intuitions que nous venons de donner peuvent être formalisées à travers l’axiomatisation de Seely³ [See89] revue et corrigée [BBPH92].

Définition I.2. [Bie95] Une **catégorie de Seely** est une catégorie symétrique monoïdale close $(\mathcal{C}, \otimes, 1, \multimap)$ munie de produits finis (objet terminal $\top$ et produits binaires $\&$) qui possède

- (S1) une co-monade $(!, \delta, \epsilon)$,
- (S2) deux isomorphismes naturels

$$m_{A,B}^2 : !A \otimes !B \equiv !(A \& B), \quad m^0 : 1 \equiv !\top,$$

tels que l’adjonction entre la catégorie $\mathcal{C}$ et la catégorie de co-Kleisli $\mathcal{C}_!$ définie dans le diagramme suivant soit *monoïdale*⁴.

$$\begin{array}{ccc}
 f : !A \rightarrow B & \xrightarrow{\quad} & \hat{f} : !A \xrightarrow{\delta_A} !!A \xrightarrow{!f} !B \\
 & \searrow F & \\
 \mathcal{C}_! & \xleftrightarrow{\quad \perp \quad} & \mathcal{C} \\
 & \nearrow G & \\
 \tilde{g} : !A \xrightarrow{\epsilon_A} A \xrightarrow{g} B & \xleftarrow{\quad} & g : A \rightarrow B
 \end{array} \tag{I.7}$$

Les objets de la catégorie de **co-Kleisli** $\mathcal{C}_!$ sont les mêmes que les objets de $\mathcal{C}$ et les morphismes sont définis par $\mathcal{C}_!(A, B) = \mathcal{C}(!A, B)$. Remarquons que la catégorie de co-Kleisli d’une catégorie de Seely est cartésienne car la co-monade transporte la structure cartésienne. La catégorie de co-Kleisli forme donc un modèle du λ -calcul et on retrouve, dans le monde de la sémantique catégorique, la décomposition de la logique intuitionniste dans la logique linéaire.

Enfin, la modalité exponentielle est la composée des deux foncteurs adjoints F et G du diagramme (I.7) ci-dessus : pour tout objet A de $\mathcal{C}$, $!A = F \circ G(A)$. Par ailleurs, on peut montrer que pour tout objet A , $!A$ est muni d’une structure de co-monoïde commutatif :

$$\begin{aligned}
 d_A : !A &\xrightarrow{F(\delta)} !(A \& A) \xrightarrow{(m^2)^{-1}} !A \otimes !A, \\
 e_A : !A &\xrightarrow{F(\top)} !\top \xrightarrow{(m^0)^{-1}} 1.
 \end{aligned}$$

Proposition I.3. [BBPH92] Toute catégorie de Seely est un modèle dénotationnel de IMELL.

Présentation linéaire-non-linéaire. Nous allons maintenant présenter le modèle linéaire-non-linéaire qui permet de mieux comprendre le rôle de la modalité exponentielle dans la relation entre monde linéaire et monde non-linéaire de LL.

³les catégories qualifiées ici de Seely sont parfois dites de new-Seely.

⁴Les transformations naturelles unité et co-unité de l’adjonction sont monoïdale, c’est-à-dire qu’elles commutent avec m^2 et m^0 .

Définition I.3. [Ben95] Soient $(\mathcal{M}, \times, e)$ une catégorie cartésienne et $(\mathcal{L}, \otimes, 1)$ une catégorie monoïdale symétrique. Une adjonction **linéaire-non-linéaire** est une adjonction symétrique monoïdale entre deux foncteurs monoïdaux lax⁵ :

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{(L,m)} & \\ (\mathcal{M}, \times, e) & \perp & (\mathcal{L}, \otimes, 1) \\ & \xleftarrow{(M,n)} & \end{array}$$

Intuitivement, $\mathcal{L}$ est la catégorie du monde linéaire et $\mathcal{M}$ est la catégorie du monde non-linéaire où on peut dupliquer et effacer. Le foncteur M transformera une ressource en une ressource non-linéaire, c'est-à-dire qu'on va pouvoir lui appliquer les opérations non-linéaires comme la duplication et l'effacement. Le foncteur L linéarisera la ressource : le résultat ne peut plus être ni effacé ni dupliqué.

La modalité exponentielle est la composée de ces deux foncteurs :

$$! = L \circ M.$$

Souvent, mais pas toujours, dans les exemples de catégories linéaires-non-linéaires, $M = !$ et L est le foncteur qui oublie le droit aux opérations multiplicatives.

Proposition I.4. [Ben95] Toute catégorie linéaire $\mathcal{L}$ issue d'une adjonction linéaire-non-linéaire est un modèle dénotationnel de IMELL.

Proposition I.5. [Bie95] Toute catégorie de Seely engendre une adjonction linéaire-non-linéaire.

Une exponentielle libre ? La modalité exponentielle est un des connecteurs de la logique linéaire dont la sémantique est la plus délicate. C'est pourquoi, une formule pour calculer l'interprétation de l'exponentielle est très recherchée.

Remarquons qu'il peut exister plusieurs interprétations de l'exponentielle pour chaque modèle de la logique linéaire. Théoriquement, on pourrait même avoir tout un éventail d'interprétations de l'exponentielle pour chaque modèle. Parmi elles, il en existe une plus canonique que les autres, c'est l'exponentielle libre. C'est cette dernière interprétation de l'exponentielle qui peut parfois être caractérisée par une formule.

Dans ce paragraphe, nous allons d'abord rappeler la définition de l'exponentielle libre. Ensuite, nous décrirons l'exemple des espaces cohérents et présenterons deux interprétations de l'exponentielle dans ce modèle. Enfin, nous décrirons les caractérisations possibles de l'exponentielle libre.

Tout d'abord, revenons à l'axiomatisation de Lafont [Laf88], dans laquelle la modalité exponentielle est librement engendrée, i.e. l'exponentielle de tout objet A est équipée d'une structure de co-monoïde commutatif libre.

Définition I.4. On dit qu'un co-monoïde commutatif $(!A, d_A, e_A)$ est librement engendré sur A s'il existe un morphisme $\epsilon_A : !A \rightarrow A$ tel que la propriété universelle suivante soit vérifiée :

⁵Un foncteur monoïdal lax est un foncteur qui préserve la structure monoïdale.

Pour tout co-monoïde commutatif (X, d, e) et pour tout morphisme $X \xrightarrow{f} A$, il existe un unique morphisme de co-monoïde commutatif $(X, d, e) \xrightarrow{f^\dagger} (!A, d_A, e_A)$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f^\dagger} & !A \\ & \searrow f & \downarrow \epsilon_A \\ & & A \end{array}$$

Une **catégorie de Lafont** est une catégorie monoïdale symétrique close dans laquelle il existe, pour tout objet A , un co-monoïde commutatif libre $(!A, d_A, e_A)$.

Proposition I.6. [Laf88] *Toute catégorie de Lafont est un modèle dénotationnel de IMELL.*

De nombreux modèles de la logique linéaire sont décrits par cette axiomatisation : le modèle relationnel, les espaces de finitude ou encore les espaces cohérents admettent des exponentielles librement engendrées.

Pourtant rien ne contraint l'exponentielle de la logique linéaire à être libre. D'ailleurs, il existe des modèles de la logique linéaire munis d'une exponentielle qui n'est pas libre.

Prenons l'exemple de la catégorie **Coh** des **espaces cohérents** et des **fonctions linéaires stables**. Par définition, un espace cohérent est un couple formé d'un ensemble, la **trame**, et d'une relation symétrique et réflexive, dite de **cohérence**. Dans ce modèle, toute preuve est interprétée par une clique de la relation de cohérence associée à la formule prouvée. Les morphismes de la catégorie **Coh** sont des fonctions entre les cliques, qui sont croissantes (elles préservent l'ordre d'inclusion des cliques), continues (elles commutent aux unions dirigées) et stables (l'image de l'intersection de deux cliques dont la réunion forme une clique est l'intersection des images des deux cliques). Dans la catégorie **Coh**, deux interprétations de la modalité exponentielle coexistent. L'une est libre l'autre ne l'est pas, mais les deux font de **Coh** un modèle de la logique linéaire. Explicitons ces deux exponentielles. La première modalité est appelée exponentielle ensembliste $!_{\text{Set}}$. Sa trame est formée des cliques finies et sa relation de cohérence relie deux cliques si et seulement si leur union est une clique. Munie de la modalité $!_{\text{Set}}$, **Coh** satisfait l'axiomatisation de Seely. La deuxième modalité, $!_{\text{MSet}}$ est appelée l'exponentielle multi-ensembliste. Sa trame est formée des multi-cliques⁶ et deux multi-cliques sont cohérentes lorsque leur union est une multi-clique. Munie de la modalité $!_{\text{MSet}}$, la catégorie **Coh** vérifie l'axiomatisation de Lafont (en particulier, l'exponentielle est librement engendrée). Comme il ne peut y avoir qu'une seule exponentielle libre, on en déduit que l'exponentielle ensembliste ne vérifie pas l'axiomatisation de Lafont.

Il n'en reste pas moins que l'exponentielle libre se retrouve souvent dans les modèles de la logique linéaire. Ainsi, comprendre son calcul apporte une meilleure compréhension de cette modalité. C'est la question qui a été abordée dans [MTT09] à la suite des travaux de Melliès et Tabareau sur les constructions libres des variantes linéaires des théories algébriques [MT, Tab08].

Afin de mieux comprendre les formules qui permettent de construire l'exponentielle libre, revenons sur les intuitions de la logique linéaire sur l'exponentielle :

⁶Une multi-clique est un multi-ensemble dont le support est une clique

- Une ressource de type A peut-être utilisée une seule fois ;
- Le tenseur permet de faire des copies linéaires des ressources. Ainsi, le type $A \otimes A$ est interprété par l'ensemble des couples de ressources de type A . Plus généralement, $A^{\otimes n}$ regroupe les n -uplets de ressources. En oubliant l'ordre entre les copies, on obtient $(A^{\otimes n} / \sim_n)$ l'ensemble des multi-ensembles constitués de n ressources de type A . Plus précisément, s'il existe, $(A^{\otimes n} / \sim_n)$ est l'égaliseur des symétries :

$$(A^{\otimes n} / \sim_n) \xrightarrow{\text{égaliseur}} A^{\otimes n} \xrightleftharpoons[\text{symétrie}]{\text{symétrie}} A^{\otimes n} ;$$

- L'exponentielle, quant à elle, rassemble des paquets constitués de n ressources de type A pour n parcourant les entiers naturels. Plus précisément,

$$A^\infty \stackrel{\text{def}}{=} \&_{n \in \mathbb{N}} (A^{\otimes n} / \sim_n) ,$$

Le $\&$ est la notation de la logique linéaire pour le produit. On peut aussi voir A^∞ comme la limite du diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{c} & & A^\infty & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ 1 & & A & & (A^{\otimes 2} / \sim_2) & \dots & (A^{\otimes n} / \sim_n) & \dots \end{array} \quad (\text{I.8})$$

Cependant, pour que la limite calculée dans le Diagramme (I.8) soit le co-monoïde commutatif libre, on doit supposer que le morphisme canonique :

$$X \otimes \&_{n \in \mathbb{N}} (A^{\otimes n} / \sim_n) \rightarrow \&_{n \in \mathbb{N}} (X \otimes (A^{\otimes n} / \sim_n))$$

est un isomorphisme. Autrement dit, la limite **commute au tenseur**.

Les espaces cohérents forment un modèle de la logique linéaire dont la modalité exponentielle (celle des multicliques) est libre mais n'est pas obtenue en calculant la limite du diagramme I.8 [MTT09]. Une des raisons réside dans le fait que le $\&$ juxtapose les différentes couches $(A^{\otimes n} / \sim_n)$ (pour n parcourant les entiers) sans les relier entre elles. Il faut donc raffiner cette formule.

En s'inspirant de leurs travaux sur les constructions libres, Melliès et Tabareau ont proposé d'ajouter un *point* qui va jeter un pont entre les différentes couches. Intuitivement, l'objet co-pointé libre $A_\bullet$ sur A est le plus petit objet contenant A et admettant un morphisme $A_\bullet \rightarrow 1$. Ce morphisme va permettre de relier les différentes couches $A^{\otimes n}$ construites à partir de l'objet pointé. Par exemple, pour la couche 2, on va avoir deux morphismes $A_\bullet \otimes A_\bullet \rightarrow A_\bullet \otimes 1 \simeq A_\bullet$ et $A_\bullet \otimes A_\bullet \rightarrow 1 \otimes A_\bullet \simeq A_\bullet$ qui sont égalisés lorsque l'on considère la symétrie.

Voici les étapes de leur construction :

- À partir de l'objet A , on construit l'objet librement co-pointé $A_\bullet \stackrel{\text{def}}{=} 1 \& A$.

Dans les espaces cohérents, la trame de $A_\bullet$ est égale à la trame de A plus un point. Les

cliques de $A_\bullet$ sont les parties qui forment une clique de A lorsqu'elles sont intersectées avec la trame de A . À un isomorphisme près qui transforme $*$ en la clique vide, on peut voir $A_\bullet$ comme l'espace des multi-cliques sur A à au plus un élément (deux multi-cliques sont cohérentes lorsque l'union de leur support est une clique).

- Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on construit la couche $A^{\leq n} \stackrel{\text{def}}{=} (A_\bullet^{\otimes n} / \sim_n)$ de rang n contenant des paquets non-ordonnés de n ressources dans $A_\bullet$. Intuitivement la couche $A^{\leq n}$ correspond à toutes les couches A^k pour k variant de 0 à n . Plus précisément et s'il existe, $A^{\leq n}$ est l'égaliseur des symétries :

$$A^{\leq n} \xrightarrow{\text{égaliseur}} A_\bullet^{\otimes n} \xrightleftharpoons[\text{symétrie}]{\text{symétrie}} A_\bullet^{\otimes n}.$$

Dans les espaces cohérents, la trame de $A_\bullet^{\otimes n}$ est l'ensemble des n -uplets d'éléments de A ou de $\{*\}$ et n -uplets sont cohérents si leurs éléments sont cohérents deux à deux (avec $*$ cohérent avec tous les éléments de A). Modulo un isomorphisme, l'égaliseur des symétries est l'espace cohérent des multi-cliques de A d'au plus n -éléments.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme $A_\bullet \rightarrow 1$ induit $n + 1$ morphismes $A_\bullet^{\otimes(n+1)} \rightarrow A_\bullet^{\otimes n}$ qui induisent un morphisme entre les égaliseurs $A^{\leq(n+1)} \rightarrow A^{\leq n}$.

$$\begin{array}{ccccc} A^{\leq(n+1)} & \xrightarrow{\text{égaliseur}} & A_\bullet^{\otimes(n+1)} & \xrightleftharpoons[\text{symétrie}]{\text{symétrie}} & A_\bullet^{\otimes(n+1)} \\ \downarrow & & \downarrow \dots \downarrow & & \downarrow \dots \downarrow \\ A^{\leq n} & \xrightarrow{\text{égaliseur}} & A_\bullet^{\otimes n} & \xrightleftharpoons[\text{symétrie}]{\text{symétrie}} & A_\bullet^{\otimes n} \end{array}$$

Enfin, $A^{\leq \infty}$ est la limite du diagramme séquentiel dessiné ci-dessous :

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} A^{\leq \infty} \xrightarrow{\quad} \\ \swarrow \quad \searrow \quad \searrow \quad \searrow \quad \searrow \\ 1 \longleftarrow A^{\leq 1} \longleftarrow A^{\leq 2} \longleftarrow \dots \longleftarrow A^{\leq n} \longleftarrow \dots \end{array} \quad (\text{I.9})$$

Remarquons que la construction que nous venons de décrire a été discutée par Barr dans [Bar91, §11] sous une autre forme. Elle correspond en effet au point fixe de la fonction Φ définie par

$$\Phi(X) \stackrel{\text{def}}{=} 1 \& (A \otimes X),$$

où l'on suppose le tenseur commutatif. En prenant les images successives de l'objet initial dans une catégorie symétrique monoïdale avec co-produits, on va obtenir

$$\begin{aligned} A^{\leq 0} &= 1 \\ A^{\leq 1} &= 1 \& A \\ &\dots \\ A^{\leq n} &= \Phi(A^{\leq n-1}) = 1 \& A \& \dots \& A^{n-1}. \end{aligned}$$

1 et $\perp$ de la logique linéaire sont interprétées par le singleton, le modèle relationnel vérifie la règle (Mix_0) .

LinDF admet pour objet dualisant le corps $\perp = \mathbb{k}$. La catégorie **LinDF** est une catégorie $*$ -autonome. Comme l'interprétation de la formule 1 est aussi $\mathbb{k}$, la règle (Mix_0) est vérifiée.

I.2.4 Recollement de modèles de la logique linéaire

Le recollement, introduit dans le cadre du λ -calcul, peut être adapté à la logique linéaire. Dans [HS03], Hyland et Schalk présentent cette technique dans le cadre des modèles linéaires de la logique linéaire. Comme les catégories de Seely sont des modèles linéaires [Bie95], nous présentons leurs résultats dans ce cadre. Dans la Section I.3.3, nous retrouverons une généralisation du recollement qui permet de formaliser les relations d'orthogonalité.

L'idée du recollement est d'utiliser des foncteurs pour relier différents modèles de la logique linéaire. La comparaison doit commuter avec les opérateurs de la logique linéaire afin d'**préserver la structure**. Ainsi, on considère un foncteur qui préserve la structure de monoïde (un foncteur monoïdal lax) et qui admet une loi de distributivité⁷ sur les monades exponentielles.

Définition I.6 (Distribution linéaire). [HS03] Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux modèles catégoriques de la logique linéaire. Un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est dit **linéairement distributif** sur la co-monoïde exponentielle lorsque :

- $(F, m_I, m_{C, C'})$ est monoïdal ;
- F est muni d'une **loi de distributivité**, c'est-à-dire une transformation naturelle $\kappa : !F \rightarrow F!$ préservant la structure de co-monoïde commutatif, i.e. les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc}
 I & \xleftarrow{e_{F(C)}} & !F(C) \\
 m_I \downarrow & & \downarrow \kappa_C \\
 F(I) & \xleftarrow{F(e_C)} & F(!C)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 !F(C) & \xrightarrow{d_{F(C)}} & !F(C) \otimes !F(C) \\
 \kappa_C \downarrow & & \downarrow \kappa_C \otimes \kappa_C \\
 F(!C) & \xrightarrow{F(d_C)} & F(!C \otimes !C)
 \end{array}$$

En recollant deux modèles de la logique linéaire, reliés par un foncteur monoïdal linéairement distributif, on va construire un nouveau modèle de la logique linéaire. Beaucoup de modèles du folklore peuvent ainsi être obtenus [Has99].

Définition I.7. [HS03] Étant données deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ et un foncteur $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$, la catégorie **recollée** $\mathcal{G}(L)$ est définie par

- ses *objets* : les triplets $(R, U, U \rightarrow L(R))$ où $R \in \text{obj}(\mathcal{C})$, $U \in \text{obj}(\mathcal{E})$ et $U \rightarrow L(R) \in \mathcal{E}(U, L(R))$ est un morphisme de $\mathcal{E}$,

⁷Pour plus de détails sur les lois de distributivité en théorie des catégories, on peut se référer à [Bec69] ou à [Str72].

- ses *morphismes* : les couples (ϕ, f) de morphismes $\phi \in \mathcal{E}(U, V)$ et $f \in \mathcal{C}(R, S)$ tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & L(R) \\ \phi \downarrow & & \downarrow L(f) \\ V & \longrightarrow & L(S) \end{array}$$

En notant $\mathcal{U}_C$ (resp. $\mathcal{U}_E$) le foncteur d'oubli de la catégorie recollée dans $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{E}$), on obtient le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{G}(L) & \\ \mathcal{U}_C \downarrow & \searrow \mathcal{U}_E & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{L} & \mathcal{E} \\ R & & U \end{array}$$

Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ sont deux modèles de IMELL, la proposition suivante donne des conditions suffisantes sur les catégories $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}$ et le foncteur L pour que la catégorie recollée $\mathcal{G}(L)$ soit aussi un modèle de IMELL.

Proposition I.9. [HS03] Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ deux catégories de Seely munies des co-produits finis. Supposons que

- $\mathcal{E}$ a les produits fibrés,
- il existe un foncteur monoïdal lax $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ et
- il existe une distribution $\kappa : !_E L \rightarrow L!_C$ linéaire.

Alors $\mathcal{G}(L)$ est une catégorie symétrique monoïdale fermée, avec les produits, co-produits et une exponentielle. De plus, les foncteurs d'oubli $\mathcal{U}_C$ et $\mathcal{U}_E$ préservent ces différentes structures.

I.3 Orthogonalité

L'objet de ce paragraphe est de montrer comment, en sémantique, on utilise des relations d'orthogonalité mathématiques et informatiques pour produire des modèles de la logique linéaire qui possèdent la propriété de *dualité* parfois appelée propriété de *réflexivité*.

En logique linéaire, la réflexivité (involution de la négation $A^{\perp\perp} \equiv A$) est une propriété importante.

Avec la définition de l'implication linéaire $\multimap$, elles impliquent une équivalence logique entre une formule $A \multimap B$ et sa contraposée $B^\perp \multimap A^\perp$ (voir le Paragraphe 1.1.2 page 8). Ainsi, la coupure entre une preuve de $\vdash A \multimap B$ et une preuve de $\vdash B \multimap C$ peut être vue comme une coupure entre une preuve de $\vdash B^\perp \multimap A^\perp$ et une preuve de $\vdash C^\perp \multimap B^\perp$.

Grâce à l'isomorphisme de Curry-Howard, nous pouvons transposer ces propriétés dans les langages de programmation. Un environnement et un programme sont compatibles si l'environnement fournit au programme des données du bon type. Par exemple, un environnement de type $A \multimap B$ peut interagir avec un programme de type $B \multimap C$. D'après l'équivalence logique décrite ci-dessus, le rôle des programmes et des environnements est interchangeable.

Dans la logique linéaire, la négation $(-)^{\perp}$ correspond à une relation d'orthogonalité. On dit qu'une preuve π de $\vdash \Gamma, A$ et une preuve π' de $\vdash A^{\perp}, \Delta$ sont orthogonales si l'élimination de leur coupure termine.

Dans les langages de programmation, cette relation d'orthogonalité se traduit de la manière suivante : «un programme et un environnement sont orthogonaux si leur interaction termine sans produire d'erreur.» La réflexivité syntaxique s'interprète par bi-orthogonalité. Ceci signifie que : «pour tout programme, l'interaction avec n'importe quel environnement compatible termine et ne produit pas d'erreur. Réciproquement, pour tout environnement, l'interaction avec n'importe quel programme compatible termine et ne produit pas d'erreurs.»

Dans ce paragraphe, nous commençons par définir les concepts liés à l'orthogonalité. Ensuite, nous illustrons le point de vue de la logique linéaire par des exemples. Enfin, nous présentons la formalisation catégorique de l'orthogonalité par bi-recollement.

I.3.1 Principe

Commençons par quelques rappels sur les opérateurs de clôture [Bir67, Ch. IV].

Opérateurs de clôture. Soit A un ensemble. Un **opérateur de clôture** sur les parties $\mathcal{P}(A)$ de A est une opération $x \rightarrow \bar{x}$

(C1) extensive, i.e. $x \subseteq \bar{x}$,

(C2) idempotente, i.e. $\bar{x} = \bar{\bar{x}}$,

(C3) croissante, i.e. $x \subseteq y \Rightarrow \bar{x} \subseteq \bar{y}$.

Les ensembles **clos** vis-à-vis d'un opérateur de clôture sont ses points fixes. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties closes de cet opérateur, i.e. $\mathcal{C} = \{x \in \mathcal{P}(A) ; \bar{x} = x\}$.

Remarquons que l'image $\bar{x}$ d'une partie x par l'opérateur de clôture est la plus petite partie close contenant x .

Exemple I.4. Dans un espace topologique, la fermeture topologique est un opérateur de clôture.

Proposition I.10 (Moore). *L'ensemble des parties closes par rapport à un opérateur de clôture forme un treillis complet $(\mathcal{C}, \cap, \vee)$ dans lequel la borne inférieure est l'intersection et la borne supérieure d'une famille $(x_i)_{i \in I}$ de parties est l'image par l'opérateur de clôture de l'union, i.e. $\bigvee_{i \in I} x_i = \overline{\bigcup_{i \in I} x_i}$.*

Pôles et orthogonaux. Soit $\perp$ une relation entre deux ensembles A et B , que l'on appellera **relation d'orthogonalité**. Étant données deux parties $x \in \mathcal{P}(A)$ et $y \in \mathcal{P}(B)$, l'orthogonal à droite de x et l'orthogonal à gauche de y par $\perp$ sont définis par

$$\begin{aligned} x^{\perp} &\stackrel{\text{def}}{=} \{b \in B ; \forall a \in x, a \perp b\}, \\ {}^{\perp}y &\stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A ; \forall b \in y, a \perp b\}. \end{aligned}$$

Les propriétés suivantes sont toujours vérifiées par les orthogonaux

(1) pour tous $x_1, x_2 \subseteq A$, si $x_1 \subseteq x_2$ alors $x_1^{\perp} \supseteq x_2^{\perp}$,

- (2) pour tous $y_1, y_2 \subseteq B$, si $y_1 \subseteq y_2$ alors ${}^\perp y_1 \supseteq {}^\perp y_2$,
- (3) pour tous $x \subseteq A$ et $y \subseteq B$, $x \subseteq {}^\perp(x^\perp)$ et $y \subseteq ({}^\perp y)^\perp$.

Les opérations $x \rightarrow {}^\perp(x^\perp)$ et $y \rightarrow ({}^\perp y)^\perp$ sont des opérateurs de clôture sur les parties de A et de B . De plus, les opérations $x \rightarrow x^\perp$ et $y \rightarrow {}^\perp y$ sont des bijections duales entre les ensembles des parties *closes* de A et de B .

Notation I.8. Lorsque $A = B$ et que la relation $\perp$ est symétrique, on note de la même façon $x^\perp$ les orthogonaux à droite ou à gauche d'une partie x de A . Les sous-ensembles x de A clos par l'opérateur de clôture $x \mapsto x^{\perp\perp}$ sont dits **clos par bi-orthogonalité**.

L'exemple suivant montre que dans le cadre des espaces topologiques, les bornés et les ouverts sont des notions orthogonales. Nous nous plaçons dans le cadre des espaces vectoriels car dans le Chapitre III page 128, nous allons généraliser cette dualité dans le cadre des espaces de Lefschetz. Par ailleurs, le lecteur intéressé par plus de détails peut consulter [Jar81, HN77, FK88].

Exemple I.5. Dans un espace vectoriel normé, $(E, \|\cdot\|)$, une partie B est dite bornée lorsqu'elle est bornée en norme, c'est-à-dire qu'il existe un réel M tel que B soit incluse dans la boule centrée en 0 et de rayon M .

Plaçons nous dans le contexte plus général d'un espace vectoriel topologique E sur un corps $\mathbb{k}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient U et B deux parties de E . On dit que U **absorbe** B lorsqu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\alpha B \subseteq U$. En généralisant le cas normé où une partie est bornée si et seulement si elle est absorbée par la boule unité qui engendre la topologie, on dit qu'une partie B d'un espace vectoriel topologique est bornée lorsqu'elle est absorbée par tous les voisinages de 0.

De la relation d'absorption on déduit une relation d'orthogonalité qui permet de relier **topologies**⁸ et **bornologies**⁹ sur les espaces vectoriels. Elle est définie sur les parties U et B d'un espace vectoriel E par :

$$U \perp_{\text{abs}} B \iff \exists \alpha > 0 ; \alpha B \subseteq U.$$

Tout espace vectoriel topologique E peut être muni d'une bornologie. Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des voisinages de 0 de E . La bornologie $\mathcal{B}$ est l'orthogonal de $\mathcal{V}$. Autrement dit, une partie est bornée si et seulement si elle est absorbée par tous les ouverts :

$$\mathcal{B} = \mathcal{V}^{\perp_{\text{abs}}} = \{B \subseteq E ; \forall U \in \mathcal{V}, \exists \alpha > 0, \alpha B \subseteq U\}.$$

De façon duale, de toute bornologie vectorielle¹⁰, on peut déduire une topologie définie par orthogonalité. Dans celle-ci, un ouvert est un **bornivore**, c'est-à-dire un ensemble qui absorbe

⁸La topologie d'un espace vectoriel topologique est compatible avec la structure d'espace vectoriel, i.e. l'addition et la multiplication scalaires sont continues. Ainsi, il suffit de connaître les voisinages de zéro pour en déduire par translation une topologie sur tout l'espace vectoriel.

⁹Une bornologie [HN77, p 18] sur un ensemble X est une famille $\mathcal{B}$ de parties contenant les singletons ($\forall x \in X, \{x\} \in \mathcal{B}$), stable par sous-ensemble ($B \subseteq B' \text{ et } B' \in \mathcal{B} \Rightarrow B \in \mathcal{B}$) et par union finie ($B, B' \in \mathcal{B} \Rightarrow B \cup B' \in \mathcal{B}$).

¹⁰Sur un espace vectoriel, on demande de plus que la bornologie soit compatible avec la structure d'espace vectoriel, i.e. l'addition et la multiplication scalaire envoient les bornés sur les bornés. Une bornologie vectorielle [HN77, p 19] sur un espace vectoriel E est donc une bornologie sur E stable par somme ($B, B' \in \mathcal{B} \Rightarrow B + B' \in \mathcal{B}$) et par dilatation ($B \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{|t| \leq 1} t \cdot B \in \mathcal{B}$).

tous les bornés :

$$\mathcal{V} = {}^{\perp_{\text{abs}}} \mathcal{B} = \{U \subseteq E ; \forall B \in \mathcal{B}, \exists \alpha > 0, \alpha B \subseteq U\}.$$

Enfin, on dit qu'un espace est **topologico-bornologique** lorsqu'il est muni d'une topologie $\mathcal{V}$ telle que ${}^{\perp_{\text{abs}}}(\mathcal{V}^{\perp_{\text{abs}}}) = \mathcal{V}$.

Définition I.9. Une **relation de polarité** sur A et B est une relation d'orthogonalité définie par une fonction d'appariement $r : A \times B \rightarrow K$ et une partie $F \subseteq K$. L'orthogonalité est alors donnée par

$$\forall a \in A, b \in B, a \perp b \iff r(a, b) \in F.$$

On appelle l'ensemble F un **pôle**.

Exemple I.6. Commençons par un exemple issu de la géométrie. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits orthogonaux lorsque $\langle x, y \rangle = 0$. L'orthogonalité entre les vecteurs de E induit une relation de polarité sur les parties u, v de E

$$u \perp v \iff \forall x \in u, \forall y \in v, \langle x, y \rangle = 0.$$

On peut aussi définir une relation de polarité entre E et son dual E^* . La *polaire* d'une partie A de E est la partie de E^* définie par

$$A^\bullet \stackrel{\text{def}}{=} \{y^* \in E^* ; \forall x \in A, |\langle y^*, x \rangle| \leq 1\}.$$

Exemple I.7. Voici un autre exemple cette fois issu de la théorie de la preuve : les candidats de réductibilité. Il illustre l'interaction entre preuves de A et contre-preuves de A (une contre-preuve de A est une preuve de $A^\perp$).

Il existe pour la logique linéaire un analogue [Gir06] des *candidats de réductibilité* de Tait [Tai67]. Soient l'ensemble **fn** des preuves fortement normalisables. On considère la fonction binaire définie par la coupure $\langle \pi, \pi' \rangle$ entre les preuves $\pi \vdash \Gamma, A$ et $\pi' \vdash A^\perp, \Delta$. On définit alors une relation de polarité entre l'ensemble des preuves contextuelles de A , i.e. de la forme $\pi \vdash \Gamma, A$, et les preuves contextuelles de son orthogonal $A^\perp$, i.e. de la forme $\pi \vdash A^\perp, \Delta$

$$\pi \perp_{\text{CR}} \pi' \iff \langle \pi, \pi' \rangle \in \mathbf{fn}.$$

Un candidat de réductibilité $\mathcal{A}$ est alors un ensemble de preuves contextuelles de A qui est clos par bi-polaire et tel que l'axiome $\vdash A, A^\perp$ appartienne à la fois à $\mathcal{A}$ et $A^\perp$.

On peut alors utiliser cette notion pour montrer la normalisation du calcul des séquents de la logique linéaire, quotienté par des isomorphismes de preuves afin qu'il vérifie la propriété de Church-Rosser [Gir87].

I.3.2 Exemples issus de la logique linéaire

En logique linéaire, la construction par bi-orthogonal est souvent utilisée pour construire des modèles qui vérifient la réflexivité, i.e. $A^{\perp\perp} = A$. Le principe illustré dans les paragraphes ci-dessous est le suivant :

1. Une formule A est interprétée par un espace, c'est-à-dire un couple $(|A|, \mathcal{C}(A))$ où la **trame** $|A|$ est un ensemble dénombrable et où $\mathcal{C}(A)$ est une partie de $\mathcal{P}(|A|)$ close par bi-orthogonal pour une certaine relation d'orthogonalité $\perp$ sur les parties de $|A|$. On utilise la même notation pour la formule A et l'espace A qui lui correspond.
2. Une preuve d'une formule A est interprétée par un élément de $\mathcal{C}(A)$, c'est-à-dire une partie de $|A|$.
3. Les constructions de la logique linéaire sont définies en considérant le bi-orthogonal de constructions élémentaires. Toute l'astuce réside alors dans la caractérisation de ces constructions. Cette caractérisation permet de montrer aisément les propriétés que doivent vérifier les modèles.

Les exemples qui suivent sont issus du folklore de la logique linéaire et illustrent ce principe. Il est à noter que les espaces de finitude [Ehr05], qui font l'objet du Chapitre II, obéissent à cette même méthode.

Espaces de phase. Soient $(\mathcal{M}, \cdot, 1)$ un monoïde commutatif et $\perp_{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}$ une partie appelée pôle. Étant donnés deux sous-ensembles X et Y de $\mathcal{M}$, on note $X \cdot Y = \{x \cdot y ; x \in X, y \in Y\}$. On définit alors la relation d'orthogonalité sur les parties $X, Y \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ par

$$X \perp_{\text{pha}} Y \iff X \cdot Y \subseteq \perp_{\mathcal{M}}.$$

Un **fait** est un sous-ensemble de $\mathcal{M}$, clos par bi-orthogonal.

Les constructions de la logique linéaire sont alors définies de la façon suivante

$$\begin{array}{llll} X \otimes Y & \stackrel{\text{def}}{=} & (X \cdot Y)^{\perp\perp}, & X \& Y & \stackrel{\text{def}}{=} & X \cap Y, \\ X \wp Y & \stackrel{\text{def}}{=} & (X^{\perp} \cdot Y^{\perp})^{\perp}, & X \oplus Y & \stackrel{\text{def}}{=} & (X \cup Y)^{\perp\perp}, \\ 1 & \stackrel{\text{def}}{=} & \{1\}^{\perp\perp}, & \top & \stackrel{\text{def}}{=} & \mathcal{M}, \\ \perp & \stackrel{\text{def}}{=} & \{1\}^{\perp}, & 0 & \stackrel{\text{def}}{=} & \emptyset^{\perp\perp}, \\ \\ !X & \stackrel{\text{def}}{=} & (X \cap I \cap 1)^{\perp\perp}, & & & \\ ?X & \stackrel{\text{def}}{=} & (X^{\perp} \cap I \cap 1)^{\perp}, & & & \end{array}$$

où I est l'ensemble¹¹ des idempotents de $\mathcal{M}$, i.e. $I = \{x ; x \cdot x = x\}$.

Espaces cohérents. Un espace cohérent A est traditionnellement décrit par un ensemble dénombrable $|A|$, sa *trame*, et par une relation binaire $\supset$ symétrique et réflexive sur la trame, sa *relation de cohérence*. Les formules de la logique linéaire sont interprétées par un espace cohérent et les preuves d'une formule par les cliques de la relation de cohérence associée à cette formule.

Cependant, il existe une autre formalisation des espaces cohérents en passant par l'orthogonalité [Gir06]. Commençons par remarquer que les cliques d'un espace de cohérence $(|A|, \supset)$

¹¹On peut aussi choisir pour I un monoïde inclus dans les idempotents.

s'intersectent en au plus un point avec les cliques de son orthogonal $(|A|, \asymp)$ car ces dernières sont les anti-cliques de $\subset$. On peut alors définir la relation d'orthogonalité entre deux parties c et c' de la trame $|A|$ à l'aide du cardinal $\sharp(c \cap c')$ de leur intersection :

$$c \perp_{\text{coh}} c' \iff \sharp(c \cap c') \leq 1.$$

Un espace cohérent est alors la donnée d'une *trame* et d'un ensemble de cliques clos par bi-orthogonalité vis-à-vis de $\perp_{\text{coh}}$.

Cette relation d'orthogonalité décrit une interaction *déterministe* : un programme possède au plus une possibilité d'interagir avec une donnée.

Espaces de cohérence-totalité. La notion de totalité, introduite dans la sémantique dénotationnelle par Girard [Gir86], permet d'interpréter les preuves de façon plus précise. Loader [Loa94] a utilisé la totalité pour obtenir un résultat de complétude pour MLL + (Mix). La totalité de Girard-Loader peut aussi être décrite par orthogonalité en modifiant la relation d'orthogonalité cohérente. La relation d'orthogonalité totale entre deux parties u et u' de la trame $|A|$ est définie par l'équivalence :

$$u \perp_{\text{tot}} u' \iff \sharp(u \cap u') = 1.$$

Un espace de cohérence-totalité¹² est alors la donnée d'une trame et d'un ensemble de parties dites totales qui est clos par bi-orthogonalité vis à vis de $\perp_{\text{tot}}$. Remarquons que l'orthogonalité totale décrit une interaction *totale* (elle termine et ne produit pas d'erreur) et *déterministe* (elle produit au plus un résultat) entre les données et les programmes. En effet, toute donnée u doit pouvoir interagir avec tout programme u' , de plus une seule interaction est possible.

I.3.3 Formalisation via le bi-recollement

À la suite de la thèse de Tan [Tan97], Hyland et Schalk [HS03] ont donné une description catégorique des relations d'orthogonalité dans le cadre des modèles de la logique linéaire. Ce paragraphe résume leur travail et explicite notamment des théorèmes assurant qu'une relation d'orthogonalité engendre un modèle de la logique linéaire. Nous utiliserons ces théorèmes dans les Chapitres II et IV.

Avant de décrire le bi-recollement, commençons par l'illustrer par des exemples concrets issus de la topologie et du calcul différentiel.

Le premier exemple est la notion de paire duale en topologie [Mac43]. Une paire duale est un couple (E, E') d'espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{k}$ muni d'une forme bilinéaire symétrique $E' \times E \rightarrow \mathbb{k}$, appelée *appariement*, qui vérifie la propriété de séparation :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \exists x' \in E' ; \langle x', x \rangle &\neq 0 \\ \forall x' \in E', \exists x \in E ; \langle x', x \rangle &\neq 0 \end{aligned}$$

¹²Les conditions supplémentaires que l'on trouve dans [Loa94] ne sont pas essentielles ici.

Deux éléments $x \in E$ et $x' \in E'$ sont dits orthogonaux lorsque $\langle x', x \rangle = 0$. L'annulateur d'une partie D de E est l'orthogonal de D :

$$\text{ann}_{E'} D = \{x' \in E' ; \forall x \in D, \langle x', x \rangle = 0\} = {}^\perp D.$$

Le noyau d'une partie D' de E' est l'orthogonal de D' :

$$\ker_E D' = \{x \in E ; \forall x' \in D', \langle x', x \rangle = 0\} = D'^\perp.$$

Par ailleurs, la fonction d'appariement généralise la relation de dualité entre un espace vectoriel topologique E et son dual topologique E' . En effet, grâce au théorème de Hahn-Banach, deux espaces vectoriels topologique localement convexes forment une paire duale. Il en est de même des espace de Lefschetz étudiés dans le Chapitre III.

Réciproquement, étant donnée une paire duale (E, E') , on peut se servir de la fonction d'appariement pour construire une topologie sur E . On assimile les éléments de E' à des formes linéaires sur E via la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On construit alors la topologie la moins fine sur E pour laquelle les éléments de E' sont des formes linéaires continues. C'est la topologie engendrée par les images réciproques (par les formes linéaires dans E') des voisinages de zéro du corps $\mathbb{k}$. On a ainsi obtenu la topologie la plus grossière sur E telle que le dual topologique de E contienne E' .

Étant donné un ensemble K , la catégorie $\mathbf{Chu}_K$ des espaces de Chu généralise la notion de paire duale. Les objets de cette catégorie sont des couples (A, X) d'ensembles munis d'une fonction d'appariement $r : A \times X \rightarrow K$. Les morphismes de $[(A, X), r] \rightarrow [(B, Y), s]$ sont des couples (f, g) de fonctions $f : A \rightarrow B$ et $g : Y \rightarrow X$ qui respectent les fonctions d'appariement r et s , i.e. $\forall a \in A, b \in B, s(f(a), g(b)) = r(a, g(b))$. Cette catégorie peut-être munie de constructions qui en font un modèle de la logique linéaire.

Comme les paires duales, la catégorie de Chu peut être décrite via le bi-recollement de Hyland et Schalk.

Enfin, comme l'ont remarqué Blute et Ehrhard (communication privée), la théorie des espaces commodes (en anglais «convenient spaces») [FK88] préfigure le bi-recollement. Frölicher et Kriegl ont en effet abordé le calcul différentiel avec des outils similaires, avant que le bi-recollement ne soit introduit. Les deux exemples qui suivent sont tirés de leur livre. Ils réapparaîtront dans les espaces de Lefschetz lorsque nous définirons la catégorie des *espaces bornologiques*, candidate pour être un modèle de la logique linéaire (voir le paragraphe III.3.1.d page 128). De plus, ces exemples fournissent des intuitions préparant à la formalisation catégorique qui va suivre.

Commençons par un exemple tiré de l'analyse différentielle. On note $\mathbb{R}$ le corps des réels et $\mathbf{Ban}$ la catégorie des espaces de Banach et fonctions continues. La notion de fonction lisse (c'est-à-dire infiniment dérivable) entre deux espaces de Banach E et F dépend essentiellement de deux choses :

- du dual des deux espaces, i.e. $\mathbf{Ban}(E, \mathbb{R})$ et $\mathbf{Ban}(F, \mathbb{R})$,
- des fonctions lisses de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

En effet, d'après le théorème suivant, il suffit de connaître la différentiabilité des fonctions réelles lisses pour en déduire la notion de différentiabilité des morphismes de $\mathbf{Ban}$.

Proposition I.11. [*Bom67*] Soient E et F des espaces de Banach.

- $c : \mathbb{R} \rightarrow E$ est une courbe lisse si et seulement si pour toute forme linéaire continue $l \in E'$ la composition $l \circ c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est lisse.
- $g : E \rightarrow F$ est lisse si et seulement si pour toute courbe lisse $c : \mathbb{R} \rightarrow E$, $g \circ c : \mathbb{R} \rightarrow F$ est une courbe lisse.

Pour comprendre cette généralisation de la notion de fonction lisse, nous allons utiliser une relation de polarité. Notons $\mathcal{M} \subseteq \mathbf{Ban}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles lisses. Une courbe $c \in \mathbf{Ban}(\mathbb{R}, E)$ et une fonctionnelle $\phi \in \mathbf{Ban}(E, \mathbb{R})$ sont orthogonales si et seulement si leur composée est infiniment dérivable, autrement dit :

$$c \perp_{\infty} f \iff f \circ c \in \mathcal{M}.$$

D'après la Proposition I.11 précédente, l'ensemble des courbes lisses $\mathcal{C} \subseteq \mathbf{Ban}(\mathbb{R}, E)$ et des fonctionnelles lisses $\mathcal{F} \subseteq \mathbf{Ban}(E, \mathbb{R})$ sur E vérifient :

$$\mathcal{C} = {}^{\perp_{\infty}} E', \quad \mathcal{F} = \mathcal{C}^{\perp_{\infty}}, \quad \text{d'où} \quad \mathcal{C} = {}^{\perp_{\infty}} \mathcal{F}.$$

En fait, nous avons transporté la structure différentielle des fonctions réelles à tous les espaces de Banach grâce au bi-recollement le long des courbes $\mathbf{Ban}(\mathbb{R}, -)$ et des fonctions lisses $\mathbf{Ban}(-, \mathbb{R})$.

Les bornés font l'objet du deuxième exemple. Comme nous l'avons vu à l'Exemple I.5 page 27, la notion de parties bornées peut être généralisée et on peut munir tout espace topologique d'une bornologie. Nous allons voir comment à partir de la structure des bornés de $\mathbb{R}$ on peut construire une bornologie sur n'importe quel ensemble et réciproquement. Notons l^{∞} l'ensemble des suites réelles bornées. Soit X un ensemble quelconque. On considère la relation de polarité bornée définie pour tous $c : \mathbb{N} \rightarrow X$ et $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$c \perp_b \phi \iff \phi \circ c \in l^{\infty}.$$

Supposons X est équipé d'un ensemble de suites $\mathcal{C} \subseteq X^{\mathbb{N}}$ et d'un ensemble de fonctionnelles $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^X$ tels que $\mathcal{F} = \mathcal{C}^{\perp_b}$ et $\mathcal{C} = {}^{\perp_b} \mathcal{F}$. On peut alors définir une bornologie $\mathcal{B}$ sur X comme l'ensemble des bornés caractérisés par l'une des propriétés suivantes :

- $B \subseteq X$ est bornée si et seulement si pour toute suite $c : \mathbb{N} \rightarrow X$ à valeurs dans B est dans $\mathcal{C}$;
- $B \subseteq X$ est bornée si et seulement si son image $f(B)$ par toute fonctionnelle $f \in \mathcal{F}$ est bornée dans $\mathbb{R}$.

Réciproquement, si X est muni d'une bornologie $\mathcal{B}$, alors l'ensemble des suites bornées :

$$\mathcal{C} = \{c : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} ; c(\mathbb{N}) \in \mathcal{B}\}$$

et l'ensemble des fonctionnelles bornologiques :

$$\mathcal{F} = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} ; \forall B \in \mathcal{B}, f(B) \text{ borné}\}$$

sont deux parties orthogonales l'une de l'autre :

$$\mathcal{C}^{\perp_b} = \mathcal{F}, \quad {}^{\perp_b} \mathcal{F} = \mathcal{C}.$$

Il est équivalent de se donner une bornologie sur un espace ou de se donner une structure bi-recollée le long de $\mathbf{Set}(\mathbb{N}, -)$ et de $\mathbf{Set}(-, \mathbb{R})$. Ainsi, la structure bornologique peut-être transportée de $\mathbb{R}$ à tous les ensembles via le bi-recollement.

Bi-recollement. Le *bi-recollement* est fondé sur le même principe que le recollement (voir le Paragraphe I.2.4 page 24), mais par rapport à deux foncteurs. Dans les modèles de la logique linéaire, on utilise cette technique avec **Set** à la place de la catégorie $\mathcal{E}$ et les foncteurs $\mathcal{C}(I, -)$ et $\mathcal{C}(-, J)$ où I et J sont des objets donnés et $\mathcal{C}$ est une petite catégorie.

Définition I.10. Étant donnés une petite catégorie $\mathcal{C}$ et deux objets I, J de $\mathcal{C}$, $\mathcal{G}_{I,J}(\mathcal{C})$ est la catégorie **bi-recollée** dont

- les *objets* sont les triplets (R, U, X) , où $R \in \text{obj}(\mathcal{C})$ et $U, X \in \text{obj}(\mathbf{Set})$ sont des ensembles de morphismes $U \subseteq \mathcal{C}(I, R)$ et $X \subseteq \mathcal{C}(R, J)$,
- les *morphismes* de (R, U, X) dans (S, V, Y) sont les morphismes $f : R \rightarrow S$ de $\mathcal{C}$ tels que
 - * Si $I \xrightarrow{u} R \in U$, alors $I \xrightarrow{u} R \xrightarrow{f} S \in V$ et
 - * Si $S \xrightarrow{y} J \in Y$, alors $R \xrightarrow{f} S \xrightarrow{y} J \in X$.

En notant $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}$, $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ les foncteurs d'oubli sur chaque composante, on obtient le schéma suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (R, U, X) & & \\
 & & \mathcal{G} & & \\
 \mathcal{U}_1 \swarrow & & \downarrow \mathcal{U}_{\mathcal{C}} & & \searrow \mathcal{U}_2 \\
 \mathbf{Set} & \xleftarrow{\mathcal{C}(I, -)} & \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathcal{C}(-, J)} & \mathbf{Set} \\
 U \subseteq \mathcal{C}(I, R) & & R & & X \subseteq \mathcal{C}(R, J)
 \end{array}$$

Dans le cas des «convenient spaces», on a $\mathcal{C} = \mathbf{Ban}$, $I = \mathbb{R}$ et $J = \mathbb{R}$ (resp. $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$, $I = \mathbb{N}$ et $J = \mathbb{R}$).

Les bi-recollements que nous allons étudier dans ce manuscrit sont tous construits sur des catégories $\mathcal{C}$ de Seely avec $I = 1$. Dans toute la suite, nous nous placerons dans ce cadre.

Si $\mathcal{C}$ est un modèle de ILL (resp. LL), la proposition suivante donne les conditions qu'il suffit au foncteur L de vérifier pour que la catégorie recollée $\mathcal{G}_J(\mathcal{C}) = \mathcal{G}_{1,J}$ soit aussi un modèle de ILL (resp. LL).

Cette proposition est une spécialisation de la Proposition I.9 page 25 du recollement avec $\mathcal{E} = \mathbf{Set}$ et $L = \mathcal{C}(1, -)$. En effet, **Set** est une catégorie de Seely (cf Exemple I.2 page 14). Elle est munie des coproduits finis et possède les produits fibrés. De plus, le foncteur identité forme une exponentielle triviale sur la catégorie **Set**. La distribution linéaire (voir Définition I.6 page 24) est donc de la forme $\kappa : \text{id } \mathcal{C}(1, -) \rightarrow \mathcal{C}(1, !-)$. La proposition suivante explicite de plus la compatibilité avec les deuxième foncteur $\mathcal{C}(-, J)$.

Proposition I.12. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Seely, munie des coproduits finis. Supposons qu'il existe une distribution linéaire $\kappa : \mathcal{C}(1, R) \rightarrow \mathcal{C}(1, !R)$ sur le foncteur $\mathcal{C}(1, -)$. Alors $\mathcal{G}_J(\mathcal{C})$ est une catégorie de Seely. De plus, si $\mathcal{C}$ est une catégorie $*$ -autonome, alors $\mathcal{G}_J(\mathcal{C})$ l'est également. Les différentes structures de $\mathcal{G}_J(\mathcal{C})$ sont décrites en fonction de celles de $\mathcal{C}$ dans la Figure I.5 page 34.*

Enfin, le foncteur d'oubli $\mathcal{U}_{\mathcal{C}} : \mathcal{G}_J(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ préserve ces différentes structures.

Si $\mathcal{C}$ est un modèle de la logique linéaire, alors la catégorie $\mathcal{G}_J(\mathcal{C})$ est aussi un modèle de la logique linéaire.

• **Structure additive :**

- * *Objet terminal* : $(\top, \mathcal{C}(1, \top), \emptyset)$,
- * *Produit cartésien* : Si $A = (R, U, X)$ et $B = (S, V, Y)$, alors
 $(A \times B) = (R \times S, U \times V, X + Y)$ avec

$$\begin{aligned} U \times V &= \{u \times v ; u \in U, v \in V\}, \\ X + Y &= \{R \times S \xrightarrow{\pi_R} R \xrightarrow{x} J ; x \in X\} \cup \{R \times S \xrightarrow{\pi_S} S \xrightarrow{y} J ; y \in Y\}, \end{aligned}$$

- * *Objet initial* : $(0, \emptyset, \mathcal{C}(0, J))$,
- * *Coproduct* : $(A \oplus B) = (R \oplus S, U \oplus V, X + Y)$ où

$$\begin{aligned} U \oplus V &= \{u + v ; u \in U, v \in V\}, \\ X + Y &= \{1 \xrightarrow{x} R \xrightarrow{\iota_R} R \oplus S ; x \in X\} \cup \{1 \xrightarrow{y} S \xrightarrow{\iota_S} R \oplus S ; y \in Y\}. \end{aligned}$$

• **Structure multiplicative :**

- * *Unité du tenseur* : $1 = (1, id_1, \mathcal{C}(1, J))$.
- * *Produit tensoriel* : $A \otimes B = (R \otimes S, U \otimes V, Z)$ où

$$\begin{aligned} U \otimes V &= \left\{ 1 \simeq 1 \otimes 1 \xrightarrow{u \otimes v} R \otimes S ; u \in U, v \in V \right\}, \\ Z &= \left\{ R \otimes S \xrightarrow{z} J ; \begin{array}{l} \forall u \in U, \quad S \simeq 1 \otimes S \xrightarrow{u \otimes id} R \otimes S \xrightarrow{z} J \in Y \\ \forall v \in V, \quad R \simeq R \otimes 1 \xrightarrow{id \otimes v} R \otimes S \xrightarrow{z} J \in X \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

- * *Flèche linéaire* : $A \multimap B = (R \multimap S, W, U \multimap Y)$ avec

$$\begin{aligned} U \multimap Y &= \left\{ u \multimap y : R \multimap S \simeq 1 \otimes (R \multimap S) \xrightarrow{u \otimes id} R \otimes (R \multimap S) \xrightarrow{ev} S \xrightarrow{y} J \right. \\ &\quad \left. ; u \in U, y \in Y \right\}, \\ W &= \left\{ 1 \xrightarrow{w} R \multimap S ; \begin{array}{l} \forall u \in U, \quad 1 \xrightarrow{u} R \xrightarrow{\hat{w}} S \in V \\ \forall y \in Y, \quad R \xrightarrow{\hat{w}} S \xrightarrow{y} J \in X \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

où $\hat{w}$ est la *transposée* de w .

- **Structure exponentielle** : On pose $\kappa_R[U] = \{\kappa_R(u) ; u \in U\}$. Alors, $!(R, U, X) = (!R, \kappa_R[U], \mathcal{C}(!R, J))$ est une exponentielle linéaire.
- **Objet dualisant** : Lorsque $\mathcal{C}$ possède un objet dualisant, nécessairement $J = \perp$. Alors, l'objet dualisant de $\mathcal{G}_\perp(\mathcal{C})$ est $(\{\perp\}, \mathcal{C}(1, \perp), \{\text{id}_\perp\})$.

FIG. I.5: Structures de LL héritées par bi-recollement

Catégories d'orthogonalité. Les relations d'orthogonalité peuvent maintenant être décrites d'un point de vue catégorique.

Définition I.11. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie symétrique monoïdale close et J un objet de $\mathcal{C}$. Une **relation d'orthogonalité** (appelée parfois orthogonalité) est une famille indexée (par tous les objets R de $\mathcal{C}$) de relations $\perp_R$ entre les morphismes $u \in \mathcal{C}(1, R)$ et $x \in \mathcal{C}(R, J)$ satisfaisant des conditions de compatibilité avec la structure monoïdale close de $\mathcal{C}$ (voir [HS03]). Une polarité $\perp_F$ est une relation d'orthogonalité définie par rapport à un pôle $F \subseteq \mathcal{C}(1, J)$:

$$u \perp_F x \iff 1 \xrightarrow{u} R \xrightarrow{x} J \in F.$$

On note $U^\bullet = \{x : R \rightarrow J ; \forall u \in U, u \perp_R x\}$ et $X^\bullet = \{u : 1 \rightarrow R ; \forall x \in X, u \perp_R x\}$.

Définition I.12. Étant donné une catégorie $\mathcal{C}$, un objet J de $\mathcal{C}$, et $\perp$ une relation d'orthogonalité, la **catégorie d'orthogonalité stricte**¹³, notée $\mathcal{T}_J(\mathcal{C})$, est la sous-catégorie pleine de la catégorie bi-recollée $\mathcal{G}_J(\mathcal{C})$ dont les objets sont de la forme (R, U, X) tels que $X = U^\bullet$ et $U = X^\bullet$. Lorsque la catégorie $\mathcal{C}$ est $*$ -autonome, on note $\mathcal{T}(\mathcal{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}_\perp(\mathcal{C})$ (en choisissant l'objet dualisant¹⁴ pour J).

Remarquons que la donnée de (R, U) suffit à décrire un objet (R, U, X) de la catégorie d'orthogonalité stricte.

Tous les exemples que nous avons donnés dans le Paragraphe I.3.2 peuvent être décrits dans ce cadre. Dans le cas des «convenient spaces», la relation d'orthogonalité est définie par rapport au pôle des fonctions réelles lisses (resp. au pôle l^∞ des suites réelles bornées).

Définition I.13. Dans une catégorie symétrique monoïdale close, une orthogonalité est dite **stable** lorsque :

$$\begin{aligned} (U^{\bullet\bullet} \otimes V^{\bullet\bullet})^\bullet &= (U^{\bullet\bullet} \otimes V)^\bullet = (U \otimes V^{\bullet\bullet})^\bullet \\ (U^{\bullet\bullet} \multimap V^{\bullet\bullet})^\bullet &= (U^{\bullet\bullet} \multimap V)^\bullet = (U \multimap V^{\bullet\bullet})^\bullet. \end{aligned}$$

Proposition I.13. [HS03] Soit $\perp$ une orthogonalité stable sur une catégorie de Seely $\mathcal{C}$. Supposons que la monade exponentielle soit munie d'une distribution linéaire κ sur $\mathcal{C}(1, -)$. Supposons de plus que

- pour tous objets A et B la projection $\pi_A : A \times B \rightarrow A$ (resp. π_B) vérifie :

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{C}(1, A \times B), \forall y \in \mathcal{C}(A, J), \\ (1 \xrightarrow{u} A \times B \xrightarrow{\pi_A} A) \perp (A \xrightarrow{y} J) \iff (1 \xrightarrow{u} A \times B) \perp (A \times B \xrightarrow{\pi_A} A \xrightarrow{y} J), \end{aligned}$$

- si $f : !R \rightarrow S$ est un des morphismes δ, ϵ, e, d de la structure exponentielle, alors :

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{C}(1, R), \forall y \in \mathcal{C}(S, J), \\ (1 \xrightarrow{\kappa_R[u]} !R \xrightarrow{f} S) \perp (S \xrightarrow{y} J) \Rightarrow (1 \xrightarrow{\kappa_R[u]} !R) \perp (!R \xrightarrow{f} S \xrightarrow{y} J). \end{aligned}$$

¹³il existe une autre notion de catégorie d'orthogonalité dite *molle* dans laquelle on requiert $X \subseteq U^\bullet$ et $U \subseteq X^\bullet$ au lieu des égalités (voir [HS03]).

¹⁴Pour des raisons de dualité, on va en effet avoir $J = I^\perp = 1^\perp = \perp$, voir [HS03, §4.3].

Dans ce cas $\mathcal{T}_J(\mathcal{C})$ est une catégorie de Seely et le foncteur d'oubli $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}$ préserve les différentes structures.

Supposons enfin que $\mathcal{C}$ soit $*$ -autonome et que

- l'orthogonalité soit symétrique :

$$\forall u \in \mathcal{C}(1, R), \forall x \in \mathcal{C}(R, \perp), u \perp_R x \Leftrightarrow x^\perp \perp_{R^\perp} u^\perp;$$

- pour tous objets A et B l'injection $\iota_A : A \rightarrow A \oplus B$ (resp. ι_B) vérifie :

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{C}(1, A), \forall y \in \mathcal{C}(A \oplus B, \perp), \\ (1 \xrightarrow{u} A) \perp (A \xrightarrow{\iota_A} A \oplus B \xrightarrow{y} \perp) \Leftrightarrow (1 \xrightarrow{u} A \xrightarrow{\iota_A} A \oplus B) \perp (A \oplus B \xrightarrow{y} \perp). \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ est une catégorie $*$ -autonome et le foncteur d'oubli préserve toute la structure.

Les constructions de la logique linéaire, dans la catégorie d'orthogonalité, sont récapitulées dans la Figure I.6.

Posons $A = (R, U, X)$ et $B = (S, V, Y)$. $\begin{aligned} A \& B &= (R \times S, U \times V, (U \times V)^\bullet), \\ \top &= (\top, \mathcal{C}(1, \top), \mathcal{C}(1, \top)^\bullet), \\ A \oplus B &= (R \oplus S, (U \oplus V)^\bullet, U \oplus V), \\ 0 &= (0, \mathcal{C}(0, J)^\bullet, \mathcal{C}(0, J)), \\ A \otimes B &= (R \otimes S, (U \otimes V)^{\bullet\bullet}, (U \otimes V)^\bullet), \\ 1 &= (1, \{\text{id}_1\}^{\bullet\bullet}, \{\text{id}_1\}^\bullet), \\ A \multimap B &= (R \multimap S, (U \multimap Y)^\bullet, (U \multimap Y^{\bullet\bullet})), \\ !A &= (!R, \kappa_R[U]^{\bullet\bullet}, \kappa_R[U]^\bullet), \\ A^\perp &= (R, X, U). \end{aligned}$

FIG. I.6: Interprétation dans une catégorie d'orthogonalité des formules de LL

Première partie

Sémantique

INTRODUCTION

Dans cette première partie, nous allons voir comment l'étude sémantique du non-déterminisme a mené à l'étude de la formule de Taylor et de la structure différentielle. Pour cela nous allons nous focaliser sur les espaces de finitude introduits et étudiés par Ehrhard [Ehr05, Ehr07].

Commençons par décrire la *sémantique quantitative* [Gir88] dont les espaces de finitude sont les héritiers.

Quand on évalue un programme non-déterministe sur une donnée, plusieurs résultats sont possibles. Pour tenir compte de ces différentes possibilités, on représente les données et les résultats par des agrégats de valeurs. Comme les programmes reçoivent comme données des résultats d'autres programmes, ils doivent, dans un cadre non-déterministe, prendre en entrée de tels agrégats.

Dans la sémantique quantitative, on interprète donc

- un type, par un ensemble de valeurs ;
- une donnée, par une combinaison linéaire potentiellement infinie de ses différentes valeurs ;
- un programme, par une fonction dont le comportement est assez régulier pour pouvoir manipuler des combinaisons linéaires infinies.

Historiquement, la sémantique quantitative est présentée dans le cadre de la catégorie des ensembles et les programmes sont représentés par des foncteurs normaux [Gir88] ou analytiques [Joy86, Has02, FGHW08]. Il est cependant naturel de construire une sémantique quantitative utilisant les outils de l'analyse mathématique. Dans une telle sémantique, les types sont interprétés par des espaces vectoriels topologiques, les données par des séries convergentes et les programmes par des fonctions analytiques. Ceci a été réalisé dans différents cadres. Par exemple, les espaces de Banach cohérents [Gir96] forment un modèle fondé sur les espaces vectoriels normés ; les espaces de Köthe [Ehr02] forment un modèle fondé sur les espaces vectoriels topologiques localement convexes et les espaces vectoriels de finitude forment un modèle fondé sur les espaces de Lefschetz [Lef42].

Plus précisément, la définition des espaces de finitude repose sur une version contrôlée du non-déterminisme. En effet, dans ce contexte, un programme interagit à travers plusieurs valeurs d'une même donnée (c'est le non-déterminisme), mais ce nombre de valeurs est fini et dépend à la fois de la donnée et du programme. En utilisant cette propriété d'interaction finie, on peut construire une variante du modèle relationnel, le modèle des *espaces de finitude relationnels*. On va ensuite enrichir ce modèle d'une structure d'espace vectoriel topologique issue

du non-déterminisme contrôlé. Ces espaces sont des cas particuliers d'espaces de Lefschetz et seront étudiés au Chapitre III.

Dans tous les modèles quantitatifs, l'interprétation d'un programme est une fonction qui peut être décomposée en une somme de fonctions polynomiales, c'est la formule de Taylor sémantique. Étant donnés les liens mathématiques entre cette formule et la structure différentielle, il est naturel d'exhiber l'opérateur différentiel dans les modèles quantitatifs. C'est ce qui a été fait dans les espaces de Köthe [Ehr02], puis dans les espaces de finitude [Ehr05] et enfin dans la catégorie des ensembles et foncteurs analytiques [Fio04, Fio05].

Pour conclure, à la suite de l'étude sémantique des espaces de finitude, la formule de Taylor et la structure différentielle ont été introduites dans la syntaxe. Nous les étudierons dans la seconde partie de ce manuscrit.

Concentrons nous à présent sur les espaces de finitude qui constituent le coeur de cette partie.

Il existe deux façons de décrire les espaces de finitude. La première se place au niveau de la sémantique relationnelle et la seconde au niveau des espaces vectoriels topologiques. Cette partie est organisée autour de ces deux points de vue.

Dans le Chapitre II nous reprenons la présentation des espaces de finitude de [Ehr05]. Nous nous appuyons sur une relation d'orthogonalité engendrée par le non-déterminisme contrôlé et sur le bi-recollement introduit au Chapitre I pour montrer que les espaces de finitude relationnels forment un modèle de la logique linéaire. Dans [Ehr05], Ehrhard fait plusieurs fois appel à l'axiome du choix pour caractériser des constructions de la logique linéaire. Avec Lionel Vaux, nous avons formalisé son argument et montré comment importer des structures finitaires sur le domaine de certaines fonctions.

Théorème A (Théorème II.1 page 50). *Soit $|A|$ un ensemble dénombrable. Soient I un ensemble dénombrable, $(B_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces de finitude et $f : \mathcal{P}(|A|) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{P}(|B_i|)$ une fonction qui commute aux unions et qui envoie les parties finies sur des parties finies. L'ensemble $\mathcal{F}_f$ de parties de $|A|$*

$$\mathcal{F}_f = \left\{ x \in \mathcal{P}(|A|) ; f(x) \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}(B_i) \right\},$$

est une structure finitaire, i.e. $\mathcal{F}_f^{\perp\perp} = \mathcal{F}_f$.

Nous l'appliquons ensuite pour retrouver la présentation des constructions de la logique linéaire faite par Ehrhard.

La dernière partie de ce chapitre est consacrée au calcul de l'exponentielle dans les espaces de finitude relationnels. Plus précisément, nous montrons que cette exponentielle est librement engendrée. Mais nous démontrons aussi l'inadéquation des formules, introduites au Chapitre I, pour calculer cette exponentielle.

Théorème B (Paragraphe page 60). *Soit A un espace de finitude relationnel. Rappelons que l'on note A^∞ la limite du diagramme (I.8) page 21 et $A^{\leq\infty}$ la limite du diagramme (I.9)*

page 22. Les deux formules calculent le même espace de finitude qui n'est pas en général égal à l'espace de finitude $!A$.

Dans le Chapitre III, nous nous intéressons aux espaces de finitude vectoriels. Ils ont été introduits en partant de leurs homologues relationnels. Pourtant, comme l'a démontré Ehrhard, ils n'en dépendent pas. Le but de ce chapitre est de les présenter de façon intrinsèque. Nous allons pour cela mener une étude des structures de la logique linéaire dans les espaces de Lefschetz dont les espaces de finitude vectoriels sont des cas particuliers.

Pour chacune de ces constructions, nous montrons que leur description dans les espaces de Lefschetz généralise celles effectuées dans les espaces vectoriels de finitude.

Théorème C. *Les constructions de la logique linéaire dans les espaces de finitude relationnels se transportent en leurs homologues dans les espaces de Lefschetz. Autrement dit, étant donnés deux espaces de finitude relationnels A et B , on a*

$$\begin{aligned} E_{A\&B} &\simeq E_A \times E_B && \text{(voir la Proposition III.29 page 95)} \\ E_{A\oplus B} &\simeq E_A \oplus E_B && \text{(voir la Proposition III.33 page 97)} \\ E_{A\multimap B} &\simeq \mathcal{L}_c(E_A, E_B) && \text{(voir la Proposition III.48 page 105)} \\ E_{A^\perp} &\simeq \neg E_A && \text{(voir la Proposition III.49 page 106)} \\ E_{A\otimes B} &\simeq E_A \otimes E_B && \text{(voir la Proposition III.114 page 156)} \\ E_{!A} &\simeq !E_A && \text{(voir la Proposition III.125 page 164)} \end{aligned}$$

où E_G désigne l'espace de finitude vectoriel engendré par l'espace de finitude relationnel G .

Par ailleurs, nous allons définir une notion intrinsèque d'espaces de finitude, les *espaces de Lefschetz finitaires* qui sont les espaces linéairement homéomorphes à des espaces de finitude vectoriels. Nous montrons que cette notion est stable par les constructions de la logique linéaire et définit un modèle de la logique linéaire.

Théorème D. *Soient E et F deux espaces de Lefschetz finitaires.*

- $E \times F$ est un espace de Lefschetz finitaire (voir la Proposition III.29 page 95).
- $E \oplus F$ est un espace de Lefschetz finitaire (voir la Proposition III.33 page 97).
- $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un espace de Lefschetz finitaire (voir la Proposition III.69 page 121).
- $\neg E$ est un espace de Lefschetz finitaire (voir la Proposition III.70 page 122).
- $E \otimes F$ est un espace de Lefschetz finitaire (voir la Proposition III.115 page 156).
- $!E$ est un espace de Lefschetz finitaire (voir la Proposition III.126 page 164).

Nous verrons que les espaces de Lefschetz ne forment pas un modèle de la logique linéaire. Pourtant, les propriétés vérifiées par les espaces de finitude indiquent qu'une famille d'espaces de Lefschetz, les *espaces linéairement bornologiques*, pourrait être un modèle de la logique linéaire.

Théorème E (Section III.3.1.d page 128). *Tout espace de Lefschetz linéairement bornologique et complet est un espace de Lefschetz réflexif. De plus la catégorie des espaces de Lefschetz bornologiques complets est stable par $\oplus$, $\&$ et par passage au dual.*

Nous ne savons pas, au moment de la rédaction de ce manuscrit, si ce dernier théorème s'étend au produit tensoriel et à l'exponentielle, ce qui est nécessaire pour que les espaces linéairement bornologiques soient un modèle de la logique linéaire.

Enfin, nous décrivons la formule de Taylor dans le cadre des espaces de Lefschetz linéairement bornologiques et complets.

Théorème F (voir le Théorème [III.10](#) page [172](#)). *Soient E et F deux espaces de Lefschetz complets et linéairement bornologiques. Toute série formelle $f \in \text{Ser}_{\mathbb{K}}(E, F)$, vérifie la formule de Taylor*

$$\forall x \in E, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \partial^n f(0) \cdot x^{\otimes n}.$$

II - ESPACES DE FINITUDE RELATIONNELS

Plan du chapitre

II.1 Généralités	44
II.1.1 Définitions et premières propriétés	44
II.1.2 Exemples	46
II.1.3 Un modèle de la logique linéaire	48
II.1.4 Transport des structures finitaires	49
II.2 Structure additive, limites et co-limites	51
II.3 Structure multiplicative	56
II.4 Structure exponentielle	58

Dans ce chapitre, nous allons présenter les espaces de finitude relationnels. Ils modélisent une *interaction finie* entre programmes et environnements que nous allons commencer par expliciter.

Revenons tout d'abord sur ces interactions dans le modèle des espaces cohérents. Comme nous l'avons remarqué dans le Paragraphe I.3.2 page 28, les espaces cohérents peuvent être définis par l'intermédiaire d'une relation d'orthogonalité entre des parties u et u' de la trame $|A|$

$$u \perp_{\text{coh}} u' \iff \sharp(u \cap u') \leq 1.$$

L'interprétation cohérente u d'une preuve d'une formule A et l'interprétation u' d'une contre-preuve de cette formule s'intersectent alors en au plus un point. Au niveau des langages de programmation, cette propriété logique se traduit par une interaction déterministe. En effet, un environnement de type $A \multimap B \equiv A^\perp \wp B$ et un programme de type $B \multimap C \equiv B^\perp \wp C$ ont au plus une façon d'interagir à travers le type B .

Au contraire, l'interprétation dans le modèle relationnel de l'interaction entre environnements et programmes est non-déterministe. En effet, pour une formule de la logique linéaire, les interprétations d'une preuve et d'une contre-preuve paramétrées par un contexte peuvent s'intersecter en plusieurs points. Cependant, une étude plus précise montre que cette intersection est finie (voir la Proposition II.1 page 44). Ainsi, le non-déterminisme du modèle relationnel est contrôlé.

Cette propriété d'intersection finie des interprétations des preuves et contre-preuves paramétrées peut être généralisée à d'autres éléments de la sémantique. On obtient alors la relation d'orthogonalité sur les parties de u et u' de $|A|$, définie par l'équivalence

$$u \perp_{\text{fin}} u' \iff \sharp(u \cap u') \in \mathbb{N}$$

D'après la construction par bi-orthogonalité présentée à la Section I.3, on peut construire un modèle de la logique linéaire à partir du modèle relationnel et de la relation d'orthogonalité ci-dessus. Les espaces ainsi obtenus sont appelés les *espaces de finitude relationnels* [Ehr05, §1]. L'interprétation d'une formule ou d'une preuve est la même dans le modèle relationnel et dans le modèle des espaces de finitude.

Plan du chapitre. Dans la Section II.1, nous définissons les espaces de finitude relationnels, donnons des exemples d'interprétations des booléens et des entiers naturels et montrons qu'ils forment un modèle de la logique linéaire en utilisant le bi-recollement. Enfin, nous introduisons le Théorème II.1 page 50 qui permet de transporter les structures finitaires.

Dans les Sections II.2-II.4, nous montrons que les constructions de la logique linéaire peuvent être définies sans utiliser la clôture par bi-orthogonal. Pour cela, nous utilisons le Théorème II.1 page 50. Nous allons enfin nous attarder sur l'exponentielle des espaces de finitude et montrer qu'elle est libre mais qu'elle ne peut pas être calculée par une des formules présentées au Paragraphe I.2.2 page 19.

II.1 Généralités

II.1.1 Définitions et premières propriétés

Dans le modèle relationnel (voir la Figure I.3 page 15), une preuve de $\vdash \Gamma, A$ ne peut interagir avec une preuve de $\vdash A^\perp, \Delta$ qu'en un nombre fini de points comme le montre la proposition suivante.

Définition II.1. Soient A, Γ et Δ des formules de LL. Pour toute preuve $\pi \vdash \Gamma^\perp, A$ et toute preuve $\pi' \vdash A^\perp, \Delta$, la coupure $(\pi ; \pi')$ est une relation entre $\llbracket \Delta \rrbracket$ et $\llbracket \Gamma \rrbracket$ définie par

$$\forall \gamma' \in \llbracket \Gamma^\perp \rrbracket, \forall \delta \in \llbracket \Delta \rrbracket, (\gamma', \delta) \in \llbracket \pi ; \pi' \rrbracket \iff \exists a \in \llbracket A \rrbracket, (\gamma', a) \in \llbracket \pi \rrbracket \text{ et } (a, \delta) \in \llbracket \pi' \rrbracket.$$

Proposition II.1. [Ehr05, Th5] Soient A, Γ et Δ des formules de LL. Une preuve $\pi \vdash \Gamma^\perp, A$ et une preuve $\pi' \vdash A^\perp, \Delta$ n'ont qu'un nombre fini d'interactions possibles à travers $\llbracket A \rrbracket$, i.e. pour tous $\gamma' \in \Gamma^\perp$ et $\delta \in \Delta$, il n'existe qu'un nombre fini de $a \in \llbracket A \rrbracket$ tels que $(\gamma', a) \in \llbracket \pi \rrbracket$ et $(a, \delta) \in \llbracket \pi' \rrbracket$.

Démonstration. La preuve se fait par induction sur les formes normales de π et de π' . Pour cela nous utilisons le modèle relationnel décrit à la Figure I.3 page 15 et l'élimination des coupures dans LL (voir [Gir87]). $\square$

D'un point de vue informatique, cette proposition montre que l'interaction entre les environnements de type $\Gamma \multimap A$ et les programmes de type $A \multimap \Delta$ est non-déterministe. En effet, le calcul du résultat du programme dans le contexte déterminé par son environnement se fait en passant par plusieurs chemins d'exécution. Toutefois, on garde un contrôle sur le nombre de chemin d'exécution qui est toujours fini.

En fixant $\gamma \in \Gamma$ et $\delta \in \Delta$, on est amené à introduire la notion d'orthogonalité finitaire que nous introduisons maintenant.

Soit $|A|$ un ensemble dénombrable. On définit une relation d'orthogonalité (cf Section I.3) dite *finitaire* et notée $\perp_{\text{fin}}$ sur les parties de $|A|$:

$$\forall u, u' \subseteq |A|, u \perp_{\text{fin}} u' \Leftrightarrow u \cap u' \text{ finie.}$$

Quand aucune confusion n'est possible, on écrira $\perp$ à la place de $\perp_{\text{fin}}$.

De plus, l'orthogonal d'un ensemble $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(|A|)$ de parties de $|A|$ est défini par

$$\mathcal{F}^\perp = \{u' \subseteq |A| ; \forall u \in \mathcal{F}, u \perp_{\text{fin}} u'\}.$$

On dit qu'un ensemble de parties $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(|A|)$ est *clos par bi-orthogonalité* lorsque $\mathcal{F}^{\perp\perp} = \mathcal{F}$ (voir la Section I.3.1 page 26).

Définition II.2. Un **espace de finitude relationnel** est un couple $A = (|A|, \mathcal{F}(A))$ dont la **trame** $|A|$ est un ensemble dénombrable et la **structure finitaire** $\mathcal{F}(A) \subseteq \mathcal{P}(|A|)$ est *close par bi-orthogonalité*.

Les éléments de $\mathcal{F}(A)$ sont appelés les **parties finitaires** de A et ceux de $\mathcal{F}(A)^\perp$ sont les **parties anti-finitaires** de A .

Une **relation finitaire** R entre deux espaces de finitude relationnels A et B est une partie de $|A| \times |B|$ telle que l'image directe d'une partie finitaire de A est finitaire dans B et la pré-image d'une partie anti-finitaire de B est une partie anti-finitaire de A :

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{F}(A), R \cdot u &\stackrel{\text{def}}{=} \{b \in |B| ; \exists a \in u, (a, b) \in R\} \in \mathcal{F}(B), \\ \forall v' \in \mathcal{F}(B)^\perp, {}^tR \cdot v' &\stackrel{\text{def}}{=} \{a \in |A| ; \exists b \in v', (a, b) \in R\} \in \mathcal{F}(A)^\perp. \end{aligned}$$

La catégorie dont les objets sont des espaces de finitude relationnels et les morphismes des relations finitaires est dénotée **RelFin**.

L'**orthogonal** $A^\perp$ d'un espace de finitude relationnel A est défini par sa trame $|A^\perp| = |A|$ et sa structure de finitude $\mathcal{F}(A^\perp) = \mathcal{F}(A)^\perp$.

Dans la suite, les lettres $A, B, A_i \dots$ désignent des espaces de finitude relationnels.

Voici une série de propriétés des structures finitaires qui se vérifient facilement.

Proposition II.2. (F1) *Toute partie finie de la trame d'un espace de finitude est une partie finitaire.*

(F2) *Une partie d'une partie finitaire est finitaire.*

(F3) *L'union de deux parties finitaires est toujours finitaire.*

(F4) L'orthogonal $\mathcal{F}^\perp$ de toute famille $\mathcal{F}$ de parties d'un ensemble dénombrable $|A|$ induit une structure de finitude, i.e.

$$\forall \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(|A|), (|A|, \mathcal{F}^\perp) \text{ est un espace de finitude.}$$

Démonstration. Pour tout $\mathcal{F}$ partie de $|A|$, on a $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^{\perp\perp}$ et donc $\mathcal{F}^\perp \subseteq (\mathcal{F}^\perp)^{\perp\perp}$. De plus, si $\mathcal{G} \subseteq |A|$ et $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, alors $\mathcal{G}^\perp \subseteq \mathcal{F}^\perp$. On en déduit que $(\mathcal{F}^{\perp\perp})^\perp \subseteq \mathcal{F}^\perp$. $\square$

(F5) Sur une trame finie, il n'existe qu'une seule structure finitaire, l'ensemble de toutes les parties.

Démonstration. En effet, d'après la Propriété (F2), toute partie finie est finitaire or toutes les parties de la trame sont finies. Donc la structure finitaire est réduite à l'ensemble des parties finies. $\square$

(F6) L'ensemble des parties finies de la trame est une structure finitaire. L'ensemble de toutes les parties est aussi une structure finitaire.

II.1.2 Exemples

Les exemples des booléens et des entiers naturels vont nous suivre tout au long de ce travail.

Exemple II.1. Les booléens sont formés de deux éléments incomparables «vrai», noté T et «faux», noté F. Ainsi, la trame de l'espace de finitude représentant le type $\mathcal{B}$ est $|\mathcal{B}| = \{T, F\}$. D'après la Propriété (F5) ci-dessus, la trame étant finie, il n'y a pas d'autres choix que l'ensemble de toutes les parties $\mathcal{F}(\mathcal{B}) = \{\emptyset, \{T\}, \{F\}, \{T, F\}\}$ pour la structure finitaire.

L'orthogonal $\mathcal{B}^\perp$ est interprété par le même espace

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}^\perp| &= \{T, F\}, \\ \mathcal{F}(\mathcal{B}^\perp) &= \mathcal{P}_{\text{fin}}(\{T, F\}). \end{aligned}$$

S'il n'existe qu'une seule structure finitaire sur une trame finie, on peut munir un ensemble dénombrable de beaucoup de structures finitaires différentes.

Exemple II.2. Les espaces de finitude définis dans cet exemple ont tous pour trame l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

- On note $\mathcal{Nat}$ l'espace de finitude dont la trame est l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ et dont la structure finitaire est l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, noté $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$. La structure de finitude de son orthogonal $\mathcal{Nat}^\perp$ est l'ensemble de toutes les parties $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Dans la suite, nous utiliserons principalement ces deux structures finitaires lorsque nous parlerons d'entiers.
- On note $2\mathcal{Nat}$ l'espace de finitude dont la trame est $\mathbb{N}$ et la structure finitaire est l'orthogonal de $\mathcal{P}(2\mathbb{N})$. Ainsi, une partie est finitaire si et seulement si elle ne contient qu'un nombre fini de nombres pairs.
- Ce dernier exemple peut se décliner à l'infini : une partie est finitaire si elle ne contient qu'un nombre fini d'entiers premiers...

Hyvernat [Hyv08b] a même montré que tout ensemble infini dénombrable admet un nombre non dénombrable de structures finitaires. La démonstration repose sur l'exemple suivant qui munit l'ensemble des suites finies de différentes structures finitaires (en fait autant de structures différentes qu'il y a de parties dans $\mathbb{R}$).

Exemple II.3. Soit $\mathcal{B}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites finies de 0 et de 1. Pour tout réel x , on note $x^\downarrow \subseteq \mathcal{B}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des approximations dyadiques finies de x . Soit X une partie de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{F}_X$ l'ensemble des approximations dyadiques des éléments de X , i.e. $\mathcal{F}_X = \{x^\downarrow ; x \in X\}$. L'espace de finitude associé aux approximations dyadiques dans X est donné par la trame $\mathcal{B}^{(\mathbb{N})}$ et la structure finitaire $\mathcal{F}_X^{\perp\perp}$.

Comme les développements dyadiques de deux réels distincts diffèrent forcément sur un nombre fini d'approximations finies, si $x \notin X$, alors $x^\downarrow$ a une intersection finie avec les parties apparaissant dans $\mathcal{F}_X$, autrement dit $x^\downarrow \in \mathcal{F}_X^\perp$. On en déduit que pour tout réel x , si $x^\downarrow$ est infinie et $x \notin X$, alors $x^\downarrow \notin \mathcal{F}_X^{\perp\perp}$.

Pour finir, l'exemple qui suit a pour trame l'ensemble $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ des suites finies d'entiers, nous verrons au Chapitre III sur les espaces de Lefschetz qu'il est relié à l'espace des fonctions continues sur l'espace de Baire [ES]¹.

Exemple II.4. On va définir un espace de finitude $\mathcal{W}$ ayant pour trame $|\mathcal{W}| = \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites finies d'entiers.

Soient τ et τ' deux suite finies à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note l_τ et $l_{\tau'}$ leurs longueurs respectives. La relation d'extension entre les suites est définie par l'équivalence suivante

$$\tau \leq \tau' \iff \begin{cases} l_\tau \leq l_{\tau'} \\ \forall n \leq l_\tau, \tau_n = \tau'_n. \end{cases}$$

Une partie $I \subseteq \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ n'admet pas de chaîne infinie, lorsque toute partie $\{\tau^k ; k \in \mathbb{N}\}$ de I telle que $\forall k \in \mathbb{N}, \tau^k \leq \tau^{k+1}$ est finie. On note $\mathcal{F}(\mathcal{W})$ l'ensemble des parties bien fondées de $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$.

Montrons que $\mathcal{F}(\mathcal{W})$ est une structure finitaire. Pour cela, nous allons calculer son orthogonal. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Π_n la fonction de projection sur la n ième composante, i.e. $\forall \tau \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}, \Pi_n(\tau) = \tau_n$. Notons $\mathcal{E} = \{F ; \forall n \in \mathbb{N}, \Pi_n(F) \text{ fini}\}$ et montrons que

$$\mathcal{F}(\mathcal{W}) = \mathcal{E}^\perp.$$

Soit $I \in \mathcal{E}^\perp$. Montrons que I n'admet pas de chaîne infinie. Soit $F = \{\tau^k ; k \in \mathbb{N}\}$ une chaîne croissante de I . Comme $(\tau^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante, $\tau^{k'}$ prolonge τ^k si $k' > k$, donc pour $n \in \mathbb{N}$

$$\Pi_n(F) \subseteq \{\tau_n^k ; k \in \mathbb{N}\} \subseteq \{\tau_n^q\},$$

pour un certain $q \in \mathbb{N}$. Donc $F \in \mathcal{E}$ et $F \cap I = F$ est fini puisque $I \in \mathcal{E}^\perp$. Toute chaîne croissante de I est donc finie.

¹C'est en fait une variante qui est utilisée. La trame est l'ensemble des suites finies qui ne terminent pas par zéro

Réciproquement, soient $I \in F(\mathcal{W})$ et $F \in \mathcal{E}$. Montrons que l'intersection $I \cap F$ est finie. Définissons $G \subseteq F$ par

$$G = \{\tau \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} ; \forall n \in \mathbb{N}, \tau_n \in \Pi_n(F)\}.$$

Il nous suffit alors de montrer que $I \cap G$ est fini pour conclure. On peut voir $I \cap G$ comme un arbre à branchement fini. S'il était infini, par le lemme de König, il existerait une branche infinie, c'est-à-dire une chaîne infinie dans I . Or I est supposé bien fondé, donc $I \cap G$ est fini.

II.1.3 Un modèle de la logique linéaire

La proposition suivante assure que les espaces de finitude tels que nous les avons présentés à la Définition II.2 page 45 peuvent être décrits comme une catégorie d'orthogonalité construite par bi-recollement (voir le Paragraphe I.3.3).

Proposition II.3. *La catégorie **RelFin** est équivalente à la catégorie d'orthogonalité stricte sur le modèle relationnel, pour la relation d'orthogonalité finitaire.*

Démonstration. En effet, la catégorie $\mathcal{T}(\mathbf{Rel})$ d'orthogonalité stricte est formée par les objets de la forme $(|A|, \mathcal{F}_{|A|}, \mathcal{F}'_{|A|})$ où $\mathcal{F}_{|A|}^\perp = \mathcal{F}'_{|A|}$ et $\mathcal{F}'_{|A|}^\perp = \mathcal{F}_{|A|}$, c'est-à-dire que $\mathcal{F}$ est une structure finitaire. D'après la Définition I.10 page 33, dans $\mathcal{T}(\mathbf{Rel})$, un morphisme

$$R : (|A|, \mathcal{F}_{|A|}, \mathcal{F}'_{|A|}) \rightarrow (|B|, \mathcal{F}_{|B|}, \mathcal{F}'_{|B|})$$

est une relation $R : |A| \rightarrow |B|$ telle que, pour toutes parties $u \subseteq |A|$ et $v' \subseteq |B|$, on a que :

- si $u \in \mathcal{F}_{|A|}$, alors $R \cdot u \in \mathcal{F}_{|B|}$, où rappelons que $R \cdot u = \{b \in |B| ; \exists a \in u ; a R b\}$ (voir l'Exemple I.2 page 14) ; c'est donc la relation $\{*\} \xrightarrow{u} |A| \xrightarrow{R} |B|$;
- si $v' \in \mathcal{F}'_{|B|}$, alors ${}^t R \cdot v' \in \mathcal{F}'_{|A|}$, où ${}^t R \cdot v' = \{a \in |A| ; \exists b \in v' ; a R b\}$; c'est la relation $|A| \xrightarrow{R} |B| \xrightarrow{v'} \{*\}$.

Les morphismes coïncident donc avec les relations finitaires (voir la Définition II.2 page 45).

Remarquons que pour tout objet $(|A|, \mathcal{F}_{|A|}, \mathcal{F}'_{|A|})$, on a $\mathcal{F}'_{|A|} = \mathcal{F}_{|A|}^\perp$. On n'a donc pas besoin de conserver les deux ensembles. En oubliant $\mathcal{F}'_{|A|}$, on se ramène donc à la catégorie **RelFin** des espaces de finitude. $\square$

Comme **RelFin** est obtenue par bi-recollement à partir de **Rel** qui est une catégorie de Seely *-autonome, on peut appliquer la Proposition I.13 page 35. On montre alors que **RelFin** est un modèle de la logique linéaire. On retrouve alors les constructions proposées par Ehrhard [Ehr05].

Proposition II.4. *La catégorie **RelFin** est une catégorie de Seely *-autonome. L'interprétation de LL dans **RelFin** se fait à travers les constructions suivantes sur les espaces de finitude $A = (|A|, \mathcal{F}(A))$ et $B = (|B|, \mathcal{F}(B))$:*

$$\begin{aligned} A \& B &= (|A| \uplus |B|, \{u \uplus v ; u \in \mathcal{F}(A), v \in \mathcal{F}(B)\}), \\ \top &= (\emptyset, \{\emptyset\}), \end{aligned}$$

$$A \oplus B = \left(|A| \uplus |B|, \{u \uplus v ; u \in \mathcal{F}(A), v \in \mathcal{F}(B)\}^\perp \right),$$

$$0 = (\emptyset, \{\emptyset\}),$$

$$A \otimes B = \left(|A| \times |B|, \{u \times v ; u \in \mathcal{F}(A), v \in \mathcal{F}(B)\}^{\perp\perp} \right),$$

$$1 = (\{*\}, \{\emptyset, \{*\}\}),$$

$$A \multimap B = \left(|A| \times |B|, \left\{ R \subseteq A \times B ; \left\{ \begin{array}{l} \forall u \in \mathcal{F}(A), \quad R \cdot u \in \mathcal{F}(B), \\ \forall v' \in \mathcal{F}(B)^\perp, \quad {}^t R \cdot v' \in \mathcal{F}(A)^\perp \end{array} \right\} \right\} \right),$$

$$!A = \left(\mathcal{M}_{\text{fin}}(|A|), \{u^! ; u \in \mathcal{F}(A)\}^{\perp\perp} \right),$$

$$?A = \left(\mathcal{M}_{\text{fin}}(|A|), \{u^! ; u \in \mathcal{F}(A)\}^\perp \right),$$

$$A^\perp = \left(|A|, \mathcal{F}(A)^\perp \right).$$

Démonstration. On utilise les constructions données à la Figure I.6 page 36 et la description du modèle relationnel Figure I.3 page 15. La distribution linéaire $\kappa_- : \mathbf{Rel}(1, -) \rightarrow \mathbf{Rel}(1, !-)$ est définie par ses composantes

$$\kappa_{|A|} : |A| \rightarrow \mathcal{M}_{\text{fin}}(|A|)$$

$$u \rightarrow u^! \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(|A|) ; |\mu| \subseteq u\},$$

où $|\mu|$ est l'ensemble des éléments apparaissant dans le multi-ensemble μ . □

La Proposition I.13 page 35 nous apprend aussi que le foncteur oubli de $\mathbf{RelFin}$ dans $\mathbf{Rel}$ préserve les structures de la logique linéaire. Ce n'est pas pour autant qu'il admet un adjoint à gauche comme le montre le contre-exemple suivant.

Contre-Exemple II.5. Soient $|A|$ un ensemble, $\mathcal{B}$ un espace de finitude et $|A| \xrightarrow{R} \mathcal{B}$ une relation. Pour que l'oubli admette un adjoint à gauche, il faut que l'on puisse munir $|A|$ d'une structure finitaire telle que R soit une relation finitaire. Ceci n'est pas possible en général. Considérons $|A| = \mathbb{N}$, $\mathcal{B} = \mathcal{Nat}$ et $R = \{(1, n) ; n \in \mathbb{N}\}$. L'image de la partie finie $\{1\}$ par R est $\mathbb{N}$ qui n'est pas finitaire dans $\mathcal{Nat}$.

II.1.4 Transport des structures finitaires

Afin de pouvoir manipuler facilement les interprétations des formules de la logique linéaire, nous allons en donner une description directe, c'est-à-dire sans passer par le bi-orthogonal. Pour cela, nous allons utiliser le théorème qui suit et qui repose sur l'utilisation de l'*axiome du choix*. Ce théorème, formulé avec Lionel Vaux, permet de donner un cadre commun aux démonstrations qui apparaissent dans [Ehr05] pour les structures multiplicatives et exponentielles.

Définition II.3. Soient $|A|$ et $|B|$ deux ensembles.

On dit qu'une fonction $f : \mathcal{P}(|A|) \rightarrow \mathcal{P}(|B|)$ est **finie** lorsqu'elle envoie les parties finies sur les parties finies :

$$\forall x \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(|A|), f(x) \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(|B|).$$

Une fonction **commute aux unions** lorsque :

$$\forall (x_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(|A|), f(\cup_{i \in I} x_i) = \cup_{i \in I} f(x_i).$$

Le théorème suivant permet d'importer la structure finitaire du co-domaine d'une fonction, sur son domaine.

Théorème II.1. Soit $|A|$ un ensemble dénombrable. Soient I un ensemble dénombrable, $(B_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces de finitude et $f : \mathcal{P}(|A|) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{P}(|B_i|)$ une fonction telle que pour tout $i \in I$, la composante $f_i : \mathcal{P}(|A|) \rightarrow \mathcal{P}(|B_i|)$ est finie et commute aux unions. L'ensemble $\mathcal{F}_f$ de parties de $|A|$:

$$\mathcal{F}_f = \left\{ x \in \mathcal{P}(|A|) ; f(x) \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}(B_i) \right\},$$

est une structure finitaire, i.e. $\mathcal{F}_f^{\perp\perp} = \mathcal{F}_f$.

Démonstration. Soit $y = (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{P}(|B_i|)$. On définit $x_y \subseteq |A|$ par :

$$x_y \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup \{ x \subseteq |A| ; \forall i \in I, f_i(x) \subseteq y_i \} = \{ a ; \forall i \in I, f_i(\{a\}) \subseteq y_i \}.$$

Remarquons que comme f commute aux unions, pour tout $i \in I$, on a que $f_i(x_y) \subseteq y_i$.

Commençons par calculer l'orthogonal de $\mathcal{F}_f$ et par montrer que :

$$\mathcal{F}_f^{\perp} = \left\{ x' \in \mathcal{P}(|A|) ; \forall y \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}(B_i), x_y \cap x' \text{ est finie} \right\}.$$

Cette égalité résulte de la suite d'équivalences ci-dessous :

$$\begin{aligned} x' \in \mathcal{F}_f^{\perp} &\iff \forall x \in \mathcal{P}(|A|), \\ &\quad (\forall i \in I, f_i(x) \in \mathcal{F}(B_i)) \Rightarrow x \cap x' \text{ est finie}, \\ &\iff \forall (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}(B_i), \forall x \in \mathcal{P}(|A|), \\ &\quad (\forall i \in I, f_i(x) \subseteq y_i) \Rightarrow x \cap x' \text{ est finie}, \\ &\iff \forall y \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}(B_i), x_y \cap x' \text{ est finie}. \end{aligned}$$

Montrons à présent que $\mathcal{F}_f^{\perp\perp} \subseteq \mathcal{F}_f$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathcal{F}_f^{\perp\perp}$, pour tout $i \in I$, on a $f_i(x) \in \mathcal{F}(B_i)$. Comme pour chaque $i \in I$, $\mathcal{F}(B_i)$ est une structure finitaire, il suffit de montrer que

$$\forall x \in \mathcal{F}_f^{\perp\perp}, \forall i \in I, \forall y'_i \in \mathcal{F}(B_i)^{\perp}, f_i(x) \cap y'_i \text{ est finie}.$$

Soient $x \in \mathcal{F}_f^{\perp\perp}$, $i \in I$ et $y'_i \in \mathcal{F}(B_i)^\perp$.

Comme f_i commute aux unions, on a l'égalité $f_i(x) = \cup_{a \in x} f_i(\{a\})$. Pour tout $b \in f_i(x) \cap y'_i$, il existe donc $a \in x$ tel que $b \in f_i(\{a\})$. Grâce à l'*axiome du choix*, nous pouvons construire une fonction partielle $f_i^{-1} : f_i(x) \cap y'_i \rightarrow x$ (celle qui à b associe a) telle que :

$$\forall b \in f_i(x) \cap y'_i, b \in f_i(\{f_i^{-1}(b)\}).$$

Posons x_i l'image de f_i^{-1} :

$$x_i = f_i^{-1}(f_i(x) \cap y'_i).$$

Comme $x_i \subseteq x$ et $x \in \mathcal{F}_f^{\perp\perp}$, on a $x_i \in \mathcal{F}_f^{\perp\perp}$. Par ailleurs, $f_i(x) \cap y'_i \subseteq f_i(x_i)$. Comme l'image d'une partie finie par f_i est finie, il suffit de montrer que $x_i \in \mathcal{F}_f^\perp$ pour en déduire que $f_i(x_i)$ et $f_i(x) \cap y'_i$ sont finis.

Soit $y = (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}(B_i)$.

On considère la fonction f_i^{-1} comme une fonction partielle sur $y_i \cap y'_i$, l'image de $b \in y_i \cap y'_i$ étant définie quand $b \in f_i(x)$. On a alors l'inclusion :

$$x_i \cap x_y \subseteq f_i^{-1}(y_i \cap y'_i).$$

En effet, si $a \in x_i \cap x_y$, alors il existe $b \in f_i(x) \cap y'_i$ tel que $a = f_i^{-1}(b)$. Comme f_i est croissante, on a que $b \in f_i(\{a\}) \subseteq f_i(x_y) \subseteq y_i$ et $a \in f_i^{-1}(y_i \cap y'_i)$.

Comme $y_i \in \mathcal{F}(B_i)$ et $y'_i \in \mathcal{F}(B_i)^\perp$, on a $y_i \cap y'_i$ est fini. Or f_i^{-1} est une fonction (partielle) et $x_i \cap x_y \subseteq f_i^{-1}(y_i \cap y'_i)$, donc $x_i \cap x_y$ fini.

En résumé, pour tout $x \in \mathcal{F}_f^{\perp\perp}$, pour tout $i \in I$ et pour tout $y'_i \in \mathcal{F}(B_i)^\perp$, $x_i \in \mathcal{F}_f^\perp$ et $x_i \in \mathcal{F}_f^{\perp\perp}$, d'où x_i est finie, et donc $f_i(x) \cap y'_i \subseteq f_i(x_i)$ est finie. Ainsi, pour tout $i \in I$, on a que $f_i(x) \in \mathcal{F}(B_i)$, donc $x \in \mathcal{F}_f$. On en déduit que $\mathcal{F}_f^{\perp\perp} \subseteq \mathcal{F}_f$. Comme l'inclusion réciproque est toujours vraie, on a que $\mathcal{F}_f = \mathcal{F}_f^{\perp\perp}$. C'est une structure finitaire. $\square$

Nous allons maintenant passer en revue les différentes constructions dans **RelFin**, donner quelques intuitions sur leur structure et appliquer le Théorème II.1 page 50 pour prouver les descriptions de certaines des structures qui sont exhibées dans la Figure II.1 page 52.

II.2 Structure additive, limites et co-limites

Produits et co-produits. Le produit $A_1 \& A_2$ et le coproduit $A_1 \oplus A_2$ de deux espaces de finitude coïncident en tant qu'espaces de finitude. Les produits et coproduits dénombrables existent aussi dans la catégorie **RelFin**. Mais, bien que leurs trames coïncident et soient l'union disjointe $|\oplus_{i \in I} A_i| = |\&_{i \in I} A_i| = \uplus_{i \in I} |A_i|$ leurs structures finitaires sont différentes. Nous allons les décrire dans les lignes qui suivent.

Commençons par construire la structure finitaire du produit. On applique pour cela le Théorème II.1 page 50 avec la fonction finie

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(\uplus_{i \in I} |A_i|) &\rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{P}(|A_i|) \\ \uplus_{i \in I} u_i &\mapsto (u_i)_{i \in I} \end{aligned}$$

Orthogonal : $ A^\perp = A \quad \mathcal{F}(A^\perp) = \mathcal{F}(A)^\perp$	Unités : $ 0 = \top = \emptyset \quad \mathcal{F}(0) = \mathcal{F}(\top) = \{\emptyset\}$ $ 1 = \perp = \{*\} \quad \mathcal{F}(1) = \mathcal{F}(\perp) = \{\emptyset, \{*\}\}$
additifs : $ \&_i A_i = \oplus_i A_i = \uplus_i A_i $ $\mathcal{F}(\oplus_i A_i) = \left\{ \uplus_{j \in J} u_j \mid J \text{ fini}, \forall j \in J, u_j \in \mathcal{F}(A_j) \right\}$ $\mathcal{F}(\&_i A_i) = \left\{ \uplus_{i \in I} u_i \mid \forall i \in I, u_i \in \mathcal{F}(A_i) \right\}$	
Multiplicatifs : $ A_1 \wp A_2 = A_1 \otimes A_2 = A_1 \times A_2 $ $\mathcal{F}(A_1 \wp A_2) = \left\{ R \subseteq A_1 \times A_2 \mid \begin{array}{l} \forall u \in \mathcal{F}(A_1)^\perp, R \cdot u \in \mathcal{F}(A_2) \\ \forall v \in \mathcal{F}(A_2)^\perp, {}^t R \cdot v \in \mathcal{F}(A_1) \end{array} \right\}$ $\mathcal{F}(A_1 \otimes A_2) = \left\{ w \subseteq A_1 \times A_2 \mid \Pi_1(w) \in \mathcal{F}(A_1) \text{ et } \Pi_2(w) \in \mathcal{F}(A_2) \right\}$ où $\Pi_1(w) := \{x_1 \in A_1 \mid \exists x_2 \in A_2 , (x_1, x_2) \in w\}$ $\Pi_2(w) := \{x_2 \in A_2 \mid \exists x_1 \in A_1 , (x_1, x_2) \in w\}$	
Exponentiels : $!A = ?A = \mathcal{M}_{\text{fin}}(A) = \{\mu : A \rightarrow \mathcal{N}at \mid \mu(a) > 0 \text{ pour un nombre fini de } a \in A \}$ $\mathcal{F}(!A) = \{M \subseteq \mathcal{M}_{\text{fin}}(A) \mid \Pi(M) \in \mathcal{F}(A)\}$ $\mathcal{F}(?A) = \left\{ M \subseteq \mathcal{M}_{\text{fin}}(A) \mid \forall u \in \mathcal{F}(A)^\perp, \mathcal{M}_{\text{fin}}(u) \cap M \text{ fini} \right\}$ où $\Pi(M) := \{a \in A \mid \exists \mu \in M, a \in \mu\} = \cup\{ \mu , \mu \in M\}$	

 FIG. II.1: Interprétation dans **RelFin** des formules de LL

qui commute aux unions. Nous en déduisons que la formule suivante définit une structure finitaire :

$$\mathcal{F} = \left\{ \uplus_{i \in I} u_i ; \forall i \in I, u_i \in \mathcal{F}(A_i) \right\}. \quad (\text{II.1})$$

Nous démontrons à la Proposition II.5 page 53 suivante que, muni de cette structure finitaire, $\&_{i \in I} A_i$ est le produit des A_i (cette proposition est esquissée dans [Ehr05, §3]).

Pour ce qui est du co-produit, on peut le déduire du produit par orthogonalité, mais il est intéressant de comprendre sa structure finitaire. L'inclusion $A_i \xrightarrow{\iota_i} \oplus_{i \in I} A_i$ doit être une relation finitaire. Ainsi, il faut que pour toute partie u_i finitaire dans A_i , la partie $\iota_i(u_i)$ soit finitaire dans le co-produit $\oplus_{i \in I} A_i$. De plus, toute structure finitaire est stable par union finie (voir (F3) de la Proposition II.2 page 45). La famille suivante est donc formée de parties finitaires dans $\oplus_{i \in I} A_i$.

$$\mathcal{F} = \left\{ \uplus_{j \in J} u_j ; J \subseteq I \text{ fini}, \forall j \in J, u_j \in \mathcal{F}(A_j) \right\}.$$

De plus, cette formule coïncide avec l'orthogonal de la structure finitaire de $\&_{i \in I} (A_i^\perp)$ donnée à l'Équation (II.1). Il ne nous reste plus qu'à montrer que c'est bien le co-produit. C'est ce qui est fait à la Proposition suivante.

Proposition II.5. *Les produits et co-produits d'une famille dénombrable d'espaces de finitude $(A_i)_{i \in I}$ existent dans RelFin. Leur trame est*

$$\left| \&_{i \in I} A_i \right| = \left| \oplus_{i \in I} A_i \right| = \uplus_{i \in I} |A_i|$$

Leurs structures finitaires respectives sont

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left(\oplus_{i \in I} A_i \right) &= \left\{ \uplus_{j \in J} u_j ; J \subseteq I \text{ fini}, \forall j \in J, u_j \in \mathcal{F}(A_j) \right\}. \\ \mathcal{F} \left(\&_{i \in I} A_i \right) &= \left\{ \uplus_{i \in I} u_i ; \forall i \in I, u_i \in \mathcal{F}(A_i) \right\}. \end{aligned}$$

Démonstration. Montrons que l'espace de finitude $\oplus_{i \in I} A_i$ est la co-limite des A_i . La relation $|A_i| \xrightarrow{\iota_i} \uplus_{i \in I} |A_i|$ est finitaire. En effet, d'après la définition de $\mathcal{F}$, l'image par ι_i de toute partie finitaire de A_i est dans $\mathcal{F}$. De plus l'image réciproque par ι_i de $\cup_{i \in I} u'_i$ avec pour tout $i \in I, u'_i \in \mathcal{F}(A_i)^\perp$, c'est-à-dire d'une partie anti-finitaire de $\oplus_{i \in I} A_i$, est $u'_i \in \mathcal{F}(A_i)^\perp$ est anti-finitaire. Soient B un espace de finitude et $A_i \xrightarrow{R_i} B$ des relations finitaires. Comme la trame $\uplus_{i \in I} |A_i|$ est la co-limite des $|A_i|$ dans Rel, il existe une unique relation $\uplus_{i \in I} |A_i| \xrightarrow{R} |B|$ telle que $A_i \xrightarrow{R_i} B = A_i \xrightarrow{R \circ \iota_i} B$. Elle est définie par

$$\forall i \in I, \forall a_i \in A_i, \forall b \in B, a_i R b \Leftrightarrow a_i R_i b.$$

Soit $\uplus_{j \in J} u_j$ une partie finitaire de $\oplus_{i \in I} A_i$. Comme les R_i sont des relations finitaires, pour tout $j \in J, R_j \cdot u_j \in \mathcal{F}(B)$. De plus, J est fini, donc $R \cdot \uplus_{j \in J} u_j = \cup_{j \in J} R_j \cdot u_j$ est une partie finitaire de B . L'image réciproque ${}^t R \cdot v' = \uplus_{i \in I} {}^t R_i \cdot v'$ d'une partie v' anti-finitaire dans B

par R est anti-finitaire, car pour tout $i \in I$, ${}^t R_i \cdot v'$ est anti-finitaire. Nous avons donc montré que R est une relation finitaire.

Pour le produit, pour tout $j \in I$, les projections $\&_{i \in I} A_i \xrightarrow{\pi_j} A_j$ sont finitaires car

$$\uplus_{i \in I} u_i \in \mathcal{F}(\&_{i \in I} A_i), \pi_j \cdot (\uplus_{i \in I} u_i) = u_j,$$

donc l'image directe d'une partie finitaire est finitaire, et

$$\forall i \in I, \forall u'_i \in \mathcal{F}(A)_i^\perp, \begin{cases} {}^t \pi_i \cdot u'_i = u'_i, \\ {}^t \pi_j \cdot u'_i = \emptyset, i \neq j. \end{cases}$$

Soit B un espace de finitude et pour tout $i \in I$, $B \xrightarrow{R_i} A_i$ des relations finitaires. Comme la trame de $\&_{i \in I} A_i$ est le produit dans **Rel**, il existe une unique relation $B \xrightarrow{R} \&_{i \in I} A_i$ telle que pour tout $i \in I$, $B \xrightarrow{R_i} A_i = B \xrightarrow{\pi_i \circ R} A_i$. On vérifie facilement que cette relation R est finitaire. $\square$

Exemple II.6. Nous avons défini à l'Exemple II.1 page 46 l'interprétation du type $\mathcal{B}$ et à l'Exemple II.2 page 46 celle du type $\mathcal{Nat}$. Dans **RelFin**, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{Nat}$ ont respectivement la même sémantique que les types $1 \oplus 1$ et $\oplus_{n \in \mathbb{N}} 1$, i.e.

$$\mathcal{B} \simeq_{\mathbf{RelFin}} 1 \oplus 1 \quad \mathcal{Nat} \simeq_{\mathbf{RelFin}} \oplus_{n \in \mathbb{N}} 1.$$

La catégorie RelFin n'est pas complète. Nous venons de voir que les produits et co-produits existent dans **RelFin**. Ce n'est pas le cas de toutes les limites et co-limites. On rencontre en effet le même problème que dans **Rel** : les égaliseurs n'existent pas toujours. Ceci met en valeur la différence entre les espaces de finitude et les espaces de cohérence dans lesquels tous les égaliseurs existent [Mel08b].

Commençons par caractériser les égaliseurs dans **Rel**. Comme l'égaliseur (resp. co-égaliseur) est toujours un monomorphisme (resp. épimorphisme), nous allons commencer par caractériser les monomorphismes (resp. épimorphismes) dans **Rel**.

Lemme II.6. *Étant donnés deux ensembles finis A et B , une relation finitaire $A \xrightarrow{R} B$ est un monomorphisme si et seulement si tout élément a de A admet au moins une image par R dont il est l'unique antécédent, i.e.*

$$\forall a \in A, \exists b \in B ; a R b \text{ et } \forall a' \in A, a' R b \Rightarrow a = a'. \quad (\text{II.2})$$

De même, une relation $A \xrightarrow{R} B$ est un épimorphisme si et seulement si

$$\forall b \in B, \exists a \in A ; a R b \text{ et } \forall b' \in B, a R b' \Rightarrow b = b'.$$

Démonstration. Supposons que R soit un monomorphisme. Si $a \in A$ n'a pas d'image par R , alors les relations $R_1 = \{(x_1, a)\}$ et $R_2 = \{(x_2, a)\}$ entre $X = \{x_1, x_2\}$ et A sont différentes

mais vérifient $R \circ R_1 = R \circ R_2 = \emptyset$; on aboutit donc à une contradiction. Supposons qu'il existe un $a \in A$ qui n'ait pas d'image par R dont il est l'unique antécédent, i.e.

$$\forall b \in B, a R b \Rightarrow \exists a' \neq a ; a' R b.$$

On note I_1 la relation entre A et A qui relie tous les points et I_2 la relation qui relie tous les points sauf (a, a) , i.e.

$$\begin{aligned} I_1 &= A \times A, \\ I_2 &= (A \times A) \setminus \{(a, a)\} \end{aligned}$$

On vérifie facilement que $I_1 \neq I_2$.

Pourtant, on a $R \circ I_1 = R \circ I_2$. En effet, I_1 et I_2 coïncident sauf sur a . De plus,

$$\begin{aligned} a(R \circ I_1)b &\iff \exists a' ; a' R b \\ &\iff \exists a' \neq a ; a' R b \\ &\iff a(R \circ I_2)b. \end{aligned}$$

On aboutit à une contradiction avec le fait que R soit un monomorphisme.

Réciproquement, la Condition (II.2) assure que R est un monomorphisme dans **Rel**. En effet, soient R_1 et R_2 deux relations entre X et A , telles que

$$R \circ R_1 = R \circ R_2.$$

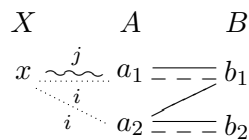
Soient $x \in X$ et $a \in A$ tels que $x R_1 a$. D'après la Condition (II.2), il existe $b \in B$ tel que $a R b$ et a est l'unique antécédent de b . On en déduit que $x(R \circ R_1)b$, puis que $x(R \circ R_2)b$. Or, il n'existe qu'un seul $a \in A$ tel que $a R b$. On en déduit que $x R_2 a$. On a donc montré que $x R_1 a$ implique $x R_2 a$. Par symétrie, on en déduit que $R_1 = R_2$.

La seconde partie du lemme se déduit de la première en remarquant que si R est un épimorphisme, alors ${}^t R$ est un monomorphisme de $A^\perp$ dans $B^\perp$. $\square$

Le contre-exemple qui suit m'a été proposé par Jonas Frey. Il montre que l'égaliseur de deux relations n'existe pas toujours.

Ce contre-exemple utilise des espaces finis. Or, toute relation entre deux ensembles finis est finitaire. On en déduit que deux relations entre ensembles finis admettent un égaliseur dans **Rel** si et seulement si elles admettent un égaliseur dans **RelFin**. Il nous suffit donc d'exhiber un contre-exemple dans **Rel** entre ensembles finis pour en déduire un contre-exemple dans **RelFin**. Pour les co-égaliseurs, il suffit de prendre le contre-exemple miroir.

Contre-Exemple II.7. Les deux relations R_- et R_{--} dessinées ci-dessous respectivement en plein et en tirets n'admettent pas d'égaliseurs.



En effet, chacune des relations i et j égalise R_- et R_{--} . Pourtant, elles ne peuvent pas être factorisées par le même égaliseur. En effet un égaliseur, s'il existe, est un monomorphisme, et d'après le Lemme II.6 précédent, les seuls monomorphismes à valeurs dans $A = \{a_1, a_2\}$ sont les suivants

$$\begin{array}{ccc}
 \emptyset & a_1 & x_1 \text{ — } a_1 \\
 & a_2 & x_2 \text{ — } a_2 \\
 \\
 x \text{ — } a_1 & & a_1 \\
 & a_2 & x \text{ — } a_2 \\
 \\
 x \text{ — } a_1 & & x \text{ — } a_1 \\
 & & \searrow \\
 & & a_2
 \end{array}$$

Parmi ceux-ci seuls le vide et les morphismes i et j sont des égaliseurs de R_1 et R_2

$$\begin{array}{ccc}
 A & B & \\
 x \text{ — } a_1 & \text{—} & b_1 \\
 \searrow i & & \nearrow \\
 a_2 & \text{—} & b_2
 \end{array}
 \quad \text{et} \quad
 \begin{array}{ccc}
 A & B & \\
 x \text{ — } a_1 & \text{—} & b_1 \\
 \searrow j & & \nearrow \\
 a_2 & \text{—} & b_2
 \end{array}$$

Or, la relation i ne se factorise pas à travers j , et inversement, la relation j ne se factorise pas à travers i . Enfin, ni i ni j ne se factorisent à travers le vide. On en déduit qu'aucun des monomorphismes à valeurs dans A n'est l'égaliseur de R_1 et de R_2 .

II.3 Structure multiplicative

Dans la catégorie **Rel**, qui est symétrique monoïdale close, les structures monoïdales et fonctionnelles sont données par le produit cartésien

$$|A_1 \otimes A_2| = |A_1 \multimap A_2| = |A_1| \times |A_2|.$$

Afin de transporter la structure monoïdale de **Rel** dans **RelFin**, nous devons équiper cette trame d'une structure finitaire telle que le produit tensoriel soit un foncteur monoïdal symétrique.

Étant données deux relations finitaires $R_1 \subseteq A_1 \times B_1$ et $R_2 \subseteq A_2 \times B_2$, la relation $R_1 \otimes R_2$ est définie par

$$(a_1, a_2) (R_1 \otimes R_2) (b_1, b_2) \iff a_1 R_1 b_1 \text{ et } a_2 R_2 b_2.$$

Notons Π_1 (resp. Π_2) la projection de $|A_1| \times |A_2|$ sur $|A_1|$ (resp. $|A_2|$). Pour que $R_1 \otimes R_2$ soit finitaire, il faut que pour tout $w \in \mathcal{F}(A_1 \otimes A_2)$, l'image $R_1 \otimes R_2 \cdot w = (R_1 \cdot \Pi_1(w)) \times (R_2 \cdot \Pi_2(w))$ soit finitaire. Nous allons montrer que cette condition suffit à caractériser la structure finitaire du tenseur. Pour cela, nous allons appliquer le Théorème II.1 page 50 à la fonction de projections

$$\begin{aligned}
 \Pi : \mathcal{P}(|A_1| \times |A_2|) &\rightarrow \mathcal{P}(|A_1|) \times \mathcal{P}(|A_2|) \\
 w &\mapsto (\Pi_1(w), \Pi_2(w)).
 \end{aligned}$$

II.3. Structure multiplicative

Cette fonction est *finie* et *commute aux unions*. On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\Pi &= \{w \in \mathcal{P}(|A_1| \times |A_2|) ; \Pi_1(w) \in \mathcal{F}(A_1), \Pi_2(w) \in \mathcal{F}(A_2)\} \text{ et} \\ (\mathcal{F}_\Pi)^\perp &= \{w' \in \mathcal{P}(|A_1| \times |A_2|) ; \forall u_1 \in \mathcal{F}(A_1), \forall u_2 \in \mathcal{F}(A_2), w' \cap (u_1 \times u_2) \text{ finie}\}\end{aligned}$$

sont des structures finitaires orthogonales. Donc $\mathcal{F}_\Pi = (\mathcal{F}_\Pi)^{\perp\perp}$. Or, par définition de l'orthogonal dans $|A_1| \times |A_2|$,

$$(\mathcal{F}(A_1) \times \mathcal{F}(A_2))^\perp = \{w' \in \mathcal{P}(|A_1| \times |A_2|) ; \forall u_1 \in \mathcal{F}(A_1), \forall u_2 \in \mathcal{F}(A_2), w' \cap (u_1 \times u_2) \text{ finie}\}$$

d'où $(\mathcal{F}_\Pi)^\perp = (\mathcal{F}(A_1) \times \mathcal{F}(A_2))^\perp$. On en déduit que $\mathcal{F}_\Pi^{\perp\perp}$ coïncide avec la structure finitaire $\mathcal{F}(A_1 \otimes A_2)$ donnée à la Proposition II.4 page 48.

La proposition suivante résume ces résultats.

Proposition II.7. [Ehr05, §3] Soient A_1 et A_2 deux espaces de finitude. Les structures finitaires des constructions multiplicatives sont

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(A_1 \otimes A_2) &= \{w \subseteq |A_1| \times |A_2| ; \Pi_1(w) \in \mathcal{F}(A_1) \text{ et } \Pi_2(w) \in \mathcal{F}(A_2)\}, \\ \mathcal{F}(A_1 \wp A_2) &= \left\{ w \subseteq |A_1| \times |A_2| ; \begin{array}{l} \forall u'_1 \in \mathcal{F}(A_1)^\perp, \forall u'_2 \in \mathcal{F}(A_2)^\perp, \\ w \cap (u'_1 \times u'_2) \text{ finie} \end{array} \right\}, \\ \mathcal{F}(A_1 \multimap A_2) &= \left\{ R \subseteq |A_1| \times |A_2| ; \forall u_1 \in \mathcal{F}(A_1), \forall u'_2 \in \mathcal{F}(A_2)^\perp, R \cap (u_1 \times u'_2) \text{ finie} \right\}.\end{aligned}$$

Exemple II.8. L'espace de finitude associé à $\mathcal{B}^{\otimes n} \stackrel{\text{def}}{=} \overbrace{\mathcal{B} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}}^n$, pour $n \in \mathbb{N}$ est

$$\begin{aligned}|\mathcal{B}^{\otimes n}| &= \{(b_1, \dots, b_n) ; \forall i \leq n, b_i \in \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}\}, \\ \mathcal{F}(\mathcal{B}^{\otimes n}) &= \mathcal{P}(|\mathcal{B}^{\otimes n}|).\end{aligned}$$

En effet, la trame étant finie, il n'existe qu'une seule structure finitaire (voir (F5) de la Proposition II.2 page 45).

Pour tout $w \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on note $\Pi_1(w)$ (resp. $\Pi_2(w)$) la projection de w sur la première composante (resp. sur la deuxième) et on note $\Pi_{\mathbb{N}}(w) = \Pi_1(w) \cup \Pi_2(w)$.

L'espace de finitude associé à $\mathcal{Nat} \otimes \mathcal{Nat}$ est donné par

$$\begin{aligned}|\mathcal{Nat} \otimes \mathcal{Nat}| &= \{(p, q) ; p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}\} \\ \mathcal{F}(\mathcal{Nat} \otimes \mathcal{Nat}) &= \{w \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} ; \Pi_1(w) \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}), \Pi_2(w) \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})\} \\ &= \{w \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} ; \Pi_{\mathbb{N}}(w) \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})\}\end{aligned}$$

où l'on utilise le fait que l'union de deux parties est finitaire si et seulement si chacune des parties sont finitaires (voir (F3) de la Proposition II.2 page 45).

Plus généralement, l'espace de finitude associé à $\mathcal{Nat}^{\otimes n}$ est donné par

$$\begin{aligned}|\mathcal{Nat}^{\otimes n}| &= \{(p_i)_{i \leq n} ; \forall i \leq n, p_i \in \mathbb{N}\} \\ \mathcal{F}(\mathcal{Nat}^{\otimes n}) &= \{w \subseteq \mathbb{N}^n ; \forall i \leq n, \Pi_i(w) \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})\}.\end{aligned}$$

Grâce à la caractérisation des structures finitaires, Ehrhard [Ehr05] a donné deux caractérisations des relations finitaires plus simples que la Définition II.2 page 45, mais dissymétriques. On obtient ainsi

Proposition II.8. [Ehr05] Soient A_1 et A_2 deux espaces de finitude et $R \subseteq |A_1| \times |A_2|$. On a équivalence entre les propositions suivantes :

(RF1) R est une relation finitaire, i.e.

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{F}(A), R \cdot u &\stackrel{\text{def}}{=} \{b \in |B| ; \exists a \in u, (a, b) \in R\} \in \mathcal{F}(B), \\ \forall v' \in \mathcal{F}(B)^\perp, {}^t R \cdot v' &\stackrel{\text{def}}{=} \{a \in |A| ; \exists b \in v', (a, b) \in R\} \in \mathcal{F}(A)^\perp. \end{aligned}$$

(RF2) R est une partie finitaire de $A_1 \multimap A_2$, i.e. $R \in \mathcal{F}(A_1 \multimap A_2)$.

(RF3) L'image par R de toute partie finitaire de A_1 est finitaire dans A_2 et l'image inverse d'un point de A_2 est anti-finitaire dans A_1 , i.e.

$$\begin{aligned} \forall u_1 \in \mathcal{F}(A_1), R \cdot u_1 &\in \mathcal{F}(A_2), \\ \forall a_2 \in |A_2|, {}^t R \cdot \{a_2\} &\in \mathcal{F}(A_1)^\perp. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathcal{F}(A_1 \wp A_2) = \left\{ R \subseteq |A_1| \times |A_2| \mid \begin{array}{l} \forall u \in \mathcal{F}(A_1)^\perp, R \cdot u \in \mathcal{F}(A_2) \\ \forall v \in \mathcal{F}(A_2)^\perp, {}^t R \cdot v \in \mathcal{F}(A_1) \end{array} \right\}$$

Fait II.9. Une partie $u' \in \mathcal{P}(|A|)$ est une relation finitaire de A dans $1 = (\{1\}, \mathcal{P}(\{1\}))$ si et seulement si $|u'| \in \mathcal{F}(A)^\perp$.

Exemple II.9. Toutes les relations de $|B|$ dans $|B|$ sont finitaires. En effet, toutes les parties du domaine et du co-domaine sont finies donc finitaires et anti-finitaires.

Une relation de $|\mathcal{Nat}| = \mathbb{N}$ dans $|\mathcal{Nat}|$ est finitaire si et seulement si elle préserve les parties finies. En effet, les parties finitaires de $\mathcal{Nat}$ sont les parties finies de $\mathbb{N}$ et toute partie de $\mathbb{N}$ est anti-finitaire dans $\mathcal{Nat}$.

II.4 Structure exponentielle

D'après la Proposition II.3 page 48, le foncteur oubli transporte la structure de l'exponentielle de **RelFin** dans la structure exponentielle de **Rel**. Nous allons utiliser cette propriété afin de donner une caractérisation de la structure finitaire de l'exponentielle.

La modalité exponentielle est interprétée dans **Rel** par les multi-ensembles finis : $!A \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}_{\text{fin}}(|A|)$. On souhaite munir $!A$ d'une structure finitaire telle que les structures de co-monoïde et de co-monade dans **Rel** soient dans **RelFin**. En particulier, on veut que les morphismes ϵ_A et d_A décrits ci-dessous soient finitaires :

$$\begin{array}{ll} \epsilon_A : !A \rightarrow A & d_A : !A \rightarrow !A \otimes !A \\ [a] \mapsto a. & \mu \mapsto (\mu_1, \mu_2) \text{ tel que } \mu = \mu_1 + \mu_2 \end{array}$$

Pour tout multi-ensemble μ , notons $|\mu| \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in |A| ; \mu(a) \neq 0\}$ son support. Remarquons que pour tout $M \subseteq \mathcal{M}_{\text{fin}}(|A|)$, l'image $d_A \cdot M$ vérifie

$$\{([a], \mu) ; [a] + \mu \in M\} \subseteq d_A \cdot M.$$

Pour que d_A soit finitaire, il faut que pour tout $M \in \mathcal{F}(!A)$, $d_A \cdot M$ soit finitaire dans $!A \otimes !A$ (voir la Définition II.2 page 45). Or, d'après la caractérisation de la structure finitaire sur le tenseur, une partie de $!A \times !A$ est finitaire dans $!A \otimes !A$ si et seulement si ses deux projections sont finitaires. Notamment, la projection sur la première composante de $(d_A \cdot M)$ doit être finitaire dans A . On en déduit que :

$$\{[a] ; \exists \mu \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(|A|), [a] + \mu \in M\} \in \mathcal{F}(!A)$$

Si ϵ_A est une relation finitaire, alors l'image de cette partie par ϵ_A doit être finitaire cette fois dans A :

$$\{a \in |A| ; \exists \mu \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(|A|), [a] + \mu \in M\} = \{a ; \exists \mu \in M ; a \in |\mu|\} \in \mathcal{F}(A)$$

Notons Π_A la fonction qui à M associe l'ensemble ci-dessus :

$$\begin{aligned} \Pi_A : \mathcal{P}(\mathcal{M}_{\text{fin}}(|A|)) &\rightarrow \mathcal{P}(|A|) \\ M &\mapsto \Pi_A(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{a ; \exists \mu \in M, a \in |\mu|\} = \cup\{|\mu| ; \mu \in M\}. \end{aligned}$$

Nous venons de montrer que si d_A et ϵ_A sont finitaires, alors pour tout $M \in \mathcal{F}(!A)$, la projection $\Pi_A(M) \in \mathcal{F}(A)$. Autrement dit, la structure finitaire de $!A$ doit être stable par projection.

Nous allons montrer que cette condition de stabilité est suffisante pour caractériser la structure finitaire de la modalité exponentielle. Le Théorème II.1 page 50 permet de montrer que l'ensemble $\{M \subseteq \mathcal{M}_{\text{fin}}(|A|) ; \Pi_A(M) \in \mathcal{F}(A)\}$ est une structure finitaire. En effet, la fonction de projection $\Pi_A : \mathcal{P}(\mathcal{M}_{\text{fin}}(|A|)) \rightarrow \mathcal{P}(|A|)$ est *finie* et *commute aux unions*. Pour toute partie $u \subseteq |A|$, on note

$$u^! = \{\mu \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(A) ; |\mu| \subseteq u\}.$$

On a alors deux structures finitaires orthogonales :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\Pi_A} &= \{u \subseteq \mathcal{M}_{\text{fin}}(A) ; \Pi_A(u) \in \mathcal{F}(A)\}, \\ \mathcal{F}_{\Pi_A}^\perp &= \{u' \subseteq \mathcal{M}_{\text{fin}}(A) ; \forall u \in \mathcal{F}(A), u' \cap u^! \text{ finie}\}. \end{aligned}$$

Comme ce sont des structures finitaires, on a $\mathcal{F}_{\Pi_A} = \mathcal{F}_{\Pi_A}^{\perp\perp}$. De plus, $\mathcal{F}_{\Pi_A}^{\perp\perp}$ coïncide avec la structure finitaire $\mathcal{F}(!A)$ donnée à la Proposition II.4 page 48. On en déduit la proposition suivante.

Proposition II.10. *Soit A un espace de finitude. Les exponentielles $!A$ et $?A$ sont des espaces de finitude définis par leur trame*

$$|!A| = |?A| = \mathcal{M}_{\text{fin}}(|A|)$$

et par leur structure finitaire

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(!A) &= \{w \subseteq \mathcal{M}_{\text{fin}}(|A|) ; \Pi_A(w) \in \mathcal{F}(A)\}, \\ &= \left\{w \subseteq \mathcal{M}_{\text{fin}}(|A|) ; \exists u \in \mathcal{F}(A), w \subseteq u^!\right\} \\ \mathcal{F}(?A) &= \left\{w \subseteq \mathcal{M}_{\text{fin}}(|A|) ; \forall v \in \mathcal{F}(A)^\perp, w \cap v^! \text{ finie}\right\}.\end{aligned}$$

L'exponentielle $!A$ vérifie la relation de De Morgan $(!A)^\perp = ?(A^\perp)$.

Une exponentielle libre. On peut même montrer que la modalité exponentielle des espaces de finitude hérite de la liberté de son homologue dans **Rel**. Rappelons en effet que le modèle relationnel forme une catégorie de Lafont (voir la Définition I.4 page 19), autrement dit l'exponentielle du modèle relationnel est libre.

Proposition II.11. *Pour tout espace de finitude relationnel A , $(!A, d_A, e_A)$ est un co-monoïde librement engendré dans **RelFin**.*

Démonstration. Commençons par montrer que la relation $\epsilon_A \subseteq !A \times A$ définie par sa trame $\{([a], a) ; a \in |A|\}$ est finitaire. En effet, l'image directe de toute partie finitaire $M \in \mathcal{F}(!A)$ vérifie

$$\epsilon_A \cdot M \subseteq \Pi_A(M) \in \mathcal{F}(A).$$

De plus, l'image réciproque ${}^t\epsilon_A \cdot \{a\}$ d'un point $a \in |A|$ est finie, donc anti-finitaire.

Soient B un espace de finitude muni d'une structure de co-monoïde (d, e) . On note $d^n : B \rightarrow B^{\otimes n}$ la version n -aire de d , c'est une relation finitaire. Soit R une relation finitaire entre B et A qui respecte la structure de co-monoïde. Comme $\mathcal{M}_{\text{fin}}(|A|)$ est le co-monoïde libre dans **Rel** et R est un morphisme de co-monoïde, il existe une unique relation $\tilde{R}$ telle que le triangle suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{R} & A \\ \tilde{R} \downarrow & \nearrow \epsilon_A & \\ !A & & \end{array}$$

Cette dernière est définie par sa trame :

$$\tilde{R} = \{(b, \mu) ; b d^n(b_1, \dots, b_n), \mu = [a_1, \dots, a_n], \forall i \leq n, b_i R a_i\}.$$

Il nous suffit de montrer que $\tilde{R}$ est finitaire. Soit u une partie finitaire de B . D'après la Proposition II.10 page 59, il suffit de montrer que $\Pi_A(\tilde{R} \cdot u) \in \mathcal{F}(A)$ pour en déduire que $\tilde{R} \cdot u \in \mathcal{F}(!A)$. Remarquons tout d'abord que

$$\Pi_A(\tilde{R} \cdot u) \subseteq R \cdot \Pi_1(d \cdot u).$$

En effet, prenons $a \in \Pi_A(\tilde{R} \cdot u)$. Il existe $n \geq 1, b \in u, b_0, b_1, \dots, b_n \in |B|$ et $a_1, \dots, a_n$ tels que $b d^{n+1}(b_0, \dots, b_n), b_i R a_i$ et surtout $b_0 R a$. Comme le co-monoïde B est associatif, on a aussi $b d(b_0, b')$ et $b' d^n(b_1, \dots, b_n)$, d'où $b_0 \in \Pi_1(d \cdot u)$, on en déduit l'inégalité ci-dessus.

II.4. Structure exponentielle

Comme (B, d, e) est un co-monoïde dans **RelFin**, l'image $d \cdot u$ est finitaire dans $B \otimes B$, c'est-à-dire chacune des projections de $d \cdot u$ est finitaire dans B et en particulier la projection sur la première composante $\Pi_1(d \cdot u) \in \mathcal{F}(B)$. Donc $\tilde{R} \cdot u$ est finitaire dans $!A$. Enfin, l'image réciproque ${}^t\tilde{R} \cdot \{\mu\}$ d'un multi-ensemble $\mu \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(|A|)$ est anti-finitaire dans B car si $\mu = [a_1, \dots, a_n]$ alors

$${}^t\tilde{R} \cdot \{\mu\} = {}^t d^n \cdot \{(b_1, \dots, b_n) ; \forall i \leq n, b_i \in {}^t R \cdot \{a_i\}\}.$$

Or d^n est finitaire, donc ${}^t\tilde{R} \cdot \{\mu\}$ est anti-finitaire. $\square$

Exemple II.10. Rappelons que la trame de $\mathcal{B}$ est l'ensemble à deux éléments $\{T, F\}$. La trame de $!\mathcal{B}$ est constituée des multi-ensembles contenant T et F . Pour tous p et q , on note $T^p F^q$ le multi-ensemble contenant p fois T et q fois F . On a donc

$$|!\mathcal{B}| = |?\mathcal{B}| = \{T^p F^q ; p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}\}.$$

Pour la structure finitaire, d'après la Proposition II.10 précédente,

$$\mathcal{F}(!\mathcal{B}) = \{M \subseteq \mathcal{M}_{\text{fin}}(|\mathcal{B}|) ; \Pi_{\mathcal{B}}(M) \in \mathcal{F}(\mathcal{B})\}.$$

Or, rappelons que $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ est l'ensemble de toutes les parties de $\mathcal{B}$ (voir l'Exemple II.1 page 46). Ainsi,

$$\mathcal{F}(!\mathcal{B}) = \mathcal{P}(\mathcal{M}_{\text{fin}}(T, F)).$$

Par ailleurs, rappelons que $\mathcal{B}^\perp$ a la même sémantique que $\mathcal{B}$ dans les espaces de finitude (voir l'Exemple II.1 page 46). D'après la Proposition II.10, la structure finitaire de $?(\mathcal{B}^\perp)$ est

$$\mathcal{F}(?(\mathcal{B}^\perp)) = \{M \subseteq \mathcal{M}_{\text{fin}}(|\mathcal{B}|) ; \forall v \in \mathcal{P}(\{T, F\}), M \cap v^\dagger \text{ fini}\}.$$

Soit $M \in \mathcal{F}(?(\mathcal{B}^\perp))$. D'après la formule ci-dessus, en prenant $v = \{T, F\}$, on obtient une intersection $M \cap v^\dagger = M \cap \{T^p F^q ; p, q \in \mathbb{N}\}$ finie. On en déduit que M est une partie finie. On a donc

$$\mathcal{F}(?(\mathcal{B}^\perp)) = \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathcal{M}_{\text{fin}}(T, F)).$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'interprétation de $(!\mathcal{B})^{\otimes n}$ est donnée par

$$\begin{aligned} |(!\mathcal{B})^{\otimes n}| &= \{(T^{p_i} F^{q_i})_{1 \leq i \leq n} ; \forall 1 \leq i \leq n, p_i, q_i \in \mathbb{N}\} \\ \mathcal{F}((!\mathcal{B})^{\otimes n}) &= \mathcal{P}(|(!\mathcal{B})^{\otimes n}|), \end{aligned}$$

En effet, soit $W \subseteq |(!\mathcal{B})^{\otimes n}|$. On a les équivalences suivantes :

$$W \in \mathcal{F}((!\mathcal{B})^{\otimes n})$$

- si et seulement si les projections $\Pi_{!B, i}(W)$ sur chacune des composantes sont finitaires dans $!\mathcal{B}$,
- si et seulement si leur union $\cup_{i=1}^n \Pi_{!B, i}(W)$ est finitaire dans $!\mathcal{B}$,
- si et seulement si la projection $\Pi_{\mathcal{B}}(\cup_{i=1}^n \Pi_{!B, i}(W))$ sur $\mathcal{B}$ de leur union est finitaire dans $\mathcal{B}$.

Or cette dernière condition n'apporte aucune contrainte puisque toute partie de $|\mathcal{B}|$ est finitaire.

Exemple II.11. Reprenons l'exemple de $\mathcal{Nat}$ dont la trame est $|\mathcal{Nat}| = \mathbb{N}$ et la structure finitaire $\mathcal{F}(\mathcal{Nat}) = \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ (voir l'Exemple II.1 page 46). Son dual est donné par sa trame $\mathcal{Nat}^\perp = \mathbb{N}$ et sa structure finitaire $\mathcal{F}(\mathcal{Nat}^\perp) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

La trame des exponentielles est

$$|!\mathcal{Nat}| = |?\mathcal{Nat}| = \left| ? \left(\mathcal{Nat}^\perp \right) \right| = \{ n_1^{p_1} \dots n_k^{p_k} ; k \in \mathbb{N}, \forall i \leq k, n_i, p_i \in \mathbb{N} \}.$$

Une partie W est finitaire dans $!\mathcal{Nat}$ si et seulement si la liste des entiers qui apparaissent dans les multi-ensembles de W est finie, i.e.

$$W \in \mathcal{F}(!\mathcal{Nat}) \iff \Pi_{\mathcal{Nat}}(W) \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}).$$

Une partie W est finitaire dans $?\mathcal{Nat}$ si et seulement si elle est finie. En effet, par définition,

$$W \in \mathcal{F}(?\mathcal{Nat}) \iff \forall u \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), W \cap u^\dagger \text{ finie.}$$

Pour le sens direct, il suffit de choisir $u = \mathbb{N}$. Pour la réciproque, on utilise le fait que toute partie finie est finitaire (voir (F2) de la Proposition II.2 page 45) pour conclure.

Une partie W est finitaire dans $?(\mathcal{Nat}^\perp)$ si et seulement si sa projection sur chacun des entiers est finies, autrement dit

$$W \in \mathcal{F}(?(\mathcal{Nat}^\perp)) \iff \forall n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}, W \cap \{ n_1^{p_1} \dots n_k^{p_k} ; \forall i \leq k, p_i \in \mathbb{N} \} \text{ fini}$$

En effet, par définition, W est finitaire dans $?(\mathcal{Nat}^\perp)$ si et seulement si pour tout $u \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$, $W \cap u^\dagger$ est fini.

Catégorie de co-Kleisli. En combinant les espaces de finitude associés à la modalité exponentielle et à la flèche linéaire, on obtient l'interprétation de la flèche intuitionniste. Nous pouvons notamment caractériser les morphismes de la catégorie de co-Kleisli.

Proposition II.12. Soient A et B deux espaces de finitude relationnels. L'interprétation de la formule $!A \multimap B$ est définie par sa trame

$$|!A \multimap B| = \mathcal{M}_{\text{fin}}(|A|) \times |B|,$$

et sa structure finitaire

$$R \in \mathcal{F}(!A \multimap B) \iff \begin{cases} \forall u \in \mathcal{F}(A), \forall b \in |B|, \\ R \cdot u^\dagger \in \mathcal{F}(B) \text{ et } {}^t R \cdot \{b\} \cap u^\dagger \text{ finie.} \end{cases}$$

Démonstration. D'après la Condition (RF3) de Proposition II.8 page 58, on a l'équivalence

$$R \in \mathcal{F}(!A \multimap B) \iff \begin{cases} \forall M \in \mathcal{F}(!A), & R \cdot M \in \mathcal{F}(B), \\ \forall b \in |B|, & {}^t R \cdot \{b\} \in \mathcal{F}(!A)^\perp. \end{cases}$$

Or, d'une part, $M \in \mathcal{F}(!A)$ équivaut à l'existence de $u \in \mathcal{F}(A)$ telle que $M \subseteq u^!$ et d'autre part $u^! \in \mathcal{F}(!A)$ (voir la Proposition II.10 page 59). De plus, $R \cdot M \subseteq R \cdot u^!$. On en déduit que

$$\forall M \in \mathcal{F}(!A), R \cdot M \in \mathcal{F}(B) \iff \forall u \in \mathcal{F}(A), R \cdot u^! \in \mathcal{F}(B).$$

Par ailleurs, $\mathcal{F}(!A)^\perp = \mathcal{F}(?(A^\perp))$ et, d'après la Proposition II.10 page 59, on a $\mathcal{F}(?(A^\perp)) = \{M \subseteq \mathcal{M}_{\text{fin}}(|A|); \forall v \in \mathcal{F}(A), M \cap v^! \text{ finie}\}$. On en déduit l'équivalence

$$\forall b \in |B|, {}^t R \cdot \{b\} \in \mathcal{F}(!A)^\perp \iff \forall u \in \mathcal{F}(A), \forall b \in |B|, {}^t R \cdot \{b\} \cap u^! \text{ finie.}$$

□

Exemple II.12. On peut caractériser les relation finitaires dans $!B \multimap B$. On applique la Proposition II.12 en se rappelant que $\mathcal{F}(B) = \mathcal{F}(B^\perp) = \mathcal{P}(\{T, F\})$.

Ce sont les parties R de $\mathcal{M}_{\text{fin}}(\{T, F\}) \times \{T, F\}$ telles que

$$\begin{aligned} \forall p, q \in \mathbb{N}, \quad & R \cdot \{T^p F^q\} \in \mathcal{P}(T, F) \\ \text{et} \quad & {}^t R \cdot \{T\} \cap \{T^p F^q; p, q \in \mathbb{N}\} \text{ finie,} \\ \text{et} \quad & {}^t R \cdot \{F\} \cap \{T^p F^q; p, q \in \mathbb{N}\} \text{ finie.} \end{aligned}$$

Étant donné le domaine de définition de R , la première condition n'apporte aucune contrainte. Les deux autres peuvent se résumer en :

«Une relation $R \subseteq \mathcal{M}_{\text{fin}}(\{T, F\}) \times \{T, F\}$ est finitaire dans $!B \multimap B$ si et seulement si les images réciproques de T et de F sont finies.»

De la même façon, on peut caractériser les relations finitaires de $(!B)^{\otimes n}$:

«Une relation $R \subseteq \{(T^{p_i} F^{q_i})_{1 \leq i \leq n}; \forall 1 \leq i \leq n, p_i, q_i \in \mathbb{N}\} \times \{T, F\}$ est finitaire dans $(!B)^{\otimes n} \multimap B$ si et seulement si elle est finie.»

Exemple II.13. On peut caractériser les fonctions finitaires dans $!Nat \multimap Nat$ par :

«Une relation $R \subseteq \mathcal{M}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}$ est finitaire dans $!Nat \multimap Nat$ si et seulement si pour tout n , l'image de $\{1, \dots, n\}^!$ est finie et l'image réciproque de tout entier $m \in \mathbb{N}$ est d'intersection finie avec $\{1, \dots, n\}^!$ »

Exponentielles et formules. Nous venons de montrer que l'exponentielle des espaces de finitude relationnels est librement engendrée (voir la Proposition II.10 page 59). Or, nous avons présenté dans le préluce, deux méthodes pour calculer l'exponentielle libre (voir le Paragraphe page 19). Nous allons tester chacune de ces méthodes et s'apercevoir qu'aucune ne calcule l'exponentielle des espaces de finitude. Nous montrons ainsi la limite de ces méthodes.

Commençons par calculer dans le cadre des espaces de finitude les limites du Diagramme (I.8) pour la première et du Diagramme (I.9) pour la seconde. Nous les comparerons ensuite à $!A$. Nous verrons enfin que cela ne contredit en aucun cas la Proposition I.7 page 23 puisque la propriété de commutation de la limite et du tenseur n'est pas vérifiée.

Soit A un espace de finitude relationnel. Commençons par les itérées $A^{\otimes n}$ du tenseur de A . On vérifie par récurrence sur n que :

$$|A^{\otimes n}| = \{(a_1, \dots, a_n); \forall i \leq n, a_i \in |A|\} = \overbrace{|A| \times \dots \times |A|}^n.$$

Notons $\Pi_{A,i}$ la i -ème projection de $|A| \times \cdots \times |A|$ dans $|A|$, alors la structure finitaire $\mathcal{F}(A^{\otimes n}) \subseteq \mathcal{P}(|A| \times \cdots \times |A|)$ est définie par :

$$M_n \in \mathcal{F}(A^{\otimes n}) \iff \forall i \leq n, \Pi_{A,i}(M_n) \in \mathcal{F}(A).$$

C'est une simple itération de la description du tenseur dans **RelFin** (voir la Proposition II.7 page 57).

Ensuite, même si les égaliseurs n'existent pas en général dans **RelFin** (voir le Contre-exemple II.7 page 55), l'égaliseur des symétries existe. L'égaliseur A^n oublie l'ordre des n -uplet de $A^{\otimes n}$. Sa trame est faite de multi-ensembles d'éléments de $|A|$ de longueur n :

$$|A^n| = \{[a_1, \dots, a_n] ; \forall i \leq n, a_i \in |A|\} = \mathcal{M}_{\text{fin}}^n(|A|),$$

Rappelons que pour tout entier n , $\mathcal{M}_{\text{fin}}^n(|A|)$ désigne l'ensemble des multi-ensembles sur $|A|$ dont le cardinal est l'entier n , on a alors :

$$\mathcal{F}(A^n) = \{M_n \subseteq \mathcal{M}_{\text{fin}}^n(|A|) ; \Pi_A(M_n) \in \mathcal{F}(A)\}.$$

On calcule ensuite $A^\infty = \&_{n \in \mathbb{N}} A^n$:

$$\begin{aligned} |A^\infty| &= \uplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_{\text{fin}}^n(|A|) = \mathcal{M}_{\text{fin}}(|A|), \\ \mathcal{F}(A^\infty) &= \{M ; \forall n \in \mathbb{N}, \Pi_A(M \cap \mathcal{M}_{\text{fin}}^n(|A|)) \in \mathcal{F}(A)\}. \end{aligned}$$

Autrement dit, une famille M de multi-ensembles sur $|A|$ est finitaire si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille M_n des multi-ensembles de M et de longueur n se projette sur A en une partie finitaire.

En fait, la seconde formule coïncide avec la première. Dans les espaces de finitude relationnels, le tenseur $\otimes$ est distributif sur le produit $\&$. En effet, en logique linéaire, le tenseur $\otimes$ est toujours distributif sur le plus $\oplus$ (voir l'Équation I.2 page 9) et dans **RelFin**, $\oplus$ et $\&$ ont la même interprétation (voir la Figure II.1 page 52). On vérifie que $A_\bullet^n \simeq \&_{i \leq n} A^i$ et que la limite séquentielle des $A_\bullet^n$ est identique à A^∞ .

Nous allons voir dans le contre-exemple qui suit que bien que les trames de $!A$ et de A^∞ soient identiques, leurs structures finitaires diffèrent en général. Ceci vient d'un défaut de commutation entre le tenseur et la limite. De plus, le morphisme $d_A : !A \rightarrow !A \otimes !A$ de **Rel** défini à la Figure I.3 page 15 par

$$d_A = \{(\mu_1 + \mu_2, (\mu_1, \mu_2)) ; \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(A)\},$$

n'est pas en général finitaire dans $A^\infty \multimap A^\infty \otimes A^\infty$.

Contre-Exemple II.14. Rappelons que $\mathcal{Nat}$ est l'espace de finitude relationnel dont la trame est l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ et la structure finitaire $\mathcal{F}(\mathcal{Nat})$ est l'ensemble de toutes les parties fines $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$. C'est l'interprétation de $(!1)^\perp$ dans **RelFin**.

II.4. Structure exponentielle

Les espaces de finitude $!Nat$ et Nat^∞ ont la même trame $\mathcal{M}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$, mais leurs structures finitaires sont différentes.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(!Nat) &= \{M \subseteq \mathcal{M}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \mid \Pi_{Nat}(M) \text{ fini}\} \\ &= \{M \subseteq \mathcal{M}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \mid \exists N \in \mathbb{N}; M \subseteq \mathcal{M}_{\text{fin}}(0, \dots, N)\}, \\ \mathcal{F}(Nat^\infty) &= \{M \subseteq \mathcal{M}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \mid \forall n \in \mathbb{N}, \Pi_{Nat}(M \cap \mathcal{M}_{\text{fin}}^n(\mathbb{N})) \text{ fini}\}\end{aligned}$$

Par exemple, soient μ_n le multi-ensemble contenant n copies de n et $M = \{\mu_n ; n \in \mathbb{N}\}$. Nous avons $M \in \mathcal{F}(Nat^\infty)$, mais $M \notin \mathcal{F}(!Nat)$.

De façon similaire, $Nat \otimes Nat^\infty$ et $\&_{n \in \mathbb{N}}(Nat \otimes Nat^n)$ ont la même trame $\mathbb{N} \times \mathcal{M}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ mais des structures finitaires différentes.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(Nat \otimes Nat^\infty) &= \{M \subseteq \mathbb{N} \times \mathcal{M}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) ; \exists N; M \subseteq \{0, \dots, N\} \times \mathcal{M}_{\text{fin}}(0, \dots, N)\}, \\ \mathcal{F}\left(\&_{n \in \mathbb{N}}(Nat \otimes Nat^n)\right) &= \left\{M \mid \forall n \in \mathbb{N}, \exists N_n \begin{array}{l} M_n = M \cap (\mathbb{N} \times \mathcal{M}_{\text{fin}}^n(\mathbb{N})), \\ M_n \subseteq \{0, \dots, N_n\} \times \mathcal{M}_{\text{fin}}(0, \dots, N_n). \end{array} \right\}.\end{aligned}$$

Par exemple, notons $M' = \{(n, \mu_n) ; n \in \mathbb{N}\}$. Nous avons $M' \in \mathcal{F}(Nat \otimes Nat^\infty)$ mais $M' \notin \mathcal{F}(\&_{n \in \mathbb{N}}(Nat \otimes Nat^n))$.

Enfin, $d_{Nat} : \mathcal{M}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \times (\mathcal{M}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \times \mathcal{M}_{\text{fin}}(\mathbb{N}))$ n'est pas finitaire. En effet, la famille $([1, 2, \dots, n] ; n \in \mathbb{N})$ est finitaire dans Nat^∞ car il n'existe qu'un seul multi-ensemble pour chaque cardinal n . Mais la famille $(([n+1], [1, \dots, n]) ; n \in \mathbb{N})$ est contenue dans l'image de d_{Nat} . Or la projection sur la première composante de cette famille est $([n] ; n \geq 1)$ qui n'est pas finitaire dans Nat^∞ .

Le problème vient de ce que dans ces formules, l'exponentielle est construite en ajoutant successivement les copies des variables. Même si la formule de Melliès et Tabareau [MT] permet de relier les différentes couches, elle le fait en partant de la couche 1 et en allant vers l'infini qui n'est en quelque sorte jamais atteint. Dans les espaces de finitude, l'exponentielle doit tenir compte de toutes les couches, y compris de la couche infinie. Nous verrons dans le Chapitre III une illustration de ce propos en termes de polynômes et de fonctions analytiques (voir le Paragraphe III.4.1.b page 163).

III - ESPACES DE LEFSCHETZ

Plan du chapitre

III.1 Topologies linéaires	71
III.1.1 Définition	71
III.1.2 Propriétés topologiques	76
III.1.3 Bases	79
III.1.4 Dual topologique	82
III.1.5 Complétion	88
III.2 Structure additive, limites et co-limites	93
III.2.1 Produits	93
III.2.2 Co-produits	96
III.2.3 Limites	98
III.2.4 Co-limites	100
III.3 Structure multiplicative	103
III.3.1 Espace de fonctions, dual et réflexivité	103
III.3.2 Mix, par et produit tensoriel inductif	135
III.3.3 Tenseur	154
III.4 Structure exponentielle	157
III.4.1 Espace de polynômes et de séries formelles, <i>Pourquoi pas ?</i>	157
III.4.2 Structure différentielle et formule de Taylor	164

L'objectif de cette partie sémantique est de montrer comment l'étude sémantique de l'interaction, non déterministe mais bornée, des programmes mène à la formule de Taylor. Pour cela, nous nous appuyons sur la concrétisation de la sémantique quantitative dans les espaces vectoriels topologiques.

Dans toute cette partie, $\mathbb{k}$ désigne un corps¹ fixé et nous manipulons des $\mathbb{k}$ -espaces vectoriels.

Dans le Chapitre II, nous avons introduit les espaces de finitude relationnels en partant de l'interaction finie entre programmes et données. En enrichissant les *espaces de finitude relationnels* par une structure d'espace vectoriel topologique, nous obtenons les *espaces de finitude*

¹On aurait pu choisir de travailler avec un anneau ou un semi-anneau. En effet, $\mathbb{k}$ permet intuitivement de compter le nombre de fois qu'un résultat apparaît dans le calcul d'un programme. D'ailleurs, il existe une théorie des modules avec une topologie linéaire [Mat80] semblable à celle des espaces de Lefschetz [Lef42]. Ces modules sont utilisés en arithmétique pour l'étude des topologies p -adiques. La manipulation des espaces vectoriels est plus simple que celle des modules, ce qui justifie ici l'utilisation d'un corps.

vectoriels de Ehrhard [Ehr05]. Nous allons voir comment la propriété d'interaction finie est transportée dans l'univers des espaces vectoriels topologiques.

Enrichissement vectoriel des espaces de finitude relationnels. Commençons par décrire la construction des espaces de finitude vectoriels à partir des espaces de finitude relationnels. Elle se fait par l'intermédiaire des notions de *base* (au sens algébrique) et de *support* :

- Pour toute formule A de LL, l'ensemble $\llbracket A \rrbracket_{\mathbf{RelFin}}$, interprétant une formule A dans les espaces de finitude relationnels, est la base de l'espace vectoriel de finitude $\llbracket A \rrbracket_{\mathbf{LinFin}}$ interprétant A . Ce dernier peut donc être considéré comme un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{K}^{\llbracket A \rrbracket_{\mathbf{RelFin}}}$. Autrement dit, $\llbracket A \rrbracket_{\mathbf{LinFin}}$ est formé de familles de scalaires indexées par $\llbracket A \rrbracket_{\mathbf{RelFin}}$ et à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$.
- L'interprétation d'une preuve $\pi \vdash A$ de LL est un vecteur de $\llbracket A \rrbracket_{\mathbf{LinFin}}$, c'est-à-dire une famille $(\llbracket \pi \rrbracket_a)_{a \in \llbracket A \rrbracket_{\mathbf{RelFin}}}$ de scalaires indexée par l'interprétation relationnelle $\llbracket A \rrbracket_{\mathbf{RelFin}}$.

Cette famille doit de plus vérifier une *condition de finitarité*. Plus précisément, le support du vecteur $\llbracket \pi \rrbracket_{\mathbf{LinFin}}$, i.e. l'ensemble des indices des coefficients non nuls dans la décomposition du vecteur dans la base $\llbracket A \rrbracket_{\mathbf{RelFin}}$, est égal à l'interprétation de π dans les espaces de finitude relationnels. Autrement dit,

$$\text{supp}(\llbracket \pi \rrbracket_{\mathbf{LinFin}}) = \llbracket \pi \rrbracket_{\mathbf{RelFin}}.$$

Dans le fragment MALL de la logique linéaire, on n'a pas besoin de topologie. En effet, les interprétations des formules de MALL dans le modèle relationnel sont finies. Les espaces vectoriels de finitude qui leur correspondent seront donc de dimension finie. D'ailleurs, le modèle des espaces vectoriels de finitude est une extension de celui des espaces vectoriels de dimension finie présenté dans le préluce (voir la Figure I.4 page 16). Autrement dit, la topologie des espaces de finitude n'apporte aucune information dans le cadre de MALL.

Par contre, le fragment exponentiel va faire apparaître la dimension infinie et avec elle la topologie. En effet, pour toute formule A ,

$$\llbracket !A \rrbracket_{\mathbf{RelFin}} = \mathcal{M}_{\text{fin}}(\llbracket A \rrbracket_{\mathbf{RelFin}})$$

est une «base», en général infinie, de l'espace vectoriel de finitude associé à $!A$. La condition de finitarité va permettre de donner un sens aux combinaisons linéaires infinies. Ainsi, les espaces de finitude vectoriels sont munis d'une topologie telle qu'une donnée soit toujours interprétée par la somme d'une série *convergente*.

Interaction non déterministe finie. Considérons la coupure de deux preuves $\pi \vdash \Gamma, A$ et $\pi' \vdash A^\perp, \Delta$ de la logique linéaire. Pour simplifier les notations, nous fixons $\gamma \in \llbracket \Gamma \rrbracket$ et $\delta \in \llbracket \Delta \rrbracket$. L'interprétation contextuelle de π est un vecteur $\llbracket \pi \rrbracket_\gamma$ de l'espace vectoriel de finitude $\llbracket A \rrbracket$. L'interprétation contextuelle de π' est un vecteur $\llbracket \pi' \rrbracket_\delta$ de $\llbracket A^\perp \rrbracket$, c'est-à-dire une forme linéaire² continue sur $\llbracket A \rrbracket$. L'interprétation contextuelle $\llbracket \pi ; \pi' \rrbracket_{\gamma, \delta}$ de la coupure de π et de π'

²Rappelons que nous considérons la logique linéaire avec la version forte du (Mix) (voir le Paragraphe I.1.2 page 10). On a donc une équivalence logique entre $A \multimap 1$ et $A^\perp$.

est donc l'image du vecteur $\llbracket \pi \rrbracket_\gamma$ par la forme linéaire $\llbracket \pi' \rrbracket_\delta$:

$$\llbracket \pi ; \pi' \rrbracket_{\gamma, \delta} = \langle \llbracket \pi' \rrbracket_\delta, \llbracket \pi \rrbracket_\gamma \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \llbracket \pi' \rrbracket_\delta \left(\llbracket \pi \rrbracket_\gamma \right).$$

D'un point de vue relationnel, ou plus précisément d'un point de vue matriciel, cette composition est représentée par la somme

$$\llbracket \pi ; \pi' \rrbracket_{\gamma, \delta} = \sum_{a \in \llbracket A \rrbracket_{\text{RelFin}}} \llbracket \pi \rrbracket_{\gamma, a} \llbracket \pi' \rrbracket_{a, \delta},$$

où, pour tout $a \in \llbracket A \rrbracket_{\text{RelFin}}$, le scalaire $\llbracket \pi \rrbracket_{\gamma, a}$ est le coefficient d'indice a de la famille $\llbracket \pi \rrbracket_{a, \delta}$. En utilisant le lien entre les espaces de finitude relationnels et vectoriels, on obtient

$$\begin{aligned} \llbracket \pi ; \pi' \rrbracket_{\gamma, \delta} &= \sum_{a \in \text{supp}(\llbracket \pi \rrbracket_{\text{LinFin}}) \cap \text{supp}(\llbracket \pi' \rrbracket_{\text{LinFin}})} \llbracket \pi \rrbracket_{\gamma, a} \llbracket \pi' \rrbracket_{a, \delta} \\ &= \sum_{a \in \llbracket \pi \rrbracket_{\text{RelFin}} \cap \llbracket \pi' \rrbracket_{\text{RelFin}}} \llbracket \pi \rrbracket_{\gamma, a} \llbracket \pi' \rrbracket_{a, \delta}. \end{aligned}$$

On déduit des propriétés du modèle des espaces de finitude relationnels que cette somme est finie, puisque $\llbracket \pi \rrbracket_{\text{RelFin}} \cap \llbracket \pi' \rrbracket_{\text{RelFin}}$ est finie (voir la Proposition II.1 page 44).

Intuitivement, la composition de ces deux preuves correspond au résultat de l'interaction entre une donnée de type A et un programme prenant un argument de type A en entrée. La somme signifie que les deux parties ont un nombre fini de façons d'interagir et on retrouve le *non-déterminisme contrôlé* du Chapitre II précédent.

Généralisons cette propriété à tous les éléments des espaces $\llbracket A \rrbracket$ et de $\llbracket A^\perp \rrbracket$. Comme nous étudions la logique linéaire avec (Mix), $A^\perp$ est équivalent à $A \multimap 1$. L'espace $\llbracket A^\perp \rrbracket$ est donc identifié au dual $\llbracket A \rrbracket'$, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur $\llbracket A \rrbracket$. Dans la base $\llbracket A \rrbracket_{\text{RelFin}}$, l'interaction entre une forme linéaire continue x' et un vecteur x est donnée par la somme

$$\langle x', x \rangle = \sum_{a \in \llbracket A \rrbracket_{\text{RelFin}}} x_a x'_a.$$

qui est convergente dans $\mathbb{k}$. De plus, lorsque $\mathbb{k}$ est muni de la **topologie discrète**, cette somme converge si et seulement si elle est finie. Ainsi, cette propriété de *finitude*, observée sur la sémantique des preuves de la logique linéaire, est généralisée à tout l'espace vectoriel de finitude.

Remarquons que plutôt qu'un corps discret, on peut choisir le corps des réels ou des complexes (muni de la topologie engendrée respectivement par la valeur absolue et le module). On obtient alors les **espaces de Köthe** [Ehr02]. Dans ces espaces, une preuve de A est interprétée par une famille indexée par un ensemble $|A|$. L'interaction un vecteur $(x_a)_{a \in |A|}$ de la sémantique de A et un vecteur $(x'_a)_{a \in |A|}$ de $A^\perp$ correspond à la convergence absolue de la série scalaire

$$\sum_{a \in \llbracket A \rrbracket_{\text{RelFin}}} x_a x'_a.$$

Mais, cette série peut converger tout en ayant une infinité de termes non nuls.

Les espaces de finitude correspondent à la version discrète des espaces de Köthe. Ces derniers sont des espaces vectoriels topologiques (ce sont même des espaces localement convexes). Nous allons maintenant décrire la topologie des espaces de finitude.

Espaces de Lefschetz. Afin de décrire la structure topologique des espaces de finitude, Ehrlhard les a décrits comme des cas particuliers d'espaces de Lefschetz [Lef42].

Les espaces de Lefschetz sont des espaces vectoriels topologiques sur un corps $\mathbb{k}$ **discret**. Leurs propriétés sont plus simples que celles des espaces vectoriels topologiques sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (comme par exemple les espaces localement convexes). En effet, tous les problèmes liés à la topologie du corps de base n'ont pas besoin d'être pris en compte. Cependant, nos intuitions ayant été formées au contact des espaces métriques, ces propriétés peuvent parfois paraître étranges. Par exemple, dans le cas de la dimension finie, la structure de Lefschetz n'apporte pas d'information. En effet, tout espace de Lefschetz de dimension finie est discret. Ces espaces reflètent donc la différence entre MALL, pour lequel le modèle des espaces vectoriels de dimension finie suffit, et le fragment exponentiel, pour lequel il est nécessaire d'utiliser une structure topologique.

Les espaces de Lefschetz offrent un cadre pour étudier les propriétés des espaces vectoriels de finitude. En effet, l'interprétation d'une formule de la logique linéaire dans les espaces de finitude peut être décrite à l'aide des constructions usuelles des espaces de Lefschetz. Par exemple, l'implication linéaire $\multimap$ sera interprétée par l'espace des fonctions linéaires continues muni de la topologie de la convergence uniforme sur les (linéairement) compacts. Remarquons que cette caractérisation des constructions de la logique linéaire n'est pas disponible dans les espaces de Köthe, ce qui les rend difficile à manipuler avec les outils des espaces vectoriels topologiques.

Il est naturel d'essayer de construire un modèle de la logique linéaire dans les espaces de Lefschetz sans passer par le niveau relationnel. Cependant, les espaces de Lefschetz ne forment pas un modèle de la logique linéaire classique (ils souffrent d'un défaut de réflexivité).

Pour résoudre ce problème, nous avons suivi deux pistes. La première, inspirée des espaces de Köthe, nous a menés à une définition *intrinsèque* des espaces vectoriels de finitude qui seront alors appelés *espaces de Lefschetz finitaires*. Un espace de Lefschetz est dit *finitaire* lorsqu'il existe un espace de finitude qui lui est linéairement homéomorphe. Un peu comme la notion de dimension ne dépend pas d'une base, la notion d'espace de Lefschetz finitaire ne dépend pas du choix de l'espace de finitude relationnel auquel il est homéomorphe.

Les espaces de Lefschetz finitaires forment un modèle de la logique linéaire. Cependant, on ne sait pas s'ils sont stables par des opérations mathématiques élémentaires comme certaines rotations ou projections. Il est donc intéressant de chercher une généralisation de ces espaces.

La deuxième piste que nous avons suivie repose sur la compréhension des propriétés des espaces de finitude qui induisent le modèle de la logique linéaire. Nous en avons dégagé certaines : ils sont complets et les notions d'ouvert et de borné sont duales l'une de l'autre. À partir de ces propriétés, nous avons défini une famille d'espaces de Lefschetz dits *linéairement bornologiques*. Cette famille est stable par les connecteurs additifs de la logique linéaire ainsi que par passage à l'orthogonal. Par contre, on ne sait pas si elle est stable par les constructions multiplicatives et exponentielles. Nous conjecturons que c'est un modèle de la logique linéaire.

Sémantique quantitative et formule de Taylor. Enfin, dans les espaces de Lefschetz linéairement bornologiques, il est possible de retrouver la *sémantique quantitative* et de montrer que toute fonction interprétant un programme de type $A \Rightarrow B$ peut être décrite comme une série formelle de polynômes homogènes. De plus, sur tout borné de l'espace de Lefschetz interprétant A , cette fonction coïncide avec un polynôme. Le degré maximal de ce polynôme correspond au nombre d'appels de la fonction à ses arguments. Ainsi, l'interaction de l'interprétation d'un programme et d'une donnée bornée est contrôlée.

Nous concluons ce chapitre en montrant que la décomposition de l'interprétation des programmes en série formelle peut être reliée à la formule de Taylor grâce à l'introduction d'un opérateur différentiel.

Plan du chapitre. Ce chapitre commence par l'introduction des espaces de Lefschetz (Section III.1). Nous donnons ainsi les propriétés qui nous serviront pour comprendre les structures de la logique linéaire dans ce cadre. Pour la plupart, ces notions sont issues de [Lef42], [Köt79] ou [FG64, GF65, FG65]. Nous donnons certaines démonstrations de propriétés déjà connues afin de se familiariser avec les topologies linéaires qui sont parfois contre-intuitives. Parce que le corps sur lequel ils sont construits est toujours discret, les espaces de Lefschetz présentent des propriétés différentes de celles des espaces vectoriels topologiques sur les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ comme les espaces de Banach ou de Hilbert. Une fois établies les bases sur les espaces de Lefschetz, nous abordons successivement les différentes structures de la logique linéaire : additive (Section III.2), multiplicative (Section III.3), exponentielle (Section III.4). Dans chacun des cas, après avoir décrit les différentes constructions, nous explicitons les caractéristiques des espaces de Lefschetz finitaires. Nous terminons ce chapitre en démontrant la formule de Taylor dans le cadre des espaces de Lefschetz bornologiques.

III.1 Topologies linéaires

III.1.1 Définition

Dans la suite, $\mathbb{k}$ désigne un corps muni de la topologie discrète. Rappelons que pour la topologie discrète, toute partie est ouverte.

III.1.1.a Catégorie des espaces de Lefschetz.

Définition III.1. [Lef42] Un $\mathbb{k}$ -espace vectoriel topologique E est appelé **espace de Lefschetz** lorsqu'il existe une base de filtres $\mathcal{V}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(TL1) tout élément V de $\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel de E ,

(TL2) $\bigcap \mathcal{V} = \{0\}$,

et telle qu'une partie U de E soit ouverte si et seulement si

$$\forall x \in U, \exists V \in \mathcal{V} ; x + V \subseteq U.$$

Un **ouvert linéaire** est un sous-espace vectoriel ouvert de E . La base de filtres $\mathcal{V}$ est appelée **système fondamental linéaire**³ de l'espace de Lefschetz E .

Dans ce chapitre, tous les systèmes fondamentaux sont *linéaires*. On oubliera parfois de le mentionner.

Remarque. Dans tout espace de Lefschetz, la famille de tous les ouverts linéaires constitue un système fondamental linéaire. De plus, tout ouvert linéaire est fermé (voir la propriété (VL1) de la Proposition III.7 page 77).

La topologie d'un espace de Lefschetz est compatible avec la structure d'espace vectoriel (l'addition et la multiplication scalaire sont continues).

Définition III.2. La catégorie **Lef** est la sous-catégorie pleine de **LinTop**⁴ dont les objets sont des espaces de Lefschetz et les morphismes les fonctions linéaires continues.

Rappelons que dans les espaces vectoriels topologiques, il suffit de vérifier la continuité en 0 d'une fonction linéaire pour en déduire sa continuité sur tout l'espace.

La propriété (TL1) d'existence d'une base d'ouverts linéaires implique beaucoup de propriétés des espaces de Lefschetz. Nous en énumérons quelques unes et nous rappelons leurs preuves pour nous familiariser avec cette notion.

La condition (TL2) est une propriété de *séparation*.

Proposition III.1. [*Köi79*, §10.2(2)] *Tout espace de Lefschetz est séparé (Hausdorff).*

Démonstration. Soit E un espace de Lefschetz et $\mathcal{V}$ l'ensemble de ses ouverts linéaires. Comme $\bigcap \mathcal{V} = \{0\}$, pour tous $x \neq y$, il existe $V \in \mathcal{V}$ tel que $x - y \notin V$. On vérifie que $(x + V) \cap (y + V) = \emptyset$ en remarquant que V est un espace vectoriel. $\square$

Une fonction $f : E \rightarrow F$ est uniformément continue si et seulement si pour tout voisinage V de 0 dans F , il existe un voisinage U de 0 dans E tel que

$$\forall x, y \in E, x - y \in U \Rightarrow f(x) - f(y) \in V$$

La propriété (TL1) implique le résultat suivant.

Proposition III.2. [*Köi79*, §10.1(9)] *Toute application linéaire continue entre des espaces de Lefschetz est uniformément continue.*

Démonstration. Soient E et F des espaces de Lefschetz et $f : E \rightarrow F$ linéaire continue. Un ouvert linéaire V de F est un sous-espace vectoriel de F . Comme f est continue, il existe un ouvert linéaire U de E tel que $f(U) \subseteq V$. Pour tous $x, y \in E$, si $x - y \in U$, alors $f(x) - f(y) = f(x - y) \in V$ d'où la continuité uniforme. $\square$

La notion d'espace de Lefschetz est stable par homéomorphisme linéaire :

³Dans un espace vectoriel topologique, un système fondamental est une base de voisinages de 0 qui ne sont pas nécessairement des sous-espaces.

⁴**LinTop** est la catégorie dont les objets sont les espaces vectoriels topologiques et les morphismes les fonctions linéaires continues.

Proposition III.3. [Lef42] *L'image d'un espace de Lefschetz par un homéomorphisme linéaire est un espace de Lefschetz, i.e. si E est un espace de Lefschetz et F est un espace topologique linéairement homéomorphe à E , alors on peut munir F d'une structure d'espace de Lefschetz.*

Démonstration. L'image d'un système fondamental par un homéomorphisme linéaire est un système fondamental. De plus, un isomorphisme préserve la structure de sous espace vectoriel. Tout isomorphisme continu préserve donc les systèmes fondamentaux. $\square$

Notation III.3. Soient E et F deux espaces de Lefschetz.

- On note $E \simeq F$ lorsque E et F sont linéairement homéomorphe, c'est-à-dire il existe un isomorphisme entre E et F à la fois continu et ouvert.
- Pour tout $x \in E$. On note $\mathbb{k} \cdot x \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda x ; \lambda \in \mathbb{k}\}$ la droite engendrée par x .
Pour toute famille $(x_i)_{i \in I} \subseteq E^I$, on note $\langle x_i ; i \in I \rangle$ l'espace vectoriel engendré par cette famille.
- Soit x' une forme linéaire sur E . Pour tout $x \in E$, on note $\langle x', x \rangle \stackrel{\text{def}}{=} x'(x)$ l'image de x par x' .
On note E^* l'espace des formes linéaires sur E et E' l'espace des formes linéaires continues sur E .
- Soient $D \subseteq E$ et $D' \subseteq E^*$. Le **noyau** de D' dans D est noté

$$\ker_D(D') \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in D ; \forall x' \in D', \langle x', x \rangle = 0\} = (\cap_{x' \in D'} \ker(x')) \cap D.$$

et l'**annulateur** de D dans D'

$$\text{ann}_{D'}(D) \stackrel{\text{def}}{=} \{x' \in D' ; \forall x \in D, \langle x', x \rangle = 0\}.$$

- Soient x un vecteur de E et x' une forme linéaire continue sur E . On définit la relation d'orthogonalité induite par le couplage $\langle x', x \rangle = x'(x)$ par

$$x \perp x' \iff \langle x', x \rangle = 0.$$

Pour toute partie F d'un espace de Lefschetz E , on note

$$F^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{x' \in E' ; \forall x \in F, \langle x', x \rangle = 0\}$$

l'annulateur des vecteurs de F dans E' . Pour tout $F' \subseteq E'$, on note

$${}^\perp F' \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E ; \forall x' \in F', \langle x', x \rangle = 0\}$$

le noyau de F' dans E .

Exemple III.1.

- Tout espace vectoriel muni de la topologie discrète est un espace de Lefschetz. L'espace réduit à zéro $\{0\}$ forme à lui seul un système fondamental.

- La topologie faible sur l'espace E^* des formes linéaires (non nécessairement continues) sur un espace de Lefschetz E est engendrée par les annulateurs de sous-espaces vectoriels D de E de dimension finie

$$\text{ann}_{E^*}(D) = \{x^* \in E^* \mid \forall x \in D, \langle x^*, x \rangle = 0\}.$$

E^* muni de la topologie faible est un espace de Lefschetz.

- On note $(E', \tau_{\mathfrak{D}})$ le dual topologique de E muni de la topologie faible, i.e. l'espace des formes linéaires *continues* muni de la topologie engendrée par les annulateurs dans E' des sous-espaces vectoriels D de E de dimension finie

$$D^\perp = \text{ann}_{E'}(D) = \{x' \in E' \mid \forall x \in D, \langle x', x \rangle = 0\}.$$

$(E', \tau_{\mathfrak{D}})$ est un espace de Lefschetz.

III.1.1.b Catégorie des espaces de Lefschetz finitaires.

Tout espace de finitude relationnel (voir la Partie II) induit un espace de Lefschetz. À tout espace de finitude relationnel $A \in \mathbf{RelFin}$, on associe un sous-espace vectoriel E_A de l'espace $\mathbb{k}^{|A|}$ des familles sur $|A|$, formé par les familles de support finitaire.

Définition III.4. [Ehr05, §3] Soit $A = (|A|, \mathcal{F}(A)) \in \mathbf{RelFin}$. Pour toute famille $x = (x_a)_{a \in |A|} \in \mathbb{k}^{|A|}$, on note $|x|$ le **support** de x défini par

$$|x| = \{a \in |A| \mid x_a \neq 0\}.$$

L'espace de Lefschetz engendré par A , noté E_A , est défini par

$$E_A = \{x \in \mathbb{k}^{|A|} \mid |x| \in \mathcal{F}(A)\}.$$

Nous allons voir à la Proposition III.4 suivante que les espaces de Lefschetz finitaires sont des espaces de Lefschetz. Pour cela nous avons besoin d'introduire deux familles sur un espace de Lefschetz finitaire : la famille des sous-espaces, engendrés par les parties finitaires, qui correspondent aux bornés et aux compacts et la famille des sous-espaces, co-engendrés par les parties anti-finitaires, qui correspondent aux ouverts.

Notation III.5. Soit E_A un espace de Lefschetz finitaire. Pour toute partie finitaire $u \in \mathcal{F}(A)$, le sous-espace de E_A engendré par u est noté

$$\mathcal{K}(u)_A = \{x \mid |x| \subseteq u\}.$$

Pour toute partie anti-finitaire $u' \in \mathcal{F}(A)^\perp$, le sous-espace de E_A co-engendré par u' est noté

$$\mathcal{V}(u')_A = \{x \mid |x| \cap u' = \emptyset\}.$$

Lorsqu'aucune confusion n'est possible, on omettra l'indice A .

Muni de la topologie engendrée par les $\mathcal{V}(u')$ pour u' anti-finitaire, l'espace engendré par un espace de finitude relationnel est un espace de Lefschetz.

Proposition III.4. [Ehr05] Soit $A = (|A|, \mathcal{F}(A)) \in \mathbf{RelFin}$. Muni de la topologie engendrée par le système fondamental linéaire $\mathcal{V}(u')$ pour $u' \in \mathcal{F}(A)^\perp$, E_A est un espace de Lefschetz.

Démonstration. La famille des $(\mathcal{V}(u') ; u' \in \mathcal{F}(A)^\perp)$ vérifie évidemment la Condition (TL1) de linéarité mais aussi la Condition (TL2) de séparation des espaces de Lefschetz (voir la Définition III.1 page 71). En effet, rappelons que toute partie finie de $|A|$ est anti-finitaire (RF1) et en particulier, $\forall a \in |A|, \{a\} \in \mathcal{F}(A)^\perp$. On en déduit que

$$\bigcap_{u' \in \mathcal{F}(A)^\perp} \mathcal{V}(u') \subseteq \{x \in E_A ; \forall a \in |A|, x_a = 0\} = \{0\}.$$

□

Exemple III.2. L'espace de Lefschetz engendré par l'espace de finitude relationnel $\mathcal{B}$ dont la trame est $\{T, F\}$ (voir l'Exemple II.1 page 46) est l'espace $\mathbb{k}^2$ muni de la topologie discrète.

Exemple III.3. Rappelons que l'espace de finitude relationnel $\mathcal{Nat}$ a pour trame $\mathbb{N}$, pour structure finitaire les parties finies de $\mathbb{N}$ et pour structure anti-finitaire toutes les parties de $\mathbb{N}$ (voir l'Exemple II.2 page 46).

L'espace de Lefschetz engendré par $\mathcal{Nat}$ est l'espace des suites finies

$$E_{\mathcal{Nat}} = \{x \in \mathbb{k}^{\mathbb{N}} ; |x| \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})\} = \mathbb{k}^{(\mathbb{N})}.$$

Comme $\mathbb{N}$ est une partie anti-finitaire, $\mathcal{V}(\mathbb{N}) = \{x \in \mathbb{k}^{(\mathbb{N})} ; |x| \cap \mathbb{N} = \emptyset\} = \{0\}$ est un ouvert linéaire. On en déduit que $E_{\mathcal{Nat}}$ est muni de la topologie discrète.

L'espace de Lefschetz engendré par $\mathcal{Nat}^\perp$ est l'espace de toutes les suites

$$E_{\mathcal{Nat}^\perp} = \{x \in \mathbb{k}^{\mathbb{N}} ; |x| \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\} = \mathbb{k}^{\mathbb{N}}.$$

Les parties anti-finitaires de $\mathcal{Nat}^\perp$ sont les parties finies de $\mathbb{N}$. Ainsi, la topologie de $E_{\mathcal{Nat}^\perp}$ est engendrée par les ouverts linéaires

$$\mathcal{V}(J) = \{x \in \mathbb{k}^{\mathbb{N}} ; |x| \cap J = \emptyset\} = \{x \in \mathbb{k}^{\mathbb{N}} ; \forall j \in J, x_j = 0\},$$

où J est une partie finie de $\mathbb{N}$.

Les espaces de Lefschetz engendrés par les espaces de finitude relationnels sont définis grâce à une base, dont le support est la trame de l'espace relationnel sous-jacent. Pourtant le choix de la base n'est pas essentiel. Pour le voir, nous allons introduire une notion *intrinsèque* d'espace de Lefschetz finitaire. Pour cela, nous nous inspirons du travail de Ehrhard sur les espaces de Köthe [Ehr02].

Définition III.6. Un espace de Lefschetz E est dit **finitaire** lorsqu'il est linéairement homéomorphe à un espace de Lefschetz, engendré par un espace de finitude relationnel, i.e. il existe un espace de finitude relationnel A et un homéomorphisme linéaire $\phi : E \rightarrow E_A$. Une **carte** d'un espace de Lefschetz finitaire E est la donnée d'un tel triplet (E, ϕ, A) . La catégorie **LinFin** des espaces de Lefschetz finitaires et fonctions linéaires continues est une sous-catégorie pleine de **Lef**.

Remarquons que c'est l'*existence* d'une carte qui rend un espace de Lefschetz *finitaire* et que l'existence d'une telle carte repose sur les *propriétés topologiques* de l'espace.

Par ailleurs, on peut construire un foncteur des espaces de finitude relationnels vers les espaces de Lefschetz finitaires (voir la Définition III.9 page 80 pour l'action du foncteur sur les morphismes) :

$$\begin{aligned} \mathbf{RelFin} &\rightarrow \mathbf{LinFin} \\ A &\mapsto E_A \end{aligned}$$

Cependant, il n'est pas possible de construire un foncteur des espaces de Lefschetz finitaires vers les espaces de finitude relationnels. En effet, la définition d'un tel foncteur impliquerait l'existence d'une carte canonique. Or, il existe des espaces de Lefschetz finitaires qui possèdent plusieurs cartes et dans ce cas il n'y a pas de façon *naturelle* d'en privilégier une. Par exemple, dans un espace de Lefschetz de dimension finie E (la topologie est discrète), la donnée de toute base $\mathcal{B}$ définit un espace de finitude $(\mathcal{B}, \mathcal{P}(\mathcal{B}))$. Avec l'isomorphisme entre E et $\mathbb{k}^{\mathcal{B}}$ cet espace de finitude forme une carte de E . Or, dans un espace vectoriel, le choix d'une base n'est pas fonctoriel.

Nous verrons par la suite que les espaces de Lefschetz finitaires vérifient des bonnes propriétés :

- Tout espace de Lefschetz finitaire admet une base de Schauder (voir la Proposition III.15 page 80).
- Tout espace de Lefschetz finitaire est complet (voir la Proposition III.26 page 92).

III.1.2 Propriétés topologiques

Tant que l'on se restreint à MALL, il est tout à fait possible de faire un modèle avec des espaces vectoriels qui sont de dimension finie. Mais l'exponentielle implique l'introduction d'espaces de dimension infinie et donc de topologie pour pouvoir d'une part parler de combinaisons linéaires infinies et d'autre part espérer assurer la réflexivité de la logique linéaire. La topologie des espaces de Lefschetz reprend la distinction que l'on a entre MALL et MELL. En effet, les espaces de Lefschetz de dimension finie sont tous discrets, les interprétations de MALL dans les espaces de Lefschetz et les espaces vectoriels se correspondent donc. Par contre, les espaces de Lefschetz de dimension infinie sont munis d'une topologie qui en général n'est pas discrète. Afin de préserver le caractère purement algébrique des espaces en dimension finie et en même temps de manipuler la dimension infinie, on doit supposer que le corps de base est muni de la topologie discrète. Cette hypothèse va engendrer une distorsion de nos intuitions topologiques. Cette section est consacrée à la présentation des propriétés des espaces de Lefschetz.

Commençons par montrer que tout espace de Lefschetz de dimension finie est discret.

Lemme III.5. *Dans un espace de Lefschetz, tout ouvert linéaire non réduit à $\{0\}$ contient un ouvert linéaire strictement plus petit.*

Démonstration. Soit V un ouvert linéaire non réduit à $\{0\}$. Il existe $g \in V$ tel que $g \neq 0$. D'après l'hypothèse de séparabilité (TL2), il existe un ouvert linéaire V' qui ne contient pas g . Donc l'ouvert linéaire $V' \cap V$ est strictement inclus dans V . $\square$

Proposition III.6. [*Köt79*, §10.2] *Tout espace de Lefschetz de dimension finie est discret.*

Démonstration. Soit E un espace de Lefschetz de dimension finie que l'on suppose différent de $\{0\}$. Remarquons que E est un ouvert linéaire de l'espace E . D'après le Lemme III.5 page 76, il existe un ouvert linéaire $V \subsetneq E$, en particulier $\dim(V) < \dim E$. En itérant ce procédé, on construit une suite de ouverts linéaires dont la dimension est strictement décroissante jusqu'à obtenir un ouvert linéaire restreint à $\{0\}$. $\square$

Poursuivons par des propriétés topologiques.

Proposition III.7. [*Köt79*, §10.2] *Soit E un espace de Lefschetz.*

(VL1) *Tout ouvert linéaire est fermé.*

Démonstration. Soit U un ouvert linéaire de E . Comme U est un espace vectoriel, $\forall x \notin U, (x+U) \cap U = \emptyset$. Ainsi, le complémentaire de U est ouvert et U est fermé. $\square$

(VL2) *Tout sous-espace vectoriel fermé de co-dimension finie est ouvert.*

Démonstration. Un espace est dit de co-dimension finie lorsqu'il est le supplémentaire algébrique d'un espace de dimension finie. On va montrer la proposition dans le cas de la co-dimension 1, on procède ensuite par récurrence. Soient H un hyperplan fermé et $x \notin H$. Comme H^c est ouvert, il existe un ouvert linéaire V tel que $(x+V) \cap H = \emptyset$. Rappelons que $E = H \oplus \langle x \rangle$, donc $\forall y \in V, \exists \lambda_y \in \mathbb{k}, z \in H; y = \lambda_y x + z$. Pour tout $y \in V$, si $\lambda_y \neq 0$, alors $x - \lambda_y^{-1}y = -\lambda_y^{-1}z \in (x+V) \cap H$, ce qui est impossible. On en déduit que pour tout $y \in V, \lambda_y = 0$, d'où $V \subseteq H$, donc H est ouvert. $\square$

(VL3) *Tout sous-espace de dimension finie est fermé.*

Démonstration. Soit D un sous-espace de dimension finie. Muni de la topologie induite, il est discret (voir la Proposition III.6 page 77). Il existe donc un ouvert linéaire V de E tel que $D \cap V = \{0\}$. Pour tout $x \notin D, x+V \cap D = \emptyset$ d'où D est fermé. $\square$

Notons au passage que tout sous-espace d'un espace de Lefschetz, qui contient un ouvert linéaire, est ouvert, ce qui est une propriété inattendue pour un espace topologique.

L'opération de clôture topologique préserve les sous-espaces vectoriels. Cette propriété repose sur la linéarité des éléments du système fondamental.

Proposition III.8. [*Köt79*, §10.2] *Soit E un espace de Lefschetz. L'adhérence $\overline{F}$ de tout sous-espace vectoriel F de E est encore un sous-espace vectoriel de E .*

Démonstration. Soient $x, y \in \overline{F}$ deux points de l'adhérence de F et soit V un ouvert linéaire. Il existe $x_0, y_0 \in F$ tels que $x - x_0 \in V$ et $y - y_0 \in V$. Comme V est un sous-espace vectoriel de E , pour tous $\alpha, \beta, \alpha x + \beta y \in \alpha x_0 + \beta y_0 + V$, d'où $\alpha x + \beta y \in \overline{F}$. $\square$

La topologie induite sur une partie est la topologie la moins fine rendant l'inclusion continue.

Proposition III.9. [Köt79, §10.2] *Tout sous-espace vectoriel F d'un espace de Lefschetz E , muni de la topologie induite, est un espace de Lefschetz. Pour tout système fondamental $\mathcal{V}$ de E , la famille $(V \cap F ; V \in \mathcal{V})$ est un système fondamental de F .*

Démonstration. Pour la topologie induite U est ouvert dans F si et seulement s'il existe V ouvert dans E tel que $F \cap V \subseteq U$. Donc la famille $(V \cap F ; V \in \mathcal{V})$ est un système fondamental linéaire de la topologie induite. Lorsque F est un sous-espace vectoriel, $V \cap F$ est évidemment un sous-espace vectoriel de F . Enfin, la Condition (TL2) de séparation est aussi vérifiée. $\square$

La topologie des espaces de Lefschetz est totalement déconnectée. La démonstration repose sur le fait que pour tout vecteur x d'un espace de Lefschetz et pour tout ouvert linéaire V , $x + V$ est à la fois ouvert et fermé.

Proposition III.10. *Tout espace de Lefschetz est totalement déconnecté, i.e. les parties connexes maximales sont les singletons.*

Démonstration. Soit C une partie d'un espace de Lefschetz E ni vide, ni réduite à un singleton. Soient $x \neq y$ deux vecteurs de C . Comme E est séparé, il existe un ouvert linéaire V tel que $y \notin x + V$. Or, d'après (VL1) la Proposition III.7 page 77, V est ouvert et fermé donc $C \cap (x + V)$ et $C \setminus (x + V)$ sont des ouverts de C d'intersection disjointe. On en déduit que C n'est pas connexe. Les seules parties connexes de E sont donc les singletons. $\square$

Dans un espace de Lefschetz, comme le corps de base est discret, certains théorèmes classiques d'analyse sont simplifiés. Les deux exemples qui suivent concernent les suites et séries (indexées par $\mathbb{N}$).

Proposition III.11. *Dans un espace de Lefschetz complet⁵, une série converge si et seulement si son terme général converge vers 0.*

Démonstration. Le sens direct est classique. Pour la réciproque, on remarque que la suite des sommes partielles d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers 0 est de Cauchy. En effet, pour tout ouvert linéaire V , à partir d'un certain rang, $x_n \in V$. Comme V est un sous-espace vectoriel, on a aussi pour tous $p, q > n$ la combinaison linéaire $\sum_{p \leq k \leq q} x_k \in V$. Donc la suite des sommes partielles est de Cauchy. Comme E est complet, la série de terme général $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. $\square$

Proposition III.12. *Dans un espace de Lefschetz discret, toute suite (indexée par $\mathbb{N}$) qui converge est stationnaire.*

Démonstration. Comme E est un espace vectoriel, il suffit de vérifier la proposition pour une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers 0. Dans un espace discret, $\{0\}$ est un voisinage de 0, il existe donc un rang à partir duquel $x_n = 0$. $\square$

Tout espace de Lefschetz finitaire étant complet, la Proposition III.11 page 78 s'applique. La Proposition III.12 page 78 est utile dans le cadre des espaces de Lefschetz finitaires qui sont engendrés par MALL car ceux-ci sont de dimension finie donc discrets (voir la Proposition III.6 page 77).

⁵Pour plus de détails sur les espaces de Lefschetz complets voir la Section III.1.5 page 88.

III.1.3 Bases

L'existence de bases joue un grand rôle dans ce travail. En effet, comme nous allons le voir ci-dessous, les espaces de Lefschetz finitaires admettent tous une base de Schauder. Nous commençons donc par définir les différentes notions de bases dans les espaces de Lefschetz, puis nous détaillons leurs relations. Dans un deuxième temps, nous étudions les relations entre les espaces de Lefschetz finitaires et leurs bases. Enfin, nous développons un exemple d'espace de Lefschetz finitaire qui n'a pas été introduit d'après des considérations de logique linéaire. C'est l'exemple des fonctions sur l'espace de Baire qui a été étudié par Ehrhard et Streicher [ES].

III.1.3.a Le cas général.

Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'un espace vectoriel est dite **sommable** lorsque le réseau des sommes partielles finies $(\sum_{i \in J} x_i ; J \subseteq I, J \text{ fini})$ converge.

Définition III.7. [Jar81] Soient E un espace de Lefschetz et $(e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

- On dit que $(e_i)_{i \in I}$ est libre lorsque pour tout $J \subseteq I$ fini, pour toute famille $(\lambda_j)_{j \in J}$ de scalaires, si $\sum_{j \in J} \lambda_j e_j = 0$, alors $\forall j \in J, \lambda_j = 0$.
- Une **base de Hamel** est une famille libre $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E telle que pour tout $x \in E$, il existe $J \subseteq I$ finie et une famille $(x_j)_{j \in J}$ de scalaires telle que $x = \sum_{j \in J} x_j e_j$.
- Une **base topologique** est une famille libre $(e_i)_{i \in I}$ telle que pour tout $x \in E$, il existe une *unique* famille $(x_i)_{i \in I}$ de scalaires telle que la famille $(x_i e_i)_{i \in I}$ est sommable de somme x .
- Une **base de Schauder** est une base topologique $(e_i)_{i \in I}$ telle que pour tout $i \in I$, la projection $e'_i : x \mapsto x_i$ est continue.

Tout espace vectoriel admet une base de Hamel et toutes les bases de Hamel ont le même cardinal appelé **dimension algébrique** (voir par exemple [Jar81, §1.4]). Par contre, tout espace de Lefschetz n'admet pas de base de Schauder. Gross [Gro71] a en effet exhibé un exemple d'espace de Lefschetz (dont la topologie est engendrée par une forme quadratique) qui n'admet pas de base. Par contre, toutes les bases de Schauder ont le même cardinal appelé **dimension topologique** (voir par exemple [Jar81, §14.2]). Rappelons enfin que les homéomorphismes linéaires transportent les bases de Schauder.

Dans le cas discret, les différentes notions de bases coïncident.

Proposition III.13. Soit E un espace de Lefschetz discret. Toute base de Schauder $(e_i)_{i \in I}$ est une base de Hamel. Réciproquement, toute base de Hamel est une base de Schauder.

Démonstration. Soient $(e_i)_{i \in I}$ une base de Schauder de E et $x \in E$. Il existe $(\lambda_i)_{i \in I}$ telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot e_i$ converge vers x . D'après la Proposition III.12 page 78, $\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot e_i$ est stationnaire, donc à partir d'un certain rang N on a $\lambda_i = 0$ et $x = \sum_{i=0}^N \lambda_i \cdot e_i$. Réciproquement, soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de Hamel. Pour montrer que c'est une base de Schauder, il nous suffit de vérifier que les projections e'_i sont continues. Comme E est muni de la topologie discrète, il admet comme système fondamental $(\{0\})$. Or pour tout $i \in I$, $\{0\} \subseteq \ker(e'_i)$, donc $\ker(e'_i)$ est ouvert et e'_i est continue. $\square$

III.1.3.b Le cas finitaire.

Soit $A = (|A|, \mathcal{F}(A))$ un espace de finitude relationnel.

Notation III.8. Pour tout $a \in |A|$, on note $e_a \in E_A$ la famille dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice a qui est égal à 1.

Remarquons alors que E_A est l'espace engendré par les combinaisons linéaires *finitaires* des vecteurs de base et non pas par les combinaisons linéaires finies comme nous en avons l'habitude en algèbre linéaire. De plus, les combinaisons linéaires finitaires convergent au sens de la topologie engendrée le système fondamental $(\mathcal{V}(u') ; u' \in \mathcal{F}(A)^\perp)$ de E_A (voir la Proposition III.4 page 75).

Lemme III.14. [Ehr05, §3] Soit $A \in \mathbf{RelFin}$. La famille $(e_a)_{a \in |A|}$ est une base de Schauder de E_A . On l'appellera base finitaire de E_A .

Démonstration. Soient $u' \in \mathcal{F}(A)^\perp$ et $x \in E_A$. La partie $F = |x| \cap u'$ de $|A|$ est finie. On en déduit que $\sum_{a \in F} x_a e_a$ est bien définie dans E_A . Comme $x - \sum_{a \in F} x_a e_a \in \mathcal{V}(u')$, $\sum_a x_a e_a$ converge vers x . Pour tout $a \in |A|$, la projection $e'_a : x \mapsto x_a$ est continue. En effet, son noyau $\mathcal{V}(\{a\})$ est un ouvert linéaire, car la partie finie $\{a\}$ est anti-finitaire. $\square$

Exemple III.4. L'espace de Lefschetz finitaire E_B admet une base finitaire à deux éléments $\{e_T, e_F\}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note e_n la suite dont tous les coefficients sont nuls sauf le n -ième qui est égal à 1. La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base finitaire de $E_{\mathcal{Nat}}$ et de $E_{\mathcal{Nat}^\perp}$.

Comme les bases de Schauder sont stables par homéomorphisme linéaire, on déduit la proposition suivante.

Proposition III.15. Tout espace de Lefschetz finitaire admet une base de Schauder.

Démonstration. Soient E un espace de Lefschetz finitaire et (E, ϕ, A) une carte de E . Comme $(e_a)_{a \in A}$ est une base de Schauder de E_A et $\phi : E \rightarrow E_A$ est un homéomorphisme linéaire, E admet $(\phi^{-1}(e_a))_{a \in A}$ pour base de Schauder. $\square$

Définition III.9. Soient A et B deux espaces de finitude relationnels. Pour toute fonction $f : E_A \rightarrow E_B$ linéaire continue, on note $\text{Mat}(f)$ la matrice associée, i.e.

$$\forall a \in |A|, b \in |B|, \text{Mat}(f)_{a,b} = \langle e'_b, f(e_a) \rangle.$$

Tout élément de $E_{A \multimap B}$, est une matrice $M \in \mathbb{K}^{|A| \times |B|}$ dont le support $|M| = \{(a, b) ; M_{a,b} \neq 0\}$ est une relation finitaire, i.e. $|M| \in \mathcal{F}(A \multimap B)$. D'après la caractérisation des relations finitaires (voir la Proposition II.8 page 58), pour tout $b \in |B|$, l'ensemble

$${}^t|M| \cdot \{b\} = \{a \in |A| ; M_{a,b} \neq 0\}$$

est fini. On peut alors définir $\text{Lin}(M)$ l'application linéaire canoniquement associée par l'équation

$$\forall x \in E_A, \text{Lin}(M)(x) = \sum_{b \in |B|} \left(\sum_{a \in |A|} \langle e'_a, x \rangle M_{a,b} \right) e_b.$$

Proposition III.16. [Ehr05, Proposition 12] Soient A et B deux espaces de finitude relationnels. Si une fonction linéaire $f : E_A \rightarrow E_B$ est continue, alors le support de sa matrice associée $\text{Mat}(f)$ est une relation finitaire de A dans B , i.e.

$$|\text{Mat}(f)| \in \mathbf{RelFin}(A, B).$$

Réciproquement, pour toute matrice $M \in E_{A \multimap B}$, l'application linéaire associée $\text{Lin}(M) : E_A \rightarrow E_B$ est continue.

De plus, la fonction linéaire

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{L}_c(E_A, E_B) &\rightarrow E_{A \multimap B} \\ f &\mapsto (\text{Mat}(f)_{a,b})_{(a,b) \in |A| \times |B|} \end{aligned}$$

est un isomorphisme dont l'inverse est

$$\begin{aligned} \phi : E_{A \multimap B} &\rightarrow \mathcal{L}_c(E_A, E_B) \\ M &\mapsto \text{Lin}(M) \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $f : E_A \rightarrow E_B$ linéaire continue. Montrons que $|\text{Mat}(f)|$ est une relation finitaire.

Soit $u \in \mathcal{F}(A)$. La somme $\sum_{a \in u} e_a$ est bien définie dans E_A , puisque $(e_a)_{a \in u}$ est une famille de support finitaire. Par continuité et linéarité de f , on a l'égalité

$$f\left(\sum_{a \in u} e_a\right) = \sum_{a \in u} f(e_a) = \sum_{a \in u} \sum_{b \in |B|} \text{Mat}(f)_{a,b} e_b.$$

Comme de plus, $f(\sum_{a \in u} e_a) \in E_B$ est bien définie, on en déduit que

$$\left| f\left(\sum_{a \in u} e_a\right) \right| = |\text{Mat}(f)| \cdot u \in \mathcal{F}(B).$$

Soit $v' \in \mathcal{F}(B)^\perp$. Comme $\mathcal{V}(v')$ est un ouvert de E_B et f est continue, il existe $u' \in \mathcal{F}(A)^\perp$ tel que $f(\mathcal{V}(u')) \subseteq \mathcal{V}(v')$. Or, par définition de $\mathcal{V}(u')$ et de $\mathcal{V}(v')$, on a la suite d'implication

$$a \notin u' \Rightarrow e_a \in \mathcal{V}(u') \Rightarrow f(e_a) \in \mathcal{V}(v') \Rightarrow |f(e_a)| \cap v' = \emptyset.$$

On en déduit par contraposée que

$${}^t\text{Mat}(f) \cdot v' = \{a ; \exists b \in v', \text{Mat}(f)_{a,b} \neq 0\} = \{a ; |f(e_a)| \cap v' \neq \emptyset\} \subseteq u'.$$

La partie ${}^t\text{Mat}(f) \cdot v'$ est anti-finitaire car elle est incluse dans une partie anti-finitaire.

On a donc montré que $|\text{Mat}(f)|$ vérifie les deux conditions caractérisant les relations finitaires (voir la Définition II.2 page 45).

Soit $M \in E_{A \multimap B}$. Nous avons vu lors de l'introduction de cette notation que $\text{Lin}(f)$ est bien définie et linéaire. Montrons qu'elle est continue. Il nous suffit de vérifier que l'image

inverse des ouverts linéaires du système fondamental $(\mathcal{V}(v') ; v' \in \mathcal{F}(B)^\perp)$ définissant la topologie sur E_B est un ouvert linéaire de E_A .

Soit $v' \in \mathcal{F}(B)^\perp$. Comme $|M|$ est une relation finitaire, $u' = {}^t\text{Mat}(f) \cdot v'$ est anti-finitaire. De plus, pour tout $a \notin u'$, $(\text{Mat}(f) \cdot \{a\}) \cap v' = \emptyset$. On en déduit que $f(\mathcal{V}(u')) \subseteq \mathcal{V}(v')$.

Pour conclure, on vérifie facilement que

$$\forall f \in \mathcal{L}_c(E_A, E_B), \text{Lin}(\text{Mat}(f)) = f \text{ et } \forall M \in E_{A \rightarrow B}, \text{Mat}(\text{Lin}(M)) = M.$$

□

Tout espace de Lefschetz finitaire (E, ϕ, A) admet pour base de Schauder la famille $(\phi^{-1}(e_a) ; a \in |A|)$. Par contre tous les espaces de Lefschetz qui admettent une base de Schauder ne sont pas a priori des espaces de Lefschetz finitaires.

Les espaces de Lefschetz finitaires sont des espaces complets (voir Proposition III.26 page 92) et réflexifs (voir Proposition III.3 page 128), qui admettent une base de Schauder qui engendre la topologie. Or, le contre-exemple de Gross [Gro71] dont nous avons parlé précédemment, est un espace de Lefschetz qui n'admet pas de base mais qui n'est pas non plus complet. Il ne permet donc pas de décider si tout espace de Lefschetz réflexif et complet admet une base de Schauder. On ne sait donc pas à ce jour si les espaces de Lefschetz finitaires sont les seuls espaces de Lefschetz réflexifs et complets.

Citons pour finir l'exemple de Ehrhard et Streicher [ES]. L'espace de Baire est l'espace topologique des suites d'entiers naturels, muni de la topologie induite par les segments initiaux. L'espace des fonctions continues sur l'espace de Baire et à valeurs dans le corps $\mathbb{k}$ est un espace de Lefschetz finitaire lorsqu'il est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de l'espace de Baire. On peut en effet montrer qu'il existe un homéomorphisme linéaire avec E_W , où W est l'espace de finitude relationnel introduit à l'Exemple II.4 page 47.

L'espace des fonctions continues sur l'espace de Baire, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les éventails, est un espace muni d'une structure uniforme. Il serait intéressant de caractériser les propriétés nécessaires pour qu'un espace de fonctions muni d'une structure uniforme soit un espace de Lefschetz finitaire.

III.1.4 Dual topologique

III.1.4.a Le cas général.

La négation de la logique linéaire est interprétée dans les espaces vectoriels topologiques par le dual topologique. Ce dernier va donc jouer un grand rôle dans cette étude. Dans ce paragraphe, nous introduisons des propriétés et théorèmes qui vont nous servir par la suite. Ainsi, nous aurons besoin d'une version du théorème de Hahn-Banach et des propriétés de séparation qui en découlent premièrement pour étudier la *réflexivité* du modèle et deuxièmement pour étudier la *totalité* dans le Chapitre IV.

Pour tout $x' : E \rightarrow \mathbb{k}$ une fonction linéaire pas forcément définie sur E , on note $D_{x'}$ son domaine. Pour pouvoir parler de linéarité, on suppose implicitement que $D_{x'}$ est un sous-espace vectoriel de E .

Théorème III.1 (Hahn-Banach). *Soit E un espace de Lefschetz. Soient D un sous-espace vectoriel de E muni de la topologie induite et $x' : D \rightarrow \mathbb{k}$ une forme linéaire continue sur D . Il existe alors un ouvert linéaire V de E tel que $V \cap D \subseteq \ker(x')$.*

Dans ce cas, il existe un prolongement continu de x' à E tel que $V \subseteq \ker(x')$.

Nous présentons ici une preuve du théorème de Hahn-Banach inspirée du cas localement convexe ; le rôle des jauges étant joué par un ouvert linéaire V qui témoigne uniformément de la continuité des extension de x' .

Démonstration. Utilisons le lemme de Zorn sur l'ensemble

$$\mathcal{P} = \{y' : D_{y'} \rightarrow \mathbb{k} \text{ linéaire s.t. } D \subseteq D_{y'}, \forall x \in D, \langle y', x \rangle = \langle x', x \rangle, V \cap D_{y'} \subseteq \ker(y')\}$$

muni de l'ordre de prolongement

$$y' \leq z' \iff \begin{cases} D_{y'} \subseteq D_{z'} \\ \forall x \in D_{y'}, \langle z', x \rangle = \langle y', x \rangle. \end{cases}$$

Remarquons que la condition $V \cap D_{y'} \subseteq \ker(y')$ implique la continuité de y' sur $D_{y'}$.

Vérifions les hypothèses du lemme de Zorn. Premièrement, $\mathcal{P}$ est non vide car $x' \in \mathcal{P}$.

Deuxièmement, montrons que $\mathcal{P}$ est un ensemble inductif. Soit Q un ensemble totalement ordonné de $\mathcal{P}$. Posons $D_Q = \cup_{z' \in Q} D_{z'}$, c'est un sous-espace vectoriel de E car la famille $(D_{z'})_{z' \in Q}$ est croissante. Définissons $y' : D_Q \rightarrow \mathbb{k}$ par

$$\forall x \in D_{z'}, \langle y', x \rangle = \langle z', x \rangle.$$

C'est une forme linéaire bien définie sur D_Q car Q est totalement ordonné pour l'ordre de prolongement. De plus y' est un prolongement de tous les éléments de Q et donc de x' . Montrons que y' est continue sur D_Q . Soit $x \in D_Q \cap V$. Il existe $z' \in Q$ tel que $x \in D_{z'}$, donc $\langle y', x \rangle = \langle z', x \rangle$. Or, $x \in V \cap D_{z'}$ et $V \cap D_{z'} \subseteq \ker(z')$ car $z' \in \mathcal{P}$, donc $\langle y', x \rangle = \langle z', x \rangle = 0$. On a donc montré que $V \cap D_Q \subseteq \ker(y')$. On en déduit d'une part que y' est continue et d'autre part que $y' \in \mathcal{P}$.

On peut donc appliquer le lemme de Zorn : $\mathcal{P}$ admet une borne supérieure, notée y'_0 .

Supposons que le domaine de définition de y'_0 , noté $D_{y'_0}$, soit différent de E . Soit $x_0 \in E \setminus D_{y'_0}$. Posons

$$D_0 = D_{y'_0} \oplus \mathbb{k} \cdot x_0.$$

Définissons $y'_\alpha : D_0 \rightarrow \mathbb{k}$ par

$$\forall x \in D_{y'_0}, \forall t \in \mathbb{k}, \langle y'_\alpha, x + tx_0 \rangle = \langle y'_0, x \rangle + \alpha t.$$

On cherche α tel que $y'_\alpha \in \mathcal{P}$.

Quelque soit α , $D \subseteq D_{y'_0} \subseteq D_{y'_\alpha}$. De plus, y'_0 est une extension de x' et pour tout $x \in D_{y'_0}$, on a $\langle y'_\alpha, x \rangle = \langle y'_0, x \rangle$, donc y'_α est aussi une extension de x' .

Enfin, si V vérifie $D_0 \cap V = \{0\}$, alors $D_0 \cap V \subseteq \ker(y'_\alpha)$. Sinon, il existe $x \in D_{y'_0}$ tel que $x + x_0 \in V$. Choisissons $\alpha = -\langle y'_0, x_0 \rangle$ et montrons que $D_0 \cap V \subseteq \ker(y'_\alpha)$.

Soient $y \in D_{y'_0}$ et t tels que $y + tx_0 \in V$. Comme V est un sous-espace de E , $(y + tx_0) - t(x + x_0) \in V$. On en déduit que $y - tx \in V$. Or $y - tx \in D_{y'_0}$ et $V \cap D_{y'_0} \subseteq \ker(y'_0)$ car $y' \in \mathcal{P}$, d'où $\langle y'_0, y - tx \rangle = 0$. On peut alors calculer

$$\langle y'_{\alpha_0}, y + tx_0 \rangle = \langle y'_0, y \rangle + \alpha t = t \langle y'_0, x \rangle + \alpha t = 0.$$

On en déduit que $D_0 \cap V \subseteq \ker(y'_\alpha)$.

Dans les deux cas, $y'_\alpha \in \mathcal{P}$ est une extension stricte de y'_0 . On a donc trouvé une contradiction avec le fait que y'_0 soit un majorant de $\mathcal{P}$. On a donc prouvé que $D_{y'} = E$. $\square$

Les espaces de Lefschetz vérifient la propriété selon laquelle un point peut être séparé d'un sous-espace vectoriel fermé qui ne le contient pas par une forme linéaire continue.

Proposition III.17. [*Köi79*, §10.3] Soit E un espace de Lefschetz. Pour tout sous-espace vectoriel fermé D de E et $x \notin D$, il existe $x' \in E'$ telle que $\langle x', x \rangle = 1$ et x' s'annule sur D .

Démonstration. Comme $x \notin D$ et D est fermé, il existe un ouvert linéaire V tel que $(x + V) \cap D = \emptyset$. Si $x \in D + V$, alors il existe $d \in D$ et $y \in V$ tel que $x = d + y$, et dans ce cas $x - y = d \in x + V \cap D$; ceci contredit $x + V \cap D = \emptyset$, donc $x \notin D + V$. On définit x'_0 par $\langle x'_0, x \rangle = 1$ et $\forall y \in V + D$, $\langle x'_0, y \rangle = 0$. Or $V \subset \ker(x'_0)$, x'_0 est continue sur $\mathbb{k} \cdot x + V + D$ et s'annule sur D . On applique le Théorème III.1 de Hahn-Banach et on prolonge x'_0 en une forme linéaire continue x' sur E . $\square$

La Proposition III.17 ci-dessus et la Condition (TL2) de séparation des espaces de Lefschetz (voir Définition III.1 page 71) impliquent la séparation par rapport aux formes linéaires continues.

Proposition III.18 (Séparation). Soit E un espace de Lefschetz. Pour tout vecteur $x \neq 0$, il existe une forme linéaire continue x' telle que $\langle x', x \rangle = 1$.

Démonstration. Comme $x \neq 0$, il existe un ouvert linéaire V tel que $x \notin V$. Tout ouvert linéaire étant fermé (voir la Proposition III.7 page 77), on conclut en appliquant la Proposition III.17 page 84. $\square$

La Proposition III.17 ci-dessus va aussi nous permettre de montrer que la fermeture d'un sous-espace de Lefschetz peut être vue comme la fermeture par bi-orthogonal (voir Chapitre I).

Proposition III.19. Pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace de Lefschetz, le noyau dans E de son annulateur dans E' est égal à son adhérence, i.e.

$${}^\perp(F^\perp) = \overline{F}.$$

Démonstration. Soit $x \in \overline{F}$. Pour tout $x' \in F^\perp$, $\langle x', x \rangle = 0$. Comme x' est uniformément continue, on déduit par prolongement que $x \in {}^\perp(F^\perp)$. Soit $x \in {}^\perp(F^\perp)$. Par contraposée, supposons que $x \notin \overline{F}$. D'après la Proposition III.17 page 84, il existe $x' \in E'$ tel que $\langle x', x \rangle = 1$ et x' s'annule sur $\overline{F}$ donc sur F , i.e. $x' \in F^\perp$. On en déduit que $x \notin {}^\perp(F^\perp)$. $\square$

Enfin, nous allons montrer l'existence de familles duales (voir la Proposition III.21 page 85). Ceci nous sera utile pour montrer une caractérisation particulièrement simple des linéairement compacts (voir la Proposition III.56 page 111). Nous allons utiliser le Théorème III.1 page 83 de Hahn-Banach ainsi que le lemme classique d'algèbre linéaire qui suit.

Lemme III.20. *Si $x'_1, \dots, x'_n$ sont des formes linéaires non nulles et l'intersection des noyaux de $x'_1, \dots, x'_{n-1}$ est contenue dans le noyau de x'_n , alors x'_n est une combinaison linéaire des $x'_1, \dots, x'_{n-1}$. Autrement dit,*

$$\bigcap_{i < n} \ker(x'_i) \subseteq \ker(x'_n) \quad \Rightarrow \quad \exists (\lambda_i)_{i < n} ; x'_n = \sum_{i < n} \lambda_i x'_i.$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur n .

- Supposons $n = 1$, $\ker(x'_0) \subseteq \ker(x'_1)$. Si $x'_0 = 0$, on choisit $\lambda = 0$. Sinon, comme ils sont tous les deux de co-dimension 1, $\ker(x'_0)$ et $\ker(x'_1)$ sont égaux. Si $x_0 \notin \ker(x'_1)$, alors $E = \ker(x'_1) \oplus \mathbb{k} \cdot x_0$. Comme $\langle x'_1, x_0 \rangle \neq 0$ et $\langle x'_0, x_0 \rangle \neq 0$, il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\langle x'_1, x_0 \rangle = \lambda \langle x'_0, x_0 \rangle$. On vérifie alors que $x'_1 = \lambda x'_0$.
- Au rang n , on suppose

$$\bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(x'_i) \subseteq \ker(x'_n).$$

On en déduit

$$\bigcap_{i=0}^{n-2} \ker(x'_{i|_{\ker(x'_{n-1})}}) \subseteq \ker(x'_{n|_{\ker(x'_{n-1})}}).$$

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence, il existe $(\lambda_i) \in \mathbb{k}^n$ telle que $x'_{n|_{\ker(x'_{n-1})}} = \sum_{i=0}^{n-2} \lambda_i x'_{i|_{\ker(x'_{n-1})}}$. Pour conclure, on applique le cas $n = 1$ à $x'_n - \sum_{i=0}^{n-2} \lambda_i x'_i$ et x'_{n-1} car

$$\ker(x'_{n-1}) \subseteq \ker\left(x'_n - \sum_{i=0}^{n-2} \lambda_i x'_i\right).$$

□

Proposition III.21. *Soit E un espace de Lefschetz. Pour toute famille libre $(x_i)_{i \leq n}$ de vecteurs de E , il existe une famille duale libre $(x'_i)_{i \leq n} \in E'^n$ telle que*

$$\forall i, j \leq n, \langle x'_i, x_j \rangle = \delta_{i,j},$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker.

Dualement, soit $(x'_i)_{i \leq n}$ une famille libre de formes linéaires continues. Il existe une famille duale $(x_i)_{i \leq n} \in E^n$ telle que

$$\forall i, j \leq n, \langle x'_i, x_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

De plus, il existe $x \in E$ tel que $\forall i \leq n, \langle x'_i, x \rangle = 1$.

Démonstration. Les x'_i sont entièrement définis sur le sous-espace vectoriel fermé $D = \langle x_i ; i \leq n \rangle$ par les images des vecteurs de base (voir la Proposition III.7 page 77), puis prolongés à E' en utilisant le Théorème III.1 page 83 de Hahn-Banach.

Pour construire la seconde famille on procède par récurrence :

- $x'_0 \neq 0$, donc il existe $x_0 \in E$ tel que $\langle x'_0, x_0 \rangle = 1$.
- On suppose que l'on a construit la famille $(x_i)_{i < n}$. Comme la famille (x'_i) est libre, et d'après le Lemme III.20, on a $\bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(x'_i) \not\subseteq \ker(x'_n)$. Ainsi, il existe $x_n \in \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(x'_i)$ tel que $\langle x'_n, x_n \rangle = 1$.

Pour la deuxième partie de la proposition, on pose $x = \sum_{i=0}^n x_i$ et on vérifie que $\forall i \leq n$, $\langle x'_i, x \rangle = 1$. $\square$

III.1.4.b Le cas finitaire.

Commençons par quelques remarques sur l'opération d'orthogonalité. Rappelons la Définition III.4 page 74 du support

$$\forall x \in E_A, |x| = \{a \in |A| ; x_a \neq 0\}$$

et la Notation III.5 page 74 :

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{F}(A), \quad \mathcal{K}(u)_A &= \{x \in E_A ; |x| \subseteq u\}, \\ \forall u' \in \mathcal{F}(A)^\perp, \quad \mathcal{V}(u')_A &= \{x \in E_A ; |x| \cap u' = \emptyset\}. \end{aligned}$$

Proposition III.22. Soit A un espace de finitude relationnel.

La fonction

$$E'_A \xrightarrow{f} E_{A^\perp}$$

$$x' \longmapsto (\langle x', e_a \rangle)_{a \in |A|}$$

est un isomorphisme entre les espaces vectoriels E'_A et $E_{A^\perp}$. En particulier, toute forme linéaire continue sur E_A peut être vue comme une famille dont le support est anti-finitaire dans A , et vice-versa. De plus,

$$\forall u' \in \mathcal{F}(A)^\perp, f(\mathcal{V}(u')_A^\perp) = \mathcal{K}(u')_{A^\perp} \text{ et } \forall u \in \mathcal{F}(A), f(\mathcal{K}(u)_A^\perp) = \mathcal{V}(u)_{A^\perp}.$$

Démonstration. L'isomorphisme entre E'_A et $E_{A^\perp}$ est donnée par les deux fonctions linéaires inverses l'une de l'autre

$$\begin{array}{ccc} x' & \longmapsto & (\langle x', e_a \rangle)_{a \in |A|} \\ & \searrow f & \nearrow \\ E'_A & & E_{A^\perp} \\ & \nwarrow f^{-1} & \swarrow \\ x & \longmapsto & \sum_{a \in |A|} x'_a x_a \longleftarrow (x'_a)_{a \in |A|} \end{array}$$

Montrons que f est à valeurs dans $E_{A^\perp}$. Pour cela nous allons avoir besoin de la notation $|x'| = \{a \in |A| ; \langle x', e_a \rangle \neq 0\}$.

Soit $x' \in E'_A$. Par définition de E'_A , x' est une forme linéaire *continue* sur E_A . Comme pour tout $a \in |A|$, $e_a \in E_A$, $x'_a = \langle x', e_a \rangle$ est bien définie. Par continuité de x' , il existe $u' \in \mathcal{F}(A)^\perp$ telle que

$$\mathcal{V}(u')_A \subseteq \ker_{E_A}(x').$$

Pour tout $a \notin u'$, $e_a \in \mathcal{V}(u')_A$, $x'_a = 0$ et $a \notin |x'|$. Par contraposée, on déduit que $|x'| \subseteq u'$. Or les parties anti-finitaires sont stables par sous-ensemble, donc $|x'| \in \mathcal{F}(A)^\perp$.

Montrons que f est injective. Soit $x' \in E'_A$ non nulle. Il existe $x \in E_A$ tel que $\langle x', x \rangle \neq 0$. Comme $(e_a)_{a \in |A|}$ est une base de Schauder, on a $x = \sum_{a \in |A|} x_a e_a$, or par continuité de x' , $\langle x', x \rangle = \sum_{a \in |A|} x_a \langle x', e_a \rangle \neq 0$. Il existe donc a tel que $\langle x', e_a \rangle \neq 0$.

Montrons que f est surjective. Comme $f^{-1} \circ f = \text{id}$, il suffit de montrer que f^{-1} est bien définie. Soit $x' \in E_{A^\perp}$. Alors $|x'| \in \mathcal{F}(A)^\perp$. On en déduit que pour tout $x \in E_A$, $|x| \cap |x'|$ est fini, donc la somme $\langle x', x \rangle = \sum_{a \in |A|} x'_a x_a$ est bien définie car finie. De plus pour tout $x \in E_A$ tel que $|x| \cap |x'| = \emptyset$,

$$\langle x', x \rangle = \sum_{a \in |A|} x'_a x_a = \sum_{a \in |x| \cap |x'|} x'_a x_a = 0.$$

Donc $\mathcal{V}(|x'|) \subseteq \ker(x')$ et x' est continue.

Remarquons de plus que pour tout $u' \in \mathcal{F}(A)^\perp$,

$$\begin{aligned} x' \in \mathcal{V}(u')_A^\perp &\iff x' \in E'_A \text{ et } \mathcal{V}(u')_A \subseteq \ker(x') \\ &\iff x' \in E'_A \text{ et } |x'| \subseteq u'. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $u' \in \mathcal{F}(A^\perp) = \mathcal{F}(A)^\perp$,

$$\mathcal{V}(u')_A^\perp = \{x' \in E'_A ; |x'| \subseteq u'\} = \mathcal{K}(u')_{A^\perp}.$$

Soit $u \in \mathcal{F}(A)$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x' \in \mathcal{K}(u)_A^\perp &\iff \forall a \in u, \langle x', e_a \rangle = x_a = 0 \\ &\iff |x'| \cap u = \emptyset \\ &\iff f(x') \in \mathcal{V}(u). \end{aligned}$$

□

Exemple III.5. On applique la proposition précédente à $\mathcal{Nat}$. On en déduit que le dual topologique de l'espace $E_{\mathcal{Nat}}$, i.e. de l'espace des suites finies muni de la topologie discrète, est égal à $E_{\mathcal{Nat}^\perp}$, i.e. l'espace des suites quelconques muni de la topologie engendrée par la famille $(\mathcal{V}(J) ; J \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}))$ (voir l'Exemple III.11 page 98).

III.1.5 Complétion

Commençons par rappeler la définition d'espace complet dans les espaces vectoriels topologiques. Quand un espace n'est pas séquentiel, i.e. il n'est pas caractérisé par la convergence des suites, on doit considérer des suites généralisées, appelées réseaux, afin de définir la complétude.

Un **réseau** est une famille $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ d'éléments de E indexée par un ensemble filtrant Γ .

On dit qu'un réseau $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ **converge** vers une limite $x \in E$ lorsque :

$$\forall V \in \mathcal{V}, \exists \alpha \in \Gamma ; \forall \beta \geq \alpha, x - x_\beta \in V.$$

Enfin, un réseau $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ est dit de **Cauchy** lorsque :

$$\forall V \in \mathcal{V}, \exists \alpha \in \Gamma ; \forall \beta, \beta' \geq \alpha, x_\beta - x_{\beta'} \in V.$$

Un réseau qui converge est aussi un réseau de Cauchy.

Un espace de Lefschetz est dit **complet** lorsque tout réseau de Cauchy est convergent.

III.1.5.a Le cas général.

Le complété $\tilde{E}$ d'un espace vectoriel topologique séparé E est l'espace complet tel que E , muni de la topologie induite, est *dense* dans $\tilde{E}$.

Il existe plusieurs façons de construire ce complété. La construction la plus classique revient à considérer l'ensemble des réseaux de Cauchy et de le quotienter par la relation d'équivalence reliant les réseaux dont la différence converge vers 0. On munit alors ce quotient d'une structure d'espace vectoriel et d'une topologie compatible avec la structure linéaire.

Même si cette construction reste valable dans le cas des espaces de Lefschetz, il en existe une autre qui permet de décrire les éléments du complété comme des formes linéaires et non pas comme des classes d'équivalence. Cette construction, introduite par Grothendieck [Gro50] dans le cadre des espaces localement convexes, s'adapte aux espaces de Lefschetz [Köt79, §13.3].

Remarquons que l'évaluation de E dans E'^* est une injection

$$\begin{aligned} E &\xhookrightarrow{\text{ev}} E'^* \\ x &\mapsto \text{ev}_x : x' \mapsto \langle x', x \rangle. \end{aligned}$$

En effet, si $x \neq 0$ alors $\text{ev}_x \neq 0$ car, d'après le Lemme III.18 page 84 de séparation, il existe $x' \in E'$ tel que $\langle \text{ev}_x, x' \rangle = 1$.

On va construire un sous-espace de E'^* , le munir de la topologie la moins fine telle que ev soit ouverte et montrer qu'il est linéairement homéomorphe au complété de E .

Proposition III.23. *Soit E un espace de Lefschetz et $\mathcal{V}$ un système fondamental de E . Soit $\tilde{E}$ l'espace des formes linéaires y^* sur E' qui coïncident avec un ev_x sur chaque annulateur d'un ouvert linéaire de E , i.e.*

$$\tilde{E} = \{y^* \in E'^* ; \forall V \in \mathcal{V}, \exists x \in E, \forall x' \in \text{ann}_{E'}(V), \langle y^*, x' \rangle = \langle \text{ev}_x, x' \rangle\}.$$

Muni de la topologie engendrée par le système fondamental

$$\{\text{ann}_{E'^*}(\text{ann}_{E'}(V)) ; V \in \mathcal{V}\},$$

$\tilde{E}$ est un espace de Lefschetz complet.

Démonstration. Soit $(x_\gamma^*)_{\gamma \in \Gamma}$ un réseau de Cauchy dans $\tilde{E}$.

Commençons par deux remarques :

- * Par définition de $\tilde{E}$, pour tout ouvert linéaire V de E , pour tout $\alpha \geq \delta$, comme $x_\alpha^* \in \tilde{E}$, il existe $x_\alpha \in E$ tel que pour tout $x' \in \text{ann}_{E'}(V)$, $\langle x_\alpha^*, x' \rangle = \langle \text{ev}_{x_\alpha}, x' \rangle = \langle x', x_\alpha \rangle$.
- * Par définition des réseaux de Cauchy et de la topologie sur $\tilde{E}$, pour tout ouvert linéaire V , il existe δ tel que

$$\forall \alpha, \beta \geq \delta, x_\alpha^* - x_\beta^* \in \text{ann}_{E'^*}(\text{ann}_{E'}(V)).$$

On en déduit que pour tout $x' \in \text{ann}_{E'}(V)$ et pour tout $\alpha \geq \delta$, $\langle x_\alpha^*, x' \rangle = \langle x_\delta^*, x' \rangle$.

En combinant ces deux remarques, on déduit que

$$\forall V \in \mathcal{V}, \exists \delta \in \Gamma, \exists x_\delta \in E ; \forall \alpha \geq \delta, \forall x' \in \text{ann}_{E'}(V), \langle x_\alpha^*, x' \rangle = \langle x', x_\alpha \rangle = \langle x', x_\delta \rangle.$$

Comme δ et x_δ ne dépendent que de V on va les noter δ_V et x_V dans la suite de la démonstration.

Nous pouvons à présent construire la limite x^* de $(x_\gamma^*)_{\gamma \in \Gamma}$.

Soit $x' \in E'$. Comme x' est une forme linéaire *continue*, il existe $V \in \mathcal{V}$ tel que $V \subseteq \ker(x')$. On en déduit que $x' \in \text{ann}_{E'}(V)$, il existe donc $\delta_V \in \Gamma$ et $x_V \in E$ tels que

$$\forall \alpha \geq \delta_V, \langle x_\alpha^*, x' \rangle = \langle x', x_V \rangle.$$

Montrons que x_V ne dépend pas de V . Soit $V' \subseteq \ker(x')$ tel que $V' \in \mathcal{V}$. Il existe $\delta_{V'} \in \Gamma$ et $x_{V'} \in E$ tels que

$$\forall \alpha \geq \delta_{V'}, \langle x_\alpha^*, x' \rangle = \langle x', x_{V'} \rangle.$$

Comme $x' \in \text{ann}_{E'}(V) \cap \text{ann}_{E'}(V')$, pour tout $\alpha \in \Gamma$ tel que $\alpha \geq \delta_V$ et $\alpha \geq \delta_{V'}$, $\langle x_\alpha^*, x' \rangle = \langle x', x_V \rangle = \langle x', x_{V'} \rangle$.

On peut donc définir $x^* : x' \mapsto \langle x', x_V \rangle$, pour $V \subseteq \ker(x')$ ouvert linéaire.

Vérifions que $x^* \in E'^*$ et est la limite de $(x_\alpha^*)_{\alpha \in \Gamma}$.

Soit $V \in \mathcal{V}$. Il existe δ_V et x_V tels que pour tout $\alpha \geq \delta_V$, pour tout $x' \in \text{ann}_{E'}(V)$, on ait $\langle x_\alpha^*, x' \rangle = \langle x', x_V \rangle$. Or, si $x' \in \text{ann}_{E'}(V)$, alors $V \subseteq \ker x'$ et $\langle x^*, x' \rangle = \langle x', x_V \rangle$.

On en déduit d'une part que

$$\forall V \in \mathcal{V}, \exists x_V ; \forall x' \in \text{ann}_{E'}(V), \langle x^*, x' \rangle = \langle x', x_V \rangle.$$

Par définition, on a donc $x^* \in \tilde{E}$.

On en déduit d'autre part que

$$\forall V \in \mathcal{V}, \exists \delta_V ; \forall x' \in \text{ann}_{E'}(V), \alpha \geq \delta_V, \langle x_\alpha^*, x' \rangle = \langle x^*, x' \rangle,$$

autrement dit,

$$\forall V \in \mathcal{V}, \exists \delta_V ; \forall \alpha \geq \delta_V, x^* - \text{ev}_{x_V} \in \text{ann}_{E'^*}(\text{ann}_{E'}(V)).$$

Ceci revient à la convergence de $(x_\gamma^*)_{\gamma \in \Gamma}$ vers x^* , puisque la topologie de $\tilde{E}$ est engendrée par les $\text{ann}_{E'^*}(\text{ann}_{E'}(V))$ pour V ouvert linéaire de E . $\square$

Proposition III.24. *L'image de E par ev est dense dans $\widetilde{E}$. De plus, l'injection ev de E dans $\widetilde{E}$ est continue et ouverte.*

Démonstration. Soit $x^* \in \widetilde{E}$. Pour tout ouvert linéaire V , il existe $x_V \in E$ tel que $x^* - \text{ev}_{x_V} \in \text{ann}_{E'^*}(\text{ann}_{E'}(V))$. La famille $(\text{ev}_{x_V} ; V \in \mathcal{V})$ est un réseau de Cauchy qui converge vers x^* dans $\widetilde{E}$. On en déduit la densité de $\text{ev}(E)$ dans $\widetilde{E}$.

Soit V un ouvert linéaire de E . Rappelons que par définition :

$$\text{ann}_{E'^*}(\text{ann}_{E'}(V)) = \{x^* \in \widetilde{E} ; \forall x' \in \text{ann}_{E'}(V), \langle x^*, x' \rangle = 0\}$$

et que :

$$\begin{aligned} E &\xrightarrow{\text{ev}} E'^* \\ x &\mapsto \text{ev}_x : x' \mapsto \langle x', x \rangle. \end{aligned}$$

Comme V est un ouvert linéaire de E , il est fermé et on sait que ${}^\perp(V^\perp) = V$ (voir les Propositions III.7 page 77 et III.19 page 84). Ce qui signifie que

$$\{x \in E ; \forall x' \in \text{ann}_{E'}(V), \langle x', x \rangle = 0\} = V,$$

c'est-à-dire que $\text{ev}^{-1}(\text{ann}_{E'^*}(\text{ann}_{E'}(V))) = V$. On en déduit d'une part la continuité de ev et d'autre part que

$$\text{ann}_{E'^*}(\text{ann}_{E'}(V)) \cap \text{ev}(E) = \text{ev}(V), \quad (\text{III.1})$$

donc ev est ouverte. $\square$

De la Proposition III.24 précédente, on déduit le théorème suivant.

Théorème III.2. [Köt79, §13.3] *Le complété d'un espace de Lefschetz E est linéairement homéomorphe à $\widetilde{E}$.*

III.1.5.b Le cas finitaire.

La construction que nous avons présentée ci-dessus nous permet de comprendre sous un nouvel angle la construction par double orthogonal des espaces de finitude relationnels. Ainsi, l'opération de double-orthogonal des espaces de finitude relationnels se traduit par la complétion au niveau des espaces de Lefschetz.

Proposition III.25. *Soient $|A|$ un ensemble dénombrable et $\mathcal{F}$ un ensemble de parties de $|A|$ clos par sous-ensemble et par unions finies. Considérons l'espace de Lefschetz*

$$E_A = \{x \in \mathbb{k}^{|A|} ; |x| \in \mathcal{F}\},$$

muni de la topologie anti-finitaire engendrée par le système fondamental

$$\mathcal{V}(u') = \{x \in E_A ; |x| \cap u' = \emptyset\}$$

pour $u' \in \mathcal{F}^\perp$. Le complété de E_A est l'espace de Lefschetz finitaire associé à l'espace de finitude relationnel $A^{\perp\perp} \stackrel{\text{def}}{=} (|A|, \mathcal{F}^{\perp\perp})$, i.e.

$$\widetilde{E}_A \simeq E_{A^{\perp\perp}}. \quad (\text{III.2})$$

Démonstration. Commençons par construire les deux fonctions linéaires inverses l'une de l'autre.

Soit $a \in |A|$. Le vecteur $e_a \in E_A$ est non nul, de plus $\{a\}$ est une partie finie donc anti-finitaire de A , d'après la Proposition III.7 page 77, l'ouvert linéaire $\mathcal{V}(\{a\})$ de E_A est fermé et $e_a \notin \mathcal{V}(\{a\})$. D'après la Proposition III.17 page 84 de séparation, il existe $e'_a \in E'_A$ tel que $\langle e'_a, e_a \rangle = 1$ et $e'_a(\mathcal{V}(\{a\})) = 0$. De plus, si $b \neq a$, alors $e_a \in \mathcal{V}(\{a\})$. On a donc construit une famille de vecteurs de E'_A telle que

$$\forall a \neq b, \langle e'_a, e_b \rangle = 0 \text{ et } \langle e'_a, e_a \rangle = 1.$$

Soit $u' \in \mathcal{F}(A)^\perp$. De la continuité des e'_a , on déduit la série d'équivalences

$$\begin{aligned} a \in u' &\iff \forall x \in E_A, |x| \cap u' = \emptyset \Rightarrow \langle e'_a, x \rangle = \sum_{b \in |A|} x_b \langle e'_a, e_b \rangle = x_a = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathcal{V}(u'), \langle e'_a, x \rangle = 0 \\ &\iff \forall x, e'_a \in \text{ann}(\mathcal{V}(u')). \end{aligned}$$

On en déduit l'équivalence suivante qui nous sera utile dans la suite de la démonstration

$$\forall u' \in \mathcal{F}(A)^\perp, a \in u' \iff e'_a \in \text{ann}_{E'_A}(\mathcal{V}(u')).$$

Nous allons montrer que la fonction linéaire f est un homéomorphisme linéaire.

$$\begin{array}{ccc} x^* & \xrightarrow{\quad} & (\langle x^*, e'_a \rangle)_{a \in |A|} \\ & \searrow f & \nearrow \\ \widetilde{E}_A & & E_{A^{\perp\perp}} \\ & \nwarrow f^{-1} & \swarrow \\ x^* : x' \mapsto \sum_{a \in |A|} x_a^* \langle x', e_a \rangle & \longleftarrow & (x_a^*)_{a \in |A|} \end{array}$$

Pour montrer que f et f^{-1} sont bien définies, on va avoir besoin d'introduire le support d'une forme linéaire et de la définition du complété.

Soit $x^* \in \widetilde{E}_A$. On note $|x^*| = \{a \in |A| ; \langle x^*, e'_a \rangle \neq 0\}$. Par définition du complété et de la topologie sur E_A , pour tout $u' \in \mathcal{F}(A)^\perp$, il existe $x \in E_A$ tel que

$$\forall x' \in \text{ann}_{E'_A}(\mathcal{V}(u')_A), \langle x^*, x' \rangle = \langle x', x \rangle.$$

Montrons que la fonction linéaire f est à valeurs dans $E_{A^{\perp\perp}}$. Remarquons que $|x^*| \cap u' \subseteq |x| \cap u'$. En effet, soit $a \in |x^*| \cap u'$. Dans ce cas $e'_a \in \text{ann}_{E'_A}(\mathcal{V}(u')_A)$ et $\langle x^*, e'_a \rangle = \langle e'_a, x \rangle = x_a$. Si $a \notin |x|$, comme $a \in u'$, on a $x_a = 0$ donc $\langle x^*, e'_a \rangle = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $a \in |x^*|$, donc $a \in |x|$. On obtient l'inégalité voulue $|x^*| \cap u' \subseteq |x| \cap u'$. Comme $x \in E_A$, $|x| \in \mathcal{F}(A)$ et $|x| \cap u'$ est finie. On a donc montré que $(\langle x^*, e'_a \rangle)_{a \in |A|} \in E_{A^{\perp\perp}}$.

Montrons que la fonction est f injective. Soit $x^* \neq 0$. Il existe x' tel que $\langle x^*, x' \rangle \neq 0$. Comme $x' \in E'_A$, il existe $u' \in \mathcal{F}(A)^\perp$ tel que $\mathcal{V}(u') \subseteq \ker x'$, donc $x' \in \text{ann}_{E'}(\mathcal{V}(u'))$. Il

existe donc $x \in E_A$ tel que $\langle x', x \rangle = \langle x^*, x' \rangle \neq 0$. On en déduit l'existence de $a \in |x| \cap |x'|$ d'où $a \in u'$ puisque $x' \in \text{ann}_{E'}(\mathcal{V}(u'))$. On a donc trouver $e'_a \in \text{ann}_{E'}(\mathcal{V}(u'))$ tel que $\langle x^*, e'_a \rangle = \langle e'_a, x \rangle = x_a \neq 0$.

Montrons que la fonction est f surjective. Soit $(x^*)_{a \in |A|} \in E_{A^{\perp\perp}}$. Alors la fonction $x^* : x' \mapsto \sum_{a \in |A|} x_a^* \langle x', e_a \rangle$ est linéaire et bien définie. De plus, par définition de $E_{A^{\perp\perp}}$, pour tout $u' \in \mathcal{F}(A)^\perp$, $|(x^*)_{a \in |A|}| \cap u'$ est fini. On en déduit que pour tout $x' \in \text{ann}_{E'}(\mathcal{V}(u'))$, $\langle x^*, x' \rangle = \langle \sum_{a \in |(x^*)_{a \in |A|}| \cap u'} x_a^* e_a, x' \rangle$. On donc montré que $x^* \in \widetilde{E}_A$.

On a montré que f est un isomorphisme et que son inverse est f^{-1} .

Pour montrer que f est un homéomorphisme, on montre qu'elle est ouverte et continue. Ces propriétés découlent immédiatement de l'égalité

$$\forall u' \in \mathcal{F}(A^{\perp\perp})^\perp, f(\text{ann}_{E'^*}(\text{ann}_{E_A}(\mathcal{V}(u')))) = \mathcal{V}(u')$$

que nous allons maintenant démontrer. Soit $u' \in \mathcal{F}(A^\perp) = \mathcal{F}(A^{\perp\perp})^\perp$.

Soit $(x^*)_{a \in |A|} \in \mathcal{V}(u')$. Donc $|(x^*)_{a \in |A|}| \cap u' = \emptyset$. On en déduit que pour tout $x' \in \text{ann}_{E_A}(\mathcal{V}(u'))$,

$$\sum_{a \in |A|} x_a^* \langle x', e_a \rangle = \sum_{a \notin u'} x_a^* \langle x', e_a \rangle = 0,$$

car pour tout $a \notin u'$, $e_a \in \mathcal{V}(u')$. On en déduit que

$$f^{-1}(\mathcal{V}(u')) \subseteq \text{ann}_{E'^*}(\text{ann}_{E_A}(\mathcal{V}(u'))).$$

En appliquant l'isomorphisme f à cette inégalité, on obtient

$$\mathcal{V}(u') \subseteq f(\text{ann}_{E'^*}(\text{ann}_{E_A}(\mathcal{V}(u')))).$$

Réciproquement, comme pour tout $a \in u'$, $e'_a \in \text{ann}_{E_A}(\mathcal{V}(u'))$, on a

$$\forall x^* \in \text{ann}_{E'^*}(\text{ann}_{E_A}(\mathcal{V}(u'))), \forall a \in u', \langle x^*, e'_a \rangle = 0.$$

On en déduit que $(\langle x^*, e'_a \rangle)_{a \in |A|} \in \mathcal{V}(u')$ et que

$$f(\text{ann}_{E'^*}(\text{ann}_{E_A}(\mathcal{V}(u')))) \subseteq \mathcal{V}(u').$$

On en déduit l'égalité recherchée.

Nous avons finalement montré que f et f^{-1} sont des homéomorphismes linéaires inverses l'un de l'autre. □

Proposition III.26. *Tout espace de Lefschetz finitaire est complet.*

Démonstration. Soit (E, ϕ, A) une carte d'un espace de Lefschetz finitaire. L'espace E est linéairement homéomorphe à E_A . Comme A est un espace de finitude relationnel, on a $A = A^{\perp\perp}$. Or, d'après la Proposition III.25 précédente, $E_{A^{\perp\perp}}$ est linéairement homéomorphe à $\widetilde{E}_A$, donc E est linéairement homéomorphe à l'espace complet $\widetilde{E}_A$. On en déduit la complétude de E . □

Nous avons ainsi donné une autre démonstration du Lemme 8 de [Ehr05] selon lequel tout espace de finitude relationnel engendre un espace de Lefschetz complet. Cette démonstration illustre les liens étroits entre la clôture par bi-orthogonal et la complétude.

III.2 Structure additive, limites et co-limites

La structure additive de la logique linéaire est modélisée par les produits et les co-produits finis qui sont des cas particuliers respectivement de limites et de co-limites. La catégorie des espaces topologiques est complète et co-complète. Les limites et co-limites sont calculées dans la catégorie **Set**, puis équipées d'une topologie respectivement *initiale* et *terminale* (voir les Définitions III.10 page 93 et III.11 page 96). Nous allons voir que ces constructions s'appliquent aussi à la catégorie **Lef**, les topologies initiales et terminales étant *linéarisées*.

La catégorie des espaces de Lefschetz finitaires est stable par produits et co-produits. Par contre, nous ne savons pas si la catégorie des espaces de Lefschetz finitaires est complète et co-complète.

Dans le Chapitre II précédent, nous avons exhibé le Contre-exemple II.7 page 55 qui montre que la catégorie des espaces de finitude n'est pas complète. Pourtant, cela n'implique pas que la catégorie des espaces de Lefschetz finitaires ne soit pas complète. En effet, l'enrichissement par une structure d'espaces vectoriels topologiques peut faire apparaître des limites. C'est le cas pour **Rel** qui n'est pas complète et **LinDF** qui est complète (puisque dans les espaces vectoriels, les noyaux et produits existent). La question de l'existence des limites et co-limites dans **LinFin** reste donc ouverte à ce jour.

Nous allons étudier successivement les produits, co-produits, supplémentaires, quotients et noyaux dans **Lef** et **LinFin**.

III.2.1 Produits

III.2.1.a Le cas général.

Définition III.10. Soient X un espace vectoriel, $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces de Lefschetz et pour tout $i \in I$, une application linéaire

$$f_i : X \rightarrow E_i.$$

Notons pour tout $i \in I$, $\mathcal{V}(E_i)$ l'ensemble des ouverts linéaires de E_i .

La **topologie initiale** sur X définie par $(f_i)_{i \in I}$ est la topologie engendrée par le système fondamental linéaire

$$(\cap_{i \in J} f_i^{-1}(V_i) ; J \subseteq I \text{ fini}, \forall i \in I, V_i \in \mathcal{V}(E_i)).$$

C'est la topologie la moins fine rendant les applications linéaires f_i continues.

Afin d'assurer la condition de séparation, il est nécessaire et suffisant de supposer que l'intersection $\cap_{i \in I} \cap_{V_i \in \mathcal{V}(E_i)} f_i^{-1}(V_i) = \{0\}$. Or, on a $x \in \cap_{i \in I} \cap_{V_i \in \mathcal{V}(E_i)} f_i^{-1}(V_i)$ si et seulement

si pour tout $i \in I$, $f_i(x) \in \cap_{V_i \in \mathcal{V} E_i} V_i$. Or cette dernière intersection est réduite à 0 puisque les E_i sont supposés être des espaces de Lefschetz donc séparés. On en déduit qu'il est nécessaire et suffisant de supposer que l'intersection des noyaux des f_i soit réduite à 0, i.e.

$$\cap_{i \in I} f_i^{-1}(0) = \{0\}.$$

pour que X muni de la topologie initiale soit un espace de Lefschetz.

De plus, pour tout espace de Lefschetz F et pour toute application linéaire $g : F \rightarrow X$, g est continue si et seulement si pour tout $i \in I$, $f_i \circ g$ est continue.

La **topologie produit** est la topologie initiale pour les projections (l'intersection des noyaux est bien réduite à $\{0\}$).

Proposition III.27. [Köt79, §10.42] Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces de Lefschetz. Le produit $\prod_{i \in I} E_i$ est un espace de Lefschetz qui admet pour système fondamental la famille des

$$\prod_{i \in I} A_i, \text{ avec } \begin{cases} \forall j \in J, A_j = V_j \\ \forall i \notin J, A_i = E_i \end{cases},$$

pour $J \subseteq I$ fini et pour tout $j \in J$, V_j ouvert linéaire de E_j .

Exemple III.6. Soit I un ensemble. Comme $\mathbb{k}$ est un espace de Lefschetz discret, $(\{0\})$ est un système fondamental de $\mathbb{k}$. L'espace de Lefschetz $\mathbb{k}^I$ admet comme système fondamental la famille $\{\mathcal{V}(J), J \subseteq I \text{ finie}\}$ définie par :

$$\mathcal{V}(J) = \{(a_i)_{i \in I} \mid \forall j \in J, a_j = 0\}.$$

Il est donc muni de la topologie de la co-dimension finie. En effet, soit U un ouvert linéaire. Il existe J tel que $\mathcal{V}(J) \subseteq U$. On note $\mathcal{K}(J)$ le sous-espace de dimension finie de $\mathbb{k}^I$ défini par

$$\mathcal{K}(J) = \{x \in \mathbb{k}^I \mid \forall j \notin J, x_j = 0\}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{k}^I$, on pose définit les familles x^J et x^{J^c}

$$\begin{aligned} \forall j \in J, \quad x_j^J &= x_j \\ x_j^{J^c} &= 0 \\ \forall i \notin J, \quad x_i^J &= 0 \\ x_i^{J^c} &= x_i. \end{aligned}$$

On a alors $x^J \in \mathcal{K}(J)$ et $x^{J^c} \in \mathcal{V}(J) \subseteq U$ et $x = x^J + x^{J^c}$. On en déduit que $U + \mathcal{K}(J) = \mathbb{k}^I$ et donc que U est de co-dimension finie.

Proposition III.28. Soient $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces de Lefschetz complets. Le produit $\prod_{i \in I} E_i$ est complet.

Démonstration. Comme les espaces de Lefschetz sont en particulier des espaces vectoriels topologiques, on peut voir par exemple [Jar81, Theorem 3.4.6 p63]. $\square$

Exemple III.7. Soit E un espace de Lefschetz. D'après la Proposition III.28 ci-dessus, l'espace

$$\mathbb{k}^E \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{x \in E} \mathbb{k}$$

est complet. On plonge l'espace E^* des formes linéaires (pas nécessairement continues) dans $E^{\mathbb{k}}$ de la façon suivante

$$\begin{aligned} E^* &\hookrightarrow \mathbb{k}^E \\ x^* &\mapsto (\langle x', x \rangle)_{x \in E}. \end{aligned}$$

Muni de la topologie produit, E^* est un sous-espace fermé donc complet de $\mathbb{k}^E$. En effet, tout réseau de Cauchy $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ de E^* converge dans $\mathbb{k}^E$, on note x^* sa limite. Il nous suffit de montrer que x^* est linéaire. Ceci se vérifie facilement faisant converger l'égalité

$$\forall x, y \in E, \forall \gamma \in \Gamma, \langle x_\gamma^*, x + \lambda y \rangle = \langle x_\gamma^*, x \rangle + \lambda \langle x_\gamma^*, y \rangle$$

La **topologie induite** est un cas particulier de la topologie initiale (voir la Définition III.10 page 93). On munit en effet un sous-espace vectoriel d'un espace de Lefschetz de la topologie la moins fine rendant l'inclusion continue.

Exemple III.8. L'espace $\mathbb{k}^{(\mathbb{N})}$ des suites presque partout nulles muni de la topologie engendrée par les sous espaces de co-dimension finie dans $\mathbb{k}^{(\mathbb{N})}$ est un espace de Lefschetz. Muni de la topologie induite, c'est un sous-espace de l'espace produit $\mathbb{k}^{\mathbb{N}}$. En effet, dans $\mathbb{k}^{\mathbb{N}}$, tous les ouverts $\mathcal{V}(J)$, $J \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ sont de co-dimension finie. Réciproquement, soit F un sous-espace fermé de co-dimension finie, i.e. $\mathbb{k}^{(\mathbb{N})} = F \oplus G$ où G est de dimension finie d . Soient $(x_i)_{i \leq d}$ une base de G et $J = \bigcup_{i=1}^d |x_i|$. Comme pour tout $i \leq d$, x_i est une suite finie, son support $|x_i|$ est fini, d'où J est fini. On conclut en remarquant que $\mathcal{V}(J) \subseteq F$ où $\mathcal{V}(J) = \{x \in \mathbb{k}^{(\mathbb{N})} ; |x| \cap J = \emptyset\}$.

III.2.1.b Le cas finitaire.

Nous savons que **RelFin** admet les produits (voir la Section II.2 page 51). La proposition suivante montre que la catégorie **LinFin** elle aussi est stable par produit cartésien.

La proposition suivante et son co-pendant III.33 page 97 correspondent au paragraphe sur les produits et coproduits de [Ehr05, p15].

Proposition III.29. *Étant donnée une famille d'espaces de Lefschetz finitaires $(E_i ; i \in I)$, le produit $\prod_{i \in I} E_i$ est un espace de Lefschetz finitaire.*

Démonstration. Pour tout $i \in I$, soit (E_i, ϕ_i, A_i) une carte de E_i .

Commençons par montrer que l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \phi : \prod_{i \in I} E_{A_i} &\rightarrow E_{\&_{i \in I} A_i} \\ ((x_{a_i})_{a_i \in |A_i|})_{i \in I} &\mapsto (x_{a_i})_{(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} |A_i|} \end{aligned}$$

est un homéomorphisme linéaire.

La topologie produit sur $\prod_{i \in I} E_{A_i}$ est engendrée par la famille des

$$\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i, \text{ où } \begin{cases} J \subseteq I \text{ fini,} \\ \forall j \in J, \mathcal{A}_j = \mathcal{V}(u'_j), u'_j \in \mathcal{F}(E_{A_j})^\perp, \\ \forall i \notin J, \mathcal{A}_i = E_{A_i}. \end{cases}$$

Réciproquement, la topologie de $E_{\&_{i \in I} A_i}$ est engendrée par la famille des

$$\mathcal{V}(\uplus_{i \in J} u'_i) = \left\{ x \in \mathbb{k}^{\prod_{i \in I} |A_i|} ; |x| \cap \uplus_{i \in J} u'_i = \emptyset \right\}$$

où $J \subseteq I$ est finie et pour tout $i \in J, u'_i \in \mathcal{F}(A_i)^\perp$.

Soient $J \subseteq I$ finie et pour tout $j \in J, u'_j \in \mathcal{F}(E_{A_j})^\perp$. D'après la Proposition II.5 page 53, $\uplus_{i \in J} u'_i \in \mathcal{F}(\&_{i \in I} E_{A_i})^\perp$. De plus, on vérifie que

$$\mathcal{V}(\uplus_{i \in J} u'_i) = \phi \left(\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i \right), \text{ avec } \begin{cases} \forall j \in J, \mathcal{A}_j = \mathcal{V}(u'_j), \\ \forall i \notin J, \mathcal{A}_i = E_{A_i}. \end{cases}$$

On en déduit la continuité de ϕ et de son inverse.

Pour finir, on montre que l'homéomorphisme linéaire se transporte à $\prod_{i \in I} E_i$ via les cartes ϕ_i pour $i \in I$. En effet,

$$\begin{aligned} (\phi_i)_{i \in I} : \prod_{i \in I} E_i &\rightarrow \prod_{i \in I} E_{A_i} \\ (x_i)_{i \in I} &\mapsto (\phi_i(x_i))_{i \in I}, \end{aligned}$$

est un homéomorphisme linéaire. Par conséquent, $\prod_{i \in I} E_i$ est linéairement homéomorphe à $E_{\&_{i \in I} A_i}$. $\square$

Exemple III.9. L'espace de Lefschetz finitaire $E_{\mathcal{N}at^\perp}$ est l'espace $\mathbb{k}^{\mathbb{N}}$ des suites muni de la topologie produit (voir l'Exemple III.11 page 98).

III.2.2 Co-produits

III.2.2.a Le cas général.

La topologie terminale est définie de façon duale à la topologie initiale.

Définition III.11. Soient X un espace vectoriel, $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces de Lefschetz et pour tout $i \in I$, une application linéaire

$$f_i : E_i \rightarrow X.$$

Pour la **topologie terminale** définie par $(f_i)_{i \in I}$, un sous-espace vectoriel V de F est ouvert lorsque pour tout $i \in I$, $f_i^{-1}(V)$ est ouvert dans E_i . Elle est engendrée par le système fondamental linéaire

$$\left(\sum_{i \in I} f_i(V_i) ; V_i \text{ ouvert linéaire de } E_i \right)^6.$$

C'est la topologie la moins fine rendant les applications linéaires f_i continues.

⁶les sommes ne sont pas forcément directes

De plus, pour tout espace de Lefschetz F et pour toute application linéaire $g : X \rightarrow F$, g est continue si et seulement si pour tout $i \in I$, $g \circ f_i$ est continue.

Pour que E , muni de la topologie initiale soit un espace de Lefschetz, il est nécessaire et suffisant de supposer de plus que E est séparé.

La **topologie co-produit** est la topologie terminale pour les injections (voir la Définition III.11 ci-dessus).

Proposition III.30. [Köt79, §10.42] Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces de Lefschetz.

Le co-produit ou somme directe $\oplus_{i \in I} E_i$ est un espace de Lefschetz qui admet pour système fondamental la famille des

$$\oplus_{i \in I} V_i = \{x_1 + \cdots + x_n ; n \in \mathbb{N}, \forall i \leq n, x_i \in V_i\},$$

avec pour tout $i \in I$, V_i ouvert linéaire de E_i .

Démonstration. Soit $\mathcal{V}_i$ la famille des ouverts linéaires de E_i pour tout $i \in I$. L'intersection

$$\cap (\oplus_{i \in I} V_i ; \forall i \in I, V_i \in \mathcal{V}_i) = \oplus_{i \in I} (\cap (V_i ; V_i \in \mathcal{V}_i)) = \oplus_{i \in I} \{0\}.$$

est réduite à zéro. Donc $\oplus_{i \in I} E_i$ est séparé. $\square$

Remarque. Le co-produit $\oplus_{i \in I} E_i$ est un sous-espace vectoriel du produit $\prod_{i \in I} E_i$, mais il n'est pas en général muni de la topologie induite par la topologie produit.

Considérons par exemple que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $E_i = \mathbb{k}$. Le produit des E_i est l'espace $\mathbb{k}^{\mathbb{N}}$ des suites, muni de la topologie de la co-dimension finie dans $\mathbb{k}^{\mathbb{N}}$. Mais le co-produit de E_i est l'espace $\mathbb{k}^{(\mathbb{N})}$ des suites presque partout nulles muni de la topologie discrète. En effet, $\oplus_{i \in I} 0 = \{0\}$ est un ouvert linéaire. Ce n'est donc pas la topologie de la co-dimension finie puisque $\{0\}$ n'est pas de co-dimension finie dans $\mathbb{k}^{(\mathbb{N})}$.

Proposition III.31. Les produits et co-produits finis coïncident dans la catégorie **Lef**.

Proposition III.32. Soient $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces de Lefschetz complets. Le co-produit $\oplus_{i \in I} E_i$ est complet.

Démonstration. Voir [Jar81, Theorem 4.6.4 p 86] $\square$

III.2.2.b Le cas finitaire.

Nous avons déjà prouvé que **RelFin** admet les co-produits. La proposition suivante montre que la catégorie **LinFin** admet aussi les co-produits.

Proposition III.33. Étant donnée une famille d'espaces de Lefschetz finitaires $(E_i ; i \in I)$, le co-produit $\oplus E_i$ dans **Lef** est un espace de Lefschetz finitaire.

Démonstration. La démonstration est similaire à celle de la Proposition III.29 page 95. $\square$

Exemple III.10. L'espace de Lefschetz finitaire engendré par l'espace de finitude relationnel $\mathcal{B}$ (voir l'exemple II.1 page 46) est l'espace $\mathbb{k}^2$ muni de la topologie discrète. C'est le co-produit $\mathbb{k} \oplus \mathbb{k}$.

Exemple III.11. L'espace de Lefschetz finitaire engendré par l'espace de finitude relationnel $\mathcal{Nat}$ (voir l'exemple II.2 page 46) est l'espace $\mathbb{k}^{(\mathbb{N})}$ muni de la topologie de la co-dimension finie. C'est le co-produit $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{k}$.

III.2.3 Limites

III.2.3.a Le cas général.

L'existence d'égaliseurs dans les espaces vectoriels topologiques se ramène à l'existence de noyaux (car l'égaliseur de deux fonctions linéaires continues est le noyau de leur différence). Dans la catégorie des espaces de Lefschetz, le noyau d'une fonction linéaire continue f est le sous-espace $\ker(f) = f^{-1}(\{0\})$ muni de la topologie induite.

Proposition III.34. [Bar76] *La catégorie des espaces de Lefschetz est complète.*

Démonstration. Elle admet les produits et les égaliseurs. □

III.2.3.b Le cas finitaire.

On ne sait pas si la catégorie **LinFin** est complète.

Par exemple, on ne sait pas si les noyaux des fonctions linéaires continues sont des espaces de Lefschetz finitaires. Le problème est en effet de construire une base de Schauder finitaire adaptée à ce sous-espace muni de la topologie induite.

Le lemme suivant montre que l'on sait répondre dans un cas particulier : le noyau d'une forme linéaire continue sur un espace de Lefschetz finitaire est un espace de Lefschetz finitaire.

Lemme III.35. *Muni de la topologie induite, le noyau d'une forme linéaire continue sur un espace de Lefschetz finitaire est un espace de Lefschetz finitaire.*

Démonstration. Soit (E, ϕ, A) une carte d'un espace de Lefschetz finitaire.

Commençons par montrer que le noyau de toute forme linéaire continue sur E_A est un espace de Lefschetz finitaire.

Soit $x' : E_A \rightarrow \mathbb{k}$ une forme linéaire continue sur E_A .

Commençons par décomposer l'espace selon le support de x' . Posons $\mathcal{V}(|x'|) = \{x \in E_A ; |x| \cap |x'| = \emptyset\}$ et $\mathcal{K}(|x'|) = \{x \in E_A ; |x| \subseteq |x'|\}$. On vérifie facilement que ces deux espaces sont des supplémentaires algébriques dans E_A :

$$E = \mathcal{V}(|x'|) \oplus \mathcal{K}(|x'|).$$

Comme x' est continue, son support $|x'|$ est antifinitaire (voir la Proposition III.22 page 86), donc $\mathcal{V}(|x'|)$ est un ouvert linéaire de E (voir la Proposition III.4 page 75). D'après le Lemme III.40 page 101, $\mathcal{V}(|x'|)$ et $\mathcal{K}(|x'|)$ sont des supplémentaires topologiques.

On utilise cette décomposition pour trouver une base finitaire du noyau de x' . En effet, $\mathcal{V}(|x'|) \subseteq \ker(x')$, donc on a la décomposition en supplémentaires

$$\begin{aligned} \ker(x') &= (\mathcal{V}(|x'|) \oplus \mathcal{K}(|x'|)) \cap \ker(x') \\ &= (\mathcal{V}(|x'|) \cap \ker(x')) \oplus (\mathcal{K}(|x'|) \cap \ker(x')) \end{aligned}$$

La famille $(e_a ; a \notin |x'|)$ est une base de Schauder de $\mathcal{V}(|x'|)$. Il nous suffit donc de trouver une base de Schauder pour $\mathcal{K}(|x'|) \cap \ker(x')$.

Remarquons que pour tout $a \in |x'|$, $\langle x', e_a \rangle \neq 0$. Supposons que $|x'|$ soit infini, le cas fini se traite de façon similaire. Ordonnons $|x'| = (e_n ; n \in \mathbb{N})$ et posons le changement de base

$$\epsilon_n = e_n - \frac{\langle x', e_{n+1} \rangle}{\langle x', e_n \rangle} e_{n+1}.$$

Soit $x \in \mathcal{K}(|x'|) \cap \ker(x')$. Il existe une décomposition $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n$. Comme $\mathcal{K}(|x'|)$ est muni de la topologie discrète, la série est finie (voir la Proposition III.12 page 78). Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $x \in \mathcal{K}(e_1, \dots, e_n) \cap \ker(x')$. Or $(\epsilon_j)_{j < n}$ est une famille libre de l'espace $\mathcal{K}(e_1, \dots, e_n) \cap \ker(x')$ dont la dimension est $n - 1$, c'est donc une base de cet espace. On a montré que x se décompose en une combinaison linéaire finie de $(\epsilon_n ; n \in \mathbb{N})$. Cette dernière est donc une base de l'espace discret $\mathcal{K}(|x'|) \cap \ker(x')$.

Ainsi, $\mathcal{N}at = (\mathbb{N}, \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}))$ est une base finitaire de $\mathcal{K}(|x'|) \cap \ker(x')$ et le changement de base

$$\begin{aligned} \phi : E_{\mathcal{N}at} &\rightarrow \mathcal{K}(|x'|) \cap \ker(x') \\ \epsilon_n &\mapsto e_n - \frac{\langle x', e_{n+1} \rangle}{\langle x', e_n \rangle} e_{n+1} \end{aligned}$$

est un homéomorphisme linéaire (ici c'est un isomorphisme algébrique puisque les topologies de départ et d'arrivée sont discrètes).

Finalement, l'espace de finitude relationnel $Z = (X \setminus |x'|) \oplus \mathcal{N}at$, engendre un espace de Lefschetz finitaire linéairement homéomorphe au noyau de x'

$$Z \xrightarrow{\theta = \text{id} \oplus \phi} \ker(x').$$

Supposons à présent que x' soit une forme linéaire continue sur E . La composée $E_A \xrightarrow{\phi^{-1}} E \xrightarrow{x'} \mathbb{k}$ est une forme linéaire continue sur E_A . Son noyau K muni de la topologie induite par E_A est donc un espace de Lefschetz finitaire. Or, comme ϕ est un homéomorphisme linéaire,

$$\ker x' = \phi(\ker(x' \circ \phi^{-1})) = \phi(K)$$

est un espace de Lefschetz finitaire. □

Proposition III.36. *Étant donné un espace de Lefschetz finitaire E , l'intersection finie des noyaux de formes linéaires continues sur E , muni de la topologie induite, est un espace de Lefschetz finitaire.*

Démonstration. Soit $(x'_n ; n \in \mathbb{N})$ une famille de formes linéaires continues. On procède par récurrence sur n pour montrer que l'intersection des noyaux est un espace de Lefschetz finitaire. Le cas initial a été traité dans le Lemme III.35 précédent. On suppose que $F \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{k \leq n} \ker(x'_k)$ muni de la topologie induite est un espace de Lefschetz finitaire. L'inclusion $\iota : F \subseteq E$ est donc continue. On applique le Lemme III.35 à la forme linéaire $x'_{n+1} \circ \iota$ sur F . Muni de la

topologie induite par F , son noyau est un espace de Lefschetz finitaire. Pour finir, on remarque que

$$\ker(x'_{n+1} \circ \iota) = \ker x'_{n+1} \cap F = \cap_{i \leq n+1} \ker(x'_i).$$

□

III.2.4 Co-limites

Afin d'étudier les co-limites, nous allons commencer par étudier les quotients qui nous seront par ailleurs utiles dans la suite.

Soient E un espace de Lefschetz et H un sous espace vectoriel fermé de E . On note E/H l'espace vectoriel quotient et $\pi_H : E \rightarrow E/H$ la projection canonique. La topologie quotient est quant à elle la topologie finale induite par la projection canonique sur le quotient.

Proposition III.37. [*Köt79*, §10.8] *Pour tout sous-espace fermé H d'un espace de Lefschetz E , l'espace E/H muni de la topologie quotient est un espace de Lefschetz. Il admet pour système fondamental linéaire la famille*

$$\pi_H(V) = V/(H \cap V)$$

pour V ouvert linéaire de E est un espace de Lefschetz.

Démonstration. On vérifie facilement que $\pi_H(V)$ est un filtre d'ouverts de E .

De plus, U^* est ouvert dans E/H si et seulement si $\pi_H^{-1}(U^*)$ est ouvert dans E . Comme E est un espace de Lefschetz, cela signifie qu'il existe V ouvert linéaire de E tel que $V \subseteq \pi_H^{-1}(U^*)$, i.e. $\pi_H(V) \subseteq U^*$. On en déduit que U^* est ouvert dans E/H si et seulement si il existe un ouvert linéaire de E tel que $\pi_H(V) \subseteq U^*$.

Montrons que E/H est séparée. Notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des ouverts linéaires de E . Soit $x \in E$ tel que $\pi_H(x) \in \cap(\pi_H(V) ; V \in \mathcal{V})$. Pour tout $V \in \mathcal{V}$, comme $\pi_H(x) \in \pi_H(V)$, on a $(x + V) \cap H \neq \emptyset$. On en déduit que x est un point adhérent à H qui est supposé fermé. Donc $x \in H$ et $\pi_H(x) = 0$. On a donc montré

$$\cap(\pi_H(V) ; V \in \mathcal{V}) = \{0\}.$$

□

L'existence des quotients permet de construire les co-noyaux et d'en déduire que toutes les co-limites existent dans les espaces de Lefschetz.

Proposition III.38. [*Bar76*] *La catégorie des espaces de Lefschetz est co-complète.*

Démonstration. Elle admet les co-produits et co-égaliseurs. L'existence des co-égaliseurs se ramène à l'existence des co-noyaux. Dans la catégorie des espaces de Lefschetz, le co-noyau d'une fonction linéaire continue $f : E \rightarrow F$ est l'espace $F / \overline{f(E)}$ muni de la topologie quotient. □

Propriétés des quotients. Terminons cette partie par des propriétés des espaces quotients qui nous seront utiles par la suite.

Proposition III.39. [Köt79, §10.8] Soit H un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Lefschetz E .

L'espace quotient E/H est discret si et seulement si H est ouvert dans E .

Démonstration. Si H est ouvert dans E , alors $\pi_H(H) = \{0\}$ est un ouvert de E/H qui est donc discret. Réciproquement, si E/H est discret, alors il existe V ouvert linéaire de E tel que $\pi_H(V) = V/H = \{0\}$. On en déduit que $V \subseteq H$, donc H est ouvert. $\square$

Remarque. Comme tout ouvert linéaire V est à la fois ouvert et fermé (voir Proposition III.7 page 77), l'espace quotient E/V est bien défini et discret, il admet donc une base de Schauder d'après la Proposition III.13 page 79.

Rappelons que dans un espace vectoriel topologique, la notion de supplémentaire topologique est plus forte que celle de supplémentaire algébrique car les projections sur chacune des composantes doivent être continues. Le lemme suivant exhibe un cas où les deux notions coïncident.

Lemme III.40. Dans un espace de Lefschetz, tout supplémentaire algébrique d'un ouvert linéaire est muni de la topologie discrète. C'est également un supplémentaire topologique de cet ouvert.

Démonstration. Supposons $E = V \oplus H$ avec V ouvert linéaire de E . Comme $V \cap H = \{0\}$ est un ouvert linéaire de H , ce dernier est muni de la topologie discrète. La projection π_V est continue car V est ouvert et pour tout ouvert linéaire W de E , $W \cap V \subseteq \pi_V^{-1}(W \cap V)$. Quant à la projection π_H , elle est continue car $V \subseteq \pi_H^{-1}(\{0\})$. $\square$

Proposition III.41. Soit E un espace de Lefschetz. Tout sous-espace ouvert V admet un supplémentaire topologique dans E . Ce supplémentaire est discret et homéomorphe au quotient E/V . On notera abusivement

$$E = V \oplus E/V.$$

Démonstration. Il existe un supplémentaire algébrique H de V (construit en choisissant une base de Hamel adaptée. D'après le Lemme III.40 page 101 ci-dessus, muni de la topologie discrète, H est aussi un supplémentaire topologique de V).

On considère la restriction $\pi|_H$ de la projection $\pi : E \rightarrow E/V$ au sous espace H . Elle est continue. Elle est ouverte, en effet toute partie de E/V est ouverte (ce dernier est muni de la topologie discrète). Elle est surjective car π est surjective et $\pi(V \oplus H) = \pi(H) = \pi|_H(H)$. Elle est injective puisque $\ker(\pi|_H) = \ker(\pi) \cap H = V \cap H = \{0\}$. On a donc montré que $\pi|_H$ est un homéomorphisme entre le supplémentaire topologique H et E/V . $\square$

Remarque. Rappelons que dans les espaces vectoriels topologiques, donc dans les espaces de Lefschetz, tout sous-espace vectoriel de dimension finie admet un supplémentaire topologique.

Tout espace de co-dimension topologique finie est de co-dimension algébrique finie. La proposition suivante assure que pour les sous-espaces fermés, la réciproque est vraie. Ainsi, dans ce cas les deux notions coïncident et les co-dimensions sont les mêmes.

Proposition III.42. *Soit E un espace de Lefschetz. Tout sous-espace fermé de co-dimension algébrique finie est de co-dimension topologique finie.*

Démonstration. Soit F un sous-espace vectoriel fermé de E qui admet un supplémentaire algébrique D de dimension finie. Comme F est fermé et de co-dimension finie, il est ouvert (voir Proposition III.7 page 77). D'où la décomposition en supplémentaires topologiques $E = F \oplus D$ d'après le Lemme III.40 page 101. $\square$

La Proposition qui suit est très importante pour l'étude de la réflexivité (voir le Paragraphe III.3.1.d page 128). Intuitivement, les sous-espaces B et B' seront des linéairement bornés de E et de son dual E' (voir la Définition III.16 page 115) et V et V' des ouverts linéaires de E et de son dual E' (respectivement).

Rappelons les Notations III.3 page 73 : pour tout sous-espace F d'un espace de Lefschetz E et tout sous-espace F' de E' ,

$$\begin{aligned} F^\perp &= \{x' \in E' ; \forall x \in F, \langle x', x \rangle = 0\}, \\ {}^\perp F' &= \{x \in E ; \forall x' \in F', \langle x', x \rangle = 0\}. \end{aligned}$$

Proposition III.43. *Soit E un espace de Lefschetz.*

- *Pour tous B et V sous-espaces vectoriels de E , si $B/(B \cap V)$ est de dimension finie, alors $V^\perp/(V^\perp \cap B^\perp)$ est de dimension finie.*
- *Pour tous B' et V' sous-espaces vectoriels de E' , si $B'/(B' \cap V')$ est de dimension finie, alors ${}^\perp V'/({}^\perp V' \cap {}^\perp B')$ est de dimension finie.*

Démonstration. Soient B et V sous-espaces vectoriels de E , tels que $B/(B \cap V)$ soit de dimension finie notée d .

Soit $(x_i)_{i \leq d}$ une famille de vecteurs de B tels que la famille $(\overline{x_i})_{i \leq d}$ soit une base de $B/(B \cap V)$. Alors, pour tout $x \in B$, il existe $y \in V$ et $(\lambda_i)_{i \leq d} \in \mathbb{k}^d$ tels que $x = y + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$.

Considérons l'application linéaire suivante

$$\begin{aligned} \phi : V^\perp &\rightarrow \mathbb{k}^d \\ x' &\mapsto (\langle x', x_i \rangle)_{i \leq d}. \end{aligned}$$

Montrons que $\ker(\phi) = V^\perp \cap B^\perp$. Soit $x' \in V^\perp \cap B^\perp$. Pour tout $i \leq d$, $x_i \in B$ donc $\langle x', x_i \rangle = 0$. On en déduit que $\phi(x') = 0$. Réciproquement soit $x' \in \ker(\phi)$. Pour tout $x \in B$, il existe $y \in V$ et $(\lambda_i)_{i \leq d} \in \mathbb{k}^d$ tel que $x = y + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$. Or $x' \in V^\perp$ et pour tout $i \leq d$, $\langle x', x_i \rangle = 0$. On en déduit que $\langle x', x \rangle = 0$. On a donc montré que $x' \in B^\perp$.

À partir de ϕ , on peut donc à construire une injection

$$\tilde{\phi} : V^\perp / V^\perp \cap B^\perp \hookrightarrow \mathbb{k}^d.$$

On en déduit que la dimension de $V^\perp / V^\perp \cap B^\perp$ est finie.

Étant donné que les espaces que l'on considère ne sont pas réflexifs, on ne peut pas appliquer le premier point de la proposition pour en déduire le second. Par ailleurs, la preuve est en tous points similaire et nous ne la traitons pas. $\square$

Le cas finitaire. Nous ne savons pas si les espaces de finitude sont stables par passage au quotient.

III.3 Structure multiplicative

Les espaces vectoriels topologiques ne forment pas en général une catégorie symétrique monoïdale close. Toute la difficulté est de trouver un produit tensoriel adapté à l'espace des fonctions. On retrouve ces difficultés dans les espaces de Lefschetz. Pourtant les espaces de Lefschetz finitaires forment bien une catégorie monoïdale close. On peut alors chercher quelles sont, parmi les propriétés des espaces de Lefschetz finitaires, celles qui en font un modèle de MLL. L'une de ces propriétés est que les *linéairement compacts*, *linéairement bornés* fermés, et les *linéairement équicontinus* fermés sont trois notions équivalentes dans les espaces de Lefschetz finitaires. De plus chacune de ces notions apporte une pierre à l'édifice de la *réflexivité* (i.e. l'existence d'un homéomorphisme linéaire canonique entre un espace de Lefschetz et son bi-dual topologique).

III.3.1 Espace de fonctions, dual et réflexivité

Dans les espaces de Lefschetz, la structure multiplicative la plus simple à décrire est celle des espaces de fonctions. Le problème est de savoir quelle topologie choisir. Après avoir défini le cadre nécessaire pour avoir un espace de fonctions qui est un espace de Lefschetz, nous présentons différentes topologies de la convergence uniforme sur les linéairement compacts, les linéairement bornés et les linéairement équicontinus. Ensuite, nous décrivons les topologies du dual et étudions la réflexivité selon la topologie sur le dual. Enfin, nous donnons des exemples et contre-exemples d'espaces réflexifs.

III.3.1.a Topologie de la convergence uniforme

Le cas général. Étant donnés deux espaces de Lefschetz E et F , on note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace des fonctions linéaires continues de E dans F . Cet espace peut être muni de différentes topologies plus ou moins fines qui en font un espace de Lefschetz. Les topologies de la convergence simple, uniforme sur les compacts, les bornés, ... sont toutes définies par rapport à des *bornologies linéaires*, analogue des bornologies⁷ dans les espaces de Lefschetz.

La définition suivante s'inspire de celle des topologies linéarisées (Définition III.1 page 71) pour généraliser les bornologies au cadre des espaces de Lefschetz.

Définition III.12. Soit E un espace vectoriel. Soit $\mathcal{B}$ une bornologie sur E ⁸. On dit que $\mathcal{B}$ est une **bornologie linéaire** lorsqu'il existe une famille $\mathfrak{S}$ de sous-espaces vectoriels de E telle que

(BL1) $\mathfrak{S}$ contient toutes les droites $\mathbb{k} \cdot x$ avec $x \in E$,

(BL2) $\mathfrak{S}$ est stable par somme finie, i.e. $S, T \in \mathfrak{S} \Rightarrow S + T \in \mathfrak{S}$.

et tout borné de $\mathcal{B}$ est contenu dans un borné linéaire $S \in \mathfrak{S}$.

⁷Sur l'espace des fonctions, la topologie de la convergence uniforme sur les compacts (qui sont bornés) se généralise en une topologie de la convergence uniforme sur une bornologie [HN77]. Comme la famille des bornés, une bornologie est une famille de parties stables par sous-ensemble, union et qui recouvre l'espace.

⁸Rappelons la Définition page 27, une bornologie sur E est une famille de parties de E stable par sous-ensemble, union finie et qui contient les singletons.

De ces deux conditions découle le fait que $\mathfrak{S}$ recouvre E , i.e. $E \subseteq \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} S$. En effet, $E \subseteq \bigcup_{x \in E} \mathbb{k} \cdot x$ et pour tout $x \in E$, la droite $\mathbb{k} \cdot x$ est dans $\mathfrak{S}$. De plus, tous les espaces de dimension finie sont dans $\mathfrak{S}$.

Proposition III.44. *Soit E un espace vectoriel. Soit $\mathfrak{S}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E vérifiant les Conditions (BL1) et (BL2). Soit $\mathcal{B}$ la famille des parties de E engendrée par $\mathfrak{S}$ et définie par :*

$$\mathcal{B} = \{B ; \exists S \in \mathfrak{S}, B \subseteq S\}.$$

Alors, $\mathcal{B}$ est une bornologie linéaire.

Exemple III.12 (Bornologie de la dimension finie). Soit E un espace de Lefschetz. La famille $\mathfrak{D}$ des espaces de dimension finie est une bornologie linéaire sur E .

Proposition III.45. *Soit $\mathfrak{S}$ une bornologie linéaire. L'espace des fonctions linéaires continues $\mathcal{L}_c(E, F)$ muni de la topologie $\tau_{\mathfrak{S}}$, engendrée par le système fondamental linéaire*

$$\mathcal{W}(S, V) = \{f \in \mathcal{L}_c(E, F) ; f(S) \subseteq V\}$$

*avec $S \in \mathfrak{S}$ et V ouvert linéaire de F , est un espace de Lefschetz. C'est la **topologie de la convergence uniforme** sur la bornologie $\mathfrak{S}$.*

Démonstration. La famille des $\mathcal{W}(S, V)$ est un système fondamental (voir la Définition III.1 page 71) :

- $\forall S, V \in \mathcal{V}_F, 0 \in \mathcal{W}(S, V) \neq \emptyset$,
- $\forall S, S', \mathcal{W}(S + S', V) \subseteq \mathcal{W}(S, V) \cap \mathcal{W}(S', V)$.

Soit $\mathcal{V}$ un système fondamental de F . Soit $f \in \bigcap (\mathcal{W}(S, V) ; S \in \mathfrak{S}, V \in \mathcal{V})$. Montrons que $f = 0$. D'après la Condition (BL1), pour tout $x \in E$, la droite $\mathbb{k} \cdot x$ est dans $\mathfrak{S}$. Or $f(\mathbb{k} \cdot x) \in \bigcap \{V ; V \in \mathcal{V}\} = \{0\}$, donc $f(x) = 0$. On a donc montré la condition de séparation des espaces de Lefschetz (voir (TL 2) de la Définition III.1 page 71). □

En choisissant des bornologies différentes, on engendrera différentes topologies sur l'espace des fonctions.

Exemple III.13 (Topologie faible). Soient E et F deux espaces de Lefschetz finitaires. La **topologie faible** sur l'espace fonctionnel $\mathcal{L}_c(E, F)$ est la topologie $\tau_{\mathfrak{D}}$ engendrée par la famille $\mathfrak{D}$ des sous-espaces de dimension finie de E .

Dual. Le dual topologique E' d'un espace de Lefschetz E est l'espace $\mathcal{L}_c(E, \mathbb{k})$ des formes linéaires continues sur E . Comme $\mathbb{k}$ est muni de la topologie discrète le système fondamental est engendré par les annulateurs des éléments de la bornologie linéaire.

Proposition III.46. *Soit $\mathfrak{S}$ une bornologie linéaire. Le dual topologique E' muni de la topologie $\tau_{\mathfrak{S}}$, engendrée par le système fondamental linéaire*

$$\mathcal{W}(S) = \{f \in E' ; f(S) = 0\}$$

avec $S \in \mathfrak{S}$, est un espace de Lefschetz.

Démonstration. Comme $\mathbb{k}$ est discret, $\{0\}$ forme à lui seul un système fondamental de $\mathbb{k}$. D'après la Proposition III.45 page 104, les ouverts linéaires fondamentaux sont de la forme $\mathcal{W}(S, \{0\}) = \{f \in \mathcal{L}_c(E, \mathbb{k}) ; f(S) \subseteq \{0\}\}$ où S parcourt la bornologie $\mathfrak{S}$. $\square$

Notation III.13. On notera de façon équivalente $\mathcal{W}(S)$, $S^\perp$ ou encore $\text{ann}_{E'}(S)$.

Exemple III.14 (Topologie faible). Soit E un espace de Lefschetz. On note $\neg_{\mathfrak{D}}E$ le dual topologique E' muni de la topologie faible.

L'espace $\neg_{\mathfrak{D}}E$ peut être considéré comme un sous-espace de $\mathbb{k}^E$.

On considère le plongement

$$\begin{aligned} \neg_{\mathfrak{D}}E &\hookrightarrow \mathbb{k}^E \\ x' &\mapsto (\langle x', x \rangle)_{x \in E}. \end{aligned}$$

Rappelons que la topologie sur $\mathbb{k}^E$ est engendrée par $\mathcal{V}((x_i)_{i \leq n}) = \{(x^*) \in \mathbb{k}^E ; \langle x^*, x_i \rangle = 0\}$ où $(x_i)_{i \leq n} \in E^n$ (voir l'Exemple III.6 page 94).

Soient D un sous-espace de dimension finie de E et $(x_i)_{i \leq n}$ une base de D .

$$D^\perp = (\neg_{\mathfrak{D}}E) \cap \mathcal{V}((x_i)_{i \leq n})$$

On en déduit que $\neg_{\mathfrak{D}}E$ est muni de la topologie induite par la topologie produit sur $\mathbb{k}^E$.

Comme $\mathbb{k}^E$ est muni de la topologie de la co-dimension finie, on en déduit que tout ouvert faible est de co-dimension finie.

Le cas finitaire. Soit $A = (|A|, \mathcal{F}(A))$ un espace de finitude relationnel. Rappelons la Notation III.5 page 74 : pour tout $u \in \mathcal{F}(A)$, $\mathcal{K}(u) = \{x \in E_A ; |x| \subseteq u\}$. De plus pour tout K sous-espace vectoriel de E_A , on note $|K| = \{a \in |A| ; \exists x \in K, x_a \neq 0\}$.

Proposition III.47. Soit $A = (|A|, \mathcal{F}(A))$ un espace de finitude relationnel, la famille $\mathfrak{F} = (K ; |K| \in \mathcal{F}(A))$ est une bornologie linéaire, dite **finitaire**. De plus, pour tout $u \in \mathcal{F}(A)$, le sous-espace $\mathcal{K}(u)$ est dans $\mathfrak{F}$.

Démonstration. On vérifie à la main les conditions de bornologies linéaires. Rappelons que $\mathcal{F}(A)$ est stable par sous-ensemble (RF2) et par union finie (RF3) (voir le Fait II.2 page 45).

(BL1) Soit K un sous-espace de dimension finie dans E_A . Soit $(x_i)_{i \leq d}$ une base de K . Pour tout $i \leq d$, $|x_i| \in \mathcal{F}(A)$. Pour tout $x \in K$, il existe $(\lambda_i)_{i \leq d}$ tel que $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_d x_d$. On a alors $|x| \subseteq \cup_{i \leq d} |x_i|$ qui est finitaire car inclus dans une union finie de partie finitaire.

(BL2) $\forall K, K' \in \mathfrak{F}$, $|K + K'| = |K| \cup |K'| \in \mathcal{F}(A)$.

Pour tout $u \in \mathcal{F}(A)$, le support de $\mathcal{K}(u)$ est u , d'où $\mathcal{K}(u) \in \mathfrak{F}$. $\square$

Proposition III.48. Soient $A = (|A|, \mathcal{F}(A))$ et $B = (|B|, \mathcal{F}(B))$ deux espaces de finitude relationnels. Muni de la topologie $\tau_{\mathfrak{F}}$ de la convergence uniforme sur la bornologie linéaire finitaire $\mathfrak{F} = (K ; |K| \in \mathcal{F}(A))$, l'espace de fonctions $\mathcal{L}_c(E_A, E_B)$ est un espace de Lefschetz finitaire linéairement homéomorphe à $E_{A \rightarrow B}$.

Démonstration. On va utiliser les constructions de la logique linéaire dans les espaces de finitude relationnels. Rappelons qu'elles sont décrites à la Figure II.1 page 52.

L'application linéaire

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{L}_c(E_A, E_B) &\rightarrow E_{A \multimap B} \\ f &\mapsto (\langle e'_b, f(e_a) \rangle)_{(a,b) \in |A| \times |B|} \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'après la Proposition III.16 page 81. Vérifions que c'est un homéomorphisme linéaire.

L'espace de fonctions $\mathcal{L}_c(E_A, E_B)$ admet pour système fondamental la famille des

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(K, \mathcal{V}(v')) &= \{f \in \mathcal{L}_c(E_A, E_B) ; \forall x \in K, f(x) \in \mathcal{V}(v')\} \\ &= \left\{f \in \mathbb{k}^{|A| \times |B|} ; |x|_{|A|} \subseteq |K|, |f(x)|_{|B|} \cap v' = \emptyset\right\}, \end{aligned}$$

où $|K| \in \mathcal{F}(A)$ et $v' \in \mathcal{F}(B)^\perp$.

L'espace $E_{A \multimap B}$ admet pour système fondamental la famille des

$$\mathcal{V}(w')_{A \multimap B} = \left\{f \in \mathbb{k}^{|A| \times |B|} ; |f| \cap w' = \emptyset\right\},$$

avec $w' \in \mathcal{F}(A \multimap B)^\perp$. Or $\mathcal{F}(A \multimap B)^\perp = \mathcal{F}(A \otimes B^\perp)$, donc w' parcourt les parties de $|A| \times |B|$ telles que la projection sur $|A|$ est finitaire et la projection sur $|B|$ est anti-finitaire, i.e.

$$\Pi_A(w') \in \mathcal{F}(A) \quad \Pi_B(w') \in \mathcal{F}(B)^\perp.$$

Pour tout $K \in \mathfrak{F}$ et $v' \in \mathcal{F}(B)^\perp$, $\phi(\mathcal{W}(K, \mathcal{V}(v')))$ contient $\mathcal{V}(|K|) \times \mathcal{V}(v')$, d'où ϕ est ouverte. Réciproquement, pour tout $w' \in \mathcal{F}(A \multimap B)^\perp$, $\phi^{-1}(\mathcal{V}(w')_{A \multimap B})$ contient $\mathcal{W}(\mathcal{K}(\Pi_A(w'))_{E_A} \times \mathcal{V}(\Pi_B(w'))_B)$ (on utilise le fait que $w' \subseteq \Pi_A(w') \times \Pi_B(w')$). On déduit que ϕ est continue. $\square$

Proposition III.49. Soit $A = (|A|, \mathcal{F}(A))$ un espace de finitude relationnel. Muni de la topologie $\tau_{\mathfrak{F}}$ de la convergence uniforme sur la bornologie linéaire finitaire $\mathfrak{F} = (\mathcal{K}(u) ; u \in \mathcal{F}(A))$, le dual topologique E'_A de l'espace de Lefschetz finitaire E_A est un espace de Lefschetz finitaire homéomorphe à $E_{A^\perp}$.

Démonstration. D'après la Proposition III.22 page 86,

$$\begin{array}{ccc} x' & \longmapsto & (\langle x', e_a \rangle)_{a \in |A|} \\ & \searrow f & \nearrow \\ E'_A & & E_{A^\perp} \\ & \nwarrow f^{-1} & \swarrow \\ x & \longmapsto & \sum_{a \in |A|} x'_a x_a \longleftarrow (x'_a)_{a \in |A|} \end{array}$$

sont deux fonctions linéaires inverses l'une de l'autre.

Montrons qu'elle sont continues. Soit $u \in \mathcal{F}(A)$. D'après la Proposition III.22 page 86, $f^{-1}(\mathcal{V}(u)_{A^\perp}) = \mathcal{W}(\mathcal{K}(u)_A)$ donc f est continue.

Soit K un sous-espace de E_A tel que $|K| \in \mathcal{F}(A)$. On a

$$\{(x'_a)_{a \in |A|} ; |(x'_a)| \cap |K| = \emptyset\} = \mathcal{V}(K)_{A^\perp} \subseteq f(\mathcal{W}(K)).$$

Donc f^{-1} est continue.

On en déduit que f est un homéomorphisme linéaire. $\square$

Exemple III.15 (Topologie faible et espace de finitude). Soit A un espace de finitude relationnel dont la structure finitaire est l'ensemble de toutes les parties, i.e. $A = (|A|, \mathcal{P}(|A|))$. L'espace de Lefschetz E_A est muni de la topologie faible. Réciproquement, si E_A est muni de la topologie faible, alors toute partie de $|A|$ est finitaire.

En effet, les ouverts de E_A sont les $\mathcal{V}(u')$ pour $u' \in \mathcal{P}(|A|)^\perp = \mathcal{P}_{\text{fin}}(|A|)$ et $\mathcal{V}(u')_A$ est homéomorphe à $\mathcal{K}(u')_{A^\perp}^\perp$. De plus, $\mathcal{F}(A) = \mathcal{P}(|A|)$ si et seulement si $\mathcal{F}(A)^\perp = \mathcal{P}_{\text{fin}}(|A|)$. Soit $u' \in \mathcal{F}(A)^\perp$, alors u' est finie et $\mathcal{K}(u')_{A^\perp} = \{x' \in E'_A ; |x'| \subseteq u'\}$ est de dimension finie, donc $\mathcal{V}(u')_A$ est un ouvert faible de E_A .

Réciproquement, supposons que E_A soit muni de la topologie faible. Alors, pour toute partie anti-finitaire u' , le sous-espace $\mathcal{V}(u')_A$ est de co-dimension finie (voir l'Exemple III.14 ci-dessus). On en déduit que $E/\mathcal{V}(u')_A$ est de dimension finie (voir la Proposition III.43 page 102). Or $\mathcal{K}(u')_{A^\perp}$ est linéairement homéomorphe à ${}^\perp\mathcal{V}(u')_A$, donc $\mathcal{K}(u')_{A^\perp}$ est de dimension finie. On en déduit que le cardinal de u' est fini, puisque $(e_a)_{a \in u'}$ est une base de Schauder de $\mathcal{K}(u')_{A^\perp}$.

III.3.1.b Topologies de l'espace de fonctions.

Nous allons maintenant décrire les trois topologies qui nous intéressent sur les espaces de fonctions dans les espaces de Lefschetz. Nous les classons par les bornologies qui les engendrent : les linéairement compacts (Définition III.14 page 108), les linéairement bornés (Définition III.16 page 115) et les linéairement équicontinus (Définition III.17 page 120).

Chacune de ces topologies est intéressante en elle-même : la topologie de la convergence uniforme sur les compacts est la topologie peut-être la plus connue dans les espaces vectoriels topologiques ; les linéairement bornologiques généralisent naturellement les parties des espaces vectoriels topologiques comme nous les avons introduit dans l'Exemple I.5 page 27 du préluce ; enfin, la topologie équicontinue joue un rôle important dans la complétion (voir la Proposition III.23 page 88).

Par ailleurs, chacune de ces trois topologies joue un rôle dans la réflexivité comme nous le verrons au Paragraphe III.3.1.c.

Les trois bornologies sont liées. Nous verrons notamment que

- Tout linéairement compact est fermé et linéairement borné (Condition (LB8) de la Proposition III.62 page 115).
- Dans un espace de Lefschetz complet, un sous-espace est linéairement borné si et seulement si sa fermeture est linéairement compacte (Proposition III.63 page 117).
- Tout linéairement équicontinu du dual topologique (muni de la convergence uniforme sur les linéairement bornés) est linéairement borné (Proposition III.63 page 117).

Nous verrons enfin que dans les espaces de Lefschetz engendrés par un espace de finitude, on peut caractériser de façon très simple ces trois notions en termes de supports finitaires (Propositions III.68 page 121 et III.71 page 122).

Linéairement compacts. La compacité linéaire est définie en linéarisant la propriété d'intersection des compacts, c'est-à-dire un ensemble est compact si et seulement si tout filtre de fermés non vide est d'intersection non vide.

Définition III.14. Soit E un espace de Lefschetz. Un sous-espace affine K de E est dit **linéairement compact** s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

1. Pour tout *filtre* $\mathcal{F}$ de sous espaces affines fermés, on a la propriété de l'intersection, i.e.

$$(\forall F \in \mathcal{F}, F \cap K \neq \emptyset) \Rightarrow (K \cap (\cap \mathcal{F}) \neq \emptyset).$$

2. Tout *réseau* $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ de K admet une valeur d'adhérence.

On note $\mathfrak{C}$ la famille des linéairement compacts de E .

Remarque. • Dans les propositions qui suivent, les **linéairement compacts** désignent des sous-espaces vectoriels linéairement compacts. Les sous-espaces affines linéairement compacts sont des translatés de sous-espaces vectoriels linéairement compacts (leur direction) et héritent de leurs propriétés.

- On parlera aussi d'espace linéairement compact lorsque l'espace tout entier vérifie la propriété d'intersection finie linéarisée.

Remarque. Si $\mathbb{k}$ est un corps fini, un sous-espace est compact si et seulement s'il est fermé et contenu dans un linéairement compact (cf [Bar76]).

Les linéairement compacts vérifient les propriétés usuelles des compacts et d'autres propriétés plus exotiques.

Proposition III.50. [Köt79, §10.9]

(LC1) Le corps $\mathbb{k}$ muni de la topologie discrète est linéairement compact.

(LC2) Tout sous-espace fermé d'un linéairement compact est linéairement compact.

(LC3) Tout linéairement compact d'un espace de Lefschetz est fermé.

Démonstration. Soient K un linéairement compact et $x \notin K$. Supposons que K ne soit pas fermé, i.e. pour tout $V \in \mathcal{V}$, $x + V \cap K \neq \emptyset$. Comme K est linéairement compact, et que tout élément de $\mathcal{V}$ est à la fois ouvert et fermé, $\cap(x + V) \cap K \neq \emptyset$. Or $\{x\} = \cap(x + V)$, donc $x \in K$ ce qui est contraire à l'hypothèse initiale. Il existe donc $V \in \mathcal{V}$ tel que $x + V \cap K = \emptyset$, et on a prouvé que le complémentaire de K est ouvert. $\square$

(LC4) L'image d'un linéairement compact par une application linéaire continue est linéairement compacte.

Démonstration. Soit E un espace de Lefschetz. On note $\mathcal{V}$ la famille des ouverts linéaires de E . Soient K un sous espace affine linéairement compact, $s : E \rightarrow F$ une application linéaire continue et $\mathcal{F}_F$ un filtre de sous espaces affines de F qui rencontrent tous $s(K)$.

Soient $G, H \in \mathcal{F}_F$. Montrons que $(s^{-1}(G) ; G \in \mathcal{F}_F)$ est une base de filtre :

- $G \cap s(K) \neq \emptyset$, donc $s^{-1}(G) \neq \emptyset$,
- $s^{-1}(G) \cap s^{-1}(H) \subseteq s^{-1}(G \cap H)$.

De plus, cette base de filtre rencontre K . En effet, il existe $y \in G \cap s(K) \neq \emptyset$, donc il existe $x \in K$ tel que $s(x) = y \in G$ d'où $x \in s^{-1}(G) \cap K \neq \emptyset$. Comme K est linéairement compact, il existe $x \in (\cap s^{-1}(G)) \cap K$, c'est-à-dire que $s(x) \in (\cap G) \cap s(K)$. Le sous espace affine $s(K)$ est donc linéairement compact. $\square$

(LC5) *Le quotient d'un linéairement compact par un sous-espace fermé est linéairement compact.*

Démonstration. En effet, le quotient est l'image par la projection, qui est continue, du linéairement compact de départ. $\square$

(LC6) *Un linéairement compact discret est de dimension finie.*

Démonstration. Montrons qu'un espace discret E de dimension infinie ne peut être linéairement compact.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille libre infinie de E . Comme E est discret, $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ n'est pas bien définie. En effet, d'après la Proposition III.12 page 78, les seules suites qui convergent sont stationnaires, ce qui n'est pas le cas de la suite des sommes partielles des x_n .

Pour tout $N \subseteq \mathbb{N}$ fini, on note $F_N = \overline{\langle x_j ; j \geq N \rangle}$. Les sous-espaces affines fermés $(\sum_{n \leq N} x_n + F_N ; n \in \mathbb{N})$ rencontrent tous E et forment un filtre. Or leur intersection est vide. $\square$

(LC7) *Les sous-espaces ouverts d'un linéairement compact sont de codimension finie.*

Démonstration. Soit V un ouvert linéaire d'un linéairement compact K . D'après la Proposition III.39 page 101, V est ouvert, donc le quotient K/V est discret. De plus, V est fermé (voir la Proposition III.7 page 77), donc le quotient est linéairement compact. On en déduit (Condition (LC6)) que K/V est de dimension finie. Or $K = V \oplus K/V$, donc V est de codimension finie. $\square$

La propriété suivante est une généralisation du théorème de Tychonov à la topologie linéarisée. Ce dernier assure qu'un produit quelconque de compacts est compact.

Proposition III.51. [Lef42] *Le produit quelconque de sous espaces vectoriels linéairement compacts est linéairement compact.*

Une conséquence immédiate de ce théorème concerne les espaces de dimension finie.

Proposition III.52. *Tout espace de Lefschetz de dimension finie est linéairement compact. En particulier, pour tout $x \in E$, $\mathbb{k} \cdot x$ est linéairement compact.*

Proposition III.53. *Soient E un espace de Lefschetz, K_1 et K_2 deux sous espaces vectoriels linéairement compacts. La somme $K_1 + K_2$ est linéairement compacte.*

Démonstration. Dans un espace de Lefschetz, la somme directe topologique de deux sous espaces est isomorphe au produit cartésien de ceux-ci muni de la topologie produit. On peut donc appliquer le théorème de Tychonov de la façon suivante. On construit le produit cartésien $K_1 \times K_2$, par Tychonov (Proposition III.51 ci-dessus), c'est un espace vectoriel linéairement compact. Soit $f : K_1 \times K_2 \rightarrow K_1 + K_2$ la fonction linéaire continue définie par $\forall x_i \in K_i, f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. D'après la Proposition III.50(LC 4) page 108, l'image $K_1 + K_2$ du linéairement compact $K_1 \times K_2$ est linéairement compacte. $\square$

Si la somme de deux linéairement compacts est linéairement compacte, la somme de deux sous espaces vectoriels fermés d'un espace de Lefschetz n'est pas toujours fermée.

Contre-Exemple III.16. On considère $E = \mathbb{k}^{(\mathbb{N})}$ l'espace des suites nulles presque partout et à coefficients dans $\mathbb{k}$ muni de la topologie discrète et $F = \mathbb{k}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites quelconques muni de la topologie produit. L'espace vectoriel $E \times F$ est muni de la topologie produit, qui admet pour système fondamental en 0 le filtre des ensembles $V_J = \{0\} \times \{(x_i) ; \forall i \in J, x_i = 0\}$ où J est finie.

Les sous-espaces $A = E \times \{0\}$ et $B = \{(x, x) ; x \in E\}$ de $E \times F$ sont fermés.

En effet, soit $(x, y) \notin A$. Comme $y \neq 0$, il existe un voisinage linéaire de 0 dans F tel que $0 \notin y + V$, donc $[E \times (y + V)] \cap A = \emptyset$ et A est fermé. Soit $(x, y) \notin B$. Alors $x \neq y$ et il existe V voisinage linéaire de 0 dans F tel que $(x + V) \cap (y + V) = \emptyset$. Donc $B \cap [(x + V) \times (y + V)] = \emptyset$ et B est fermé.

Mais $A + B = E \times E$ et n'est pas fermé dans $E \times F$.

On considère les suites (0) et (1) dont toutes les composantes sont égales respectivement à 0 et à 1. Alors, $((0), (1)) \notin A + B$ et pour tout J fini, $[((0), (1)) + V_J] \cap A + B \neq \emptyset$ puisque $(1)_J$ la suite dont toutes les composantes sont égales à 1 sauf celles indexées par J qui sont nulles vérifie $(1)_J \in V_J$ et $(1) - (1)_J \in E$.

L'espace des fonctions peut-être muni de la topologie de la convergence uniforme (voir la Proposition III.45 page 104) sur la bornologie des linéairement compacts (voir la Définition III.12 page 103).

Lemme III.54. *Soit E un espace de Lefschetz. La famille $\tau_{\mathfrak{C}}$ des linéairement compacts sur E forme une bornologie linéaire.*

Démonstration. Tout sous-espace de dimension finie est linéairement compact. De plus, d'après la Proposition III.53 page 110, $\mathfrak{C}$ est stable par somme. La famille $\mathfrak{C}$ est donc une bornologie linéaire. $\square$

Proposition III.55. [Bar76] *Soient E et F deux espaces de Lefschetz. L'espace fonctionnel $\mathcal{L}_{\mathfrak{C}}(E, F)$ est un espace de Lefschetz lorsqu'il est muni de la topologie de la convergence uniforme $\tau_{\mathfrak{C}}$ sur les linéairement compacts engendrée par la bornologie linéaire $\mathfrak{C}$. Il admet pour*

système fondamental linéaire *la famille*

$$\mathcal{W}(K, V) = \{f \in \mathcal{L}_c(E, F) ; f(K) \subseteq V\}$$

où K est linéairement compact dans E et V est un ouvert linéaire de F .

Démonstration. C'est une application directe de la Proposition III.45 page 104. $\square$

La proposition qui suit nous permet de mieux comprendre la structure des linéairement compacts. Elle nous permettra notamment d'exhiber le Contre-exemple III.18 page 126 à la réflexivité par rapport à la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts. Nous donnons une version simplifiée de la démonstration originale de Lefschetz.

Proposition III.56. [Lef42] *Tout espace de Lefschetz linéairement compact est linéairement homéomorphe à un produit d'espaces vectoriels de dimension 1.*

Démonstration. Soient K un sous espace vectoriel linéairement compact de E , $(K', \tau_{\mathcal{C}})$ son dual et $\mathcal{B} = (e'_i ; i \in I)$ une base de Hamel de K' . Comme K est linéairement compact, K' est discret et $(e'_i)_{i \in I}$ est une base de Schauder.

On considère l'application linéaire à valeurs dans $\mathbb{k}^I$ muni de la topologie produit.

$$\begin{aligned} \phi : K &\rightarrow \mathbb{k}^I \\ x &\mapsto (\langle e'_i, x \rangle)_{i \in I}. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que ϕ est un homéomorphisme linéaire

L'application linéaire ϕ est injective. En effet, d'après la Proposition III.18 page 84 de séparation fonctionnelle, si $x \neq 0$, alors il existe x' tel que $\langle x', x \rangle \neq 0$. Ainsi, il existe $i \in I$ tel que $\langle e'_i, x \rangle \neq 0$.

Elle est surjective. En effet, soit $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{k}^I$. On va utiliser le fait que K est linéairement compact pour montrer l'existence d'un antécédent de $(\lambda_i)_{i \in I}$ par ϕ . On considère la famille décroissante de sous espaces affines de K définie par :

$$G_n = \{x \in K \mid \forall i \leq n, \langle e'_i, x \rangle = \lambda_i\}.$$

Pour tout n , G_n est fermé comme intersection d'images réciproques d'un fermé par une forme linéaire continue.

D'après la Proposition III.21 page 85, pour tout n , il existe une famille duale $(e_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ telle que $\forall i, j \leq n, \langle e'_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$. On pose $x_n = \sum_{i \leq n} \lambda_i \cdot e_i$ et on obtient $x_n \in G_n$ et $G_n \neq \emptyset$.

$(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc un filtre de sous-espaces affines fermés non vides du linéairement compact K . Par conséquent, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n \neq \emptyset$. On choisit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$, alors $\forall i \in I, \langle e'_i, x \rangle = \lambda_i$, d'où $\phi(x) = (\lambda_i)_{i \in I}$.

De plus, ϕ est continue car pour tout V ouvert linéaire de $\mathbb{k}^I$, il existe $J \subseteq I$ fini tel que $\mathcal{V}(J) = \{x \in \mathbb{k}^I ; \forall j \in J, x_j \neq 0\} \subseteq V$ (voir la Définition III.27 page 94). L'image réciproque d'un ouvert $\mathcal{V}(J)$ est $\bigcap_{i \in J} \ker(e'_i)$, qui est donc ouverte comme intersection finie d'ouverts.

Montrons pour finir que l'application ϕ est ouverte. Soit V un ouvert linéaire de K . Comme K est linéairement compact, V est de codimension finie (LC7). Son image par l'isomorphisme ϕ est donc de co-dimension finie. De plus V est un sous-espace fermé de K , donc linéairement compact (LC2). Son image par ϕ est linéairement compacte (LC4) donc fermée. Or les sous-espaces vectoriels fermés de co-dimension finie sont aussi ouverts (voir la Proposition III.7 page 77).

□

Rappelons que pour tout espace de Lefschetz E , l'espace de Lefschetz $(E', \tau_{\mathcal{C}})$ est le dual topologique de E muni de la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts.

Nous allons montrer que l'on peut séparer une forme linéaire continue sur un espace de Lefschetz d'un sous-espace fermé du dual muni de la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts.

Pour cela, nous allons avoir besoin d'un lemme intermédiaire et de notations.

Notation III.15. Soit E un espace vectoriel. Pour toute partie F de E , on note $\text{aff } F$ le sous-espace affine engendré par F et $\overline{\text{aff } F}$ sa fermeture affine.

Lemme III.57. Soit E un espace de Lefschetz.

Pour tout $J' \subseteq E'$ fini, si $0 \notin \text{aff } (J')$, alors il existe $x \in E$ tel que $\forall x' \in J', \langle x', x \rangle = 1$.

Démonstration. Soit $(x'_i ; i \leq n)$ une famille libre maximale de J' . On va montrer que $\text{aff } (J') = \text{aff } (x'_i ; i \leq n)$. Soit $x' \in J'$. Il existe une famille de scalaires $(\lambda_i ; i \leq n)$ telle que $x' = \sum_{i \leq n} \lambda_i x'_i$. Comme $0 \notin \text{aff } (J')$, il n'existe pas de famille de coefficients $(\mu_i ; i \leq n)$ telle que

$$(1 - \sum_{i \leq n} \mu_i)x' + \sum_{i \leq n} \mu_i x'_i = 0.$$

En remplaçant dans cette équation x' par sa valeur $\sum_{i \leq n} \lambda_i x'_i$, on obtient

$$\sum_{i \leq n} \left[(1 - \sum_{j \leq n} \mu_j) \lambda_i + \mu_i \right] x'_i = 0.$$

Comme $(x'_i ; i \leq n)$ est une famille libre, on obtient un système de n équations en les n inconnues μ_j . Le déterminant de ce système est

$$(-1)^{n-1} (1 - \sum_{i \leq n} \lambda_i).$$

Le système n'ayant pas de solution, son déterminant est nul, d'où $\sum_{i \leq n} \lambda_i = 1$. On peut donc conclure que $x' \in \text{aff } (x'_i ; i \leq n)$. On a montré que $J' \subseteq \text{aff } (x'_i ; i \leq n)$. Or pour tout $i \leq n$, $x'_i \in J'$, donc $\text{aff } (J') = \text{aff } (x'_i ; i \leq n)$. D'après la Proposition III.20 page 85, il existe $x \in E$ tel que pour tout $i \leq n$, $\langle x'_i, x \rangle = 1$. On en déduit que

$$\forall x' \in J', \langle x', x \rangle = 1.$$

□

Proposition III.58 (Séparation dans $(E', \tau_{\mathcal{C}})$). *Soit E un espace de Lefschetz. Pour tout fermé F' de $(E', \tau_{\mathcal{C}})$, pour tout $x' \notin F'$, il existe $x \in E$ tel que $x \in {}^\perp F'$ et $\langle x', x \rangle = 1$. De plus, pour tout sous-espace G' de E' , l'annulateur du noyau de G' est l'adhérence de G' , i.e.*

$$({}^\perp G')^\perp = \overline{G'}.$$

La Proposition III.18 page 84 qui montre la proposition duale (selon laquelle tout vecteur non nul de E peut être séparé d'un sous-espace fermé qui ne le contient pas) ne s'applique pas car elle assure l'existence d'un «séparateur» dans E'' et non dans E .

Démonstration. Soient F' fermé et $x' \in E'$.

Posons $G' = x' + F'$. Comme G' est fermé et $0 \notin G'$, il existe un ouvert linéaire U de E' tel que $U \cap G' = \emptyset$. Par la définition de $\tau_{\mathcal{C}}$, il existe K linéairement compact tel que $U \supset K^\perp = \{x' \in E' \mid x'|_K = 0\}$.

On va montrer l'existence de $x \in K$ tel que $\forall x' \in G', \langle x', x \rangle = 1$. Pour cela on va utiliser la compacité linéaire de K et se ramener à des ensembles finis. Soit $J' \subseteq G'$ fini. On pose

$$G_{J'} = \{x \in E \mid \forall x' \in J', \langle x', x \rangle = 1\}.$$

Montrons que $G_{J'} \cap K \neq \emptyset$. Comme $G' \cap K^\perp = \emptyset$ et $\text{aff}(J') \subseteq G'$, pour tout $x' \in J'$, pour toutes familles $(\lambda_i)_{i \leq n}$ dans $\mathbb{k}$ et $(x'_i)_{i \leq n}$ dans J' , $(\sum_{i \leq n} \lambda_i x'_i)|_K \neq 0$. On a donc $0 \notin \text{aff}\{x'|_K \mid x' \in J'\}$. Par le lemme précédent, il existe $x \in K$ tel que $\forall x' \in J', \langle x', x \rangle = 1$, d'où $x \in G_{J'} \cap K$.

La famille des $G_{J'}$ forme un filtre de sous-espaces affines fermés qui rencontrent tous K . Par compacité linéaire de K ,

$$K \cap \left(\bigcap_{\substack{J' \subseteq G' \\ \text{fini}}} G_{J'} \neq \emptyset \right).$$

Il existe donc $x \in K$ tel que $\forall y' \in G', \langle y', x \rangle = 1$. Or $G' = x' + F'$. En particulier, $x' \in G'$ donc $\langle x', x \rangle = 1$. On en déduit que $\forall y' \in F', \langle y', x \rangle = 0$.

Remarquons que $G' \subseteq ({}^\perp G')^\perp$. Comme $({}^\perp G')^\perp$ est fermé, $\overline{G'} \subseteq ({}^\perp G')^\perp$. Par contraposée, soit $x' \notin \overline{G'}$. Il existe donc $x \in E$ tel que $\langle x', x \rangle = 1$ et $\forall y' \in \overline{G'}, \langle y', x \rangle = 0$. On en déduit que $x' \notin ({}^\perp G')^\perp$. $\square$

La Proposition suivante montre que tous les sous-espaces équicontinus (c'est-à-dire inclus dans l'annulateur d'un ouvert linéaire) sont linéairement compacts dans le dual topologique muni de la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts.

Proposition III.59. *Pour tout ouvert linéaire V d'un espace de Lefschetz E , $V^\perp$ est linéairement compact dans $(E', \tau_{\mathcal{C}})$.*

Démonstration. Posons $K' = V^\perp$. Remarquons que

$$x' \in K' = V^\perp \iff \forall x \in V, \langle x', x \rangle = 0 \iff V \subseteq \ker x'$$

Soit $\mathcal{F}'$ un filtre de sous-espaces affines fermés de E' tel que pour tout $F' \in \mathcal{F}'$, $F' \cap V^\perp \neq \emptyset$. Il existe donc $x'_F \in F'$ tel que $x' \in V^\perp$ donc $V \subseteq \ker(x'_F)$.

Pour tout $F' \in \mathcal{F}'$, choisissons $x'_{F'} \in F'$ et notons $\text{dir}(F')$ sa direction. C'est un sous-espace vectoriel fermé de $(E', \tau_{\mathcal{C}})$ tel que si $x'_{F'} \in F'$, alors $F' = x'_{F'} + \text{dir}(F')$. Remarquons que

$$\begin{aligned} x' \in F' &\iff \exists d' \in \text{dir}(F') ; x' = x'_{F'} + d' \\ &\iff \forall x \in {}^\perp \text{dir}(F'), \langle x', x \rangle = \langle x'_{F'}, x \rangle. \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Posons $D = \cup_{F' \in \mathcal{F}'} {}^\perp \text{dir}(F')$ (c'est un sous-espace vectoriel de E car l'union est filtrante). Nous allons définir x' sur D tel que pour tout $F' \in \mathcal{F}'$, $x' \in F'$ et $V \subseteq \ker(x')$. Ensuite nous allons prolonger x' à E et montrer que ce prolongement est dans K' .

Soit $x \in D$. Il existe $F' \in \mathcal{F}'$ tel que $x \in {}^\perp \text{dir}(F')$, on pose $\langle x', x \rangle = \langle x'_{F'}, x \rangle$.

Montrons que x' est définie indépendamment du choix de F' . Comme $\mathcal{F}'$ est un filtre, pour tous $F'_1, F'_2 \in \mathcal{F}'$, l'intersection $G' \stackrel{\text{def}}{=} F'_1 \cap F'_2$ est dans $\mathcal{F}'$. D'après l'Équivalence (III.3), $\forall x \in {}^\perp \text{dir} F'_1$, $\langle x'_{G'}, x \rangle = \langle x'_{F'_1}, x \rangle$ et $\forall x \in {}^\perp \text{dir} F'_2$, $\langle x'_{G'}, x \rangle = \langle x'_{F'_2}, x \rangle$. On en déduit que si $x \in {}^\perp \text{dir} F'_1 \cap {}^\perp \text{dir} F'_2$, alors $\langle x'_{F'_1}, x \rangle = \langle x'_{F'_2}, x \rangle$.

On vérifie que x' est linéaire en remarquant que D est un sous-espace vectoriel, donc pour tous $x, y \in D$, il existe $F' \in \mathcal{F}'$ tel que x, y et $x + y \in \text{dir} F'$. On utilise ensuite la linéarité de $x_{F'}$.

Montrons que x' est continue. D'après la définition de x' , pour tout $F' \in \mathcal{F}'$ et pour tout $x \in {}^\perp \text{dir}(F')$, $\langle x'_{F'}, x \rangle = \langle x', x \rangle$. Or $x'_{F'} \in K'$, d'où $V \subseteq \ker(x'_{F'})$ et $V \cap {}^\perp \text{dir}(F') \subseteq \ker(x')$. On en déduit que $V \cap D \subseteq \ker(x')$. Donc x' est linéaire continue sur V .

On conclut d'après le Théorème III.1 de Hahn-Banach page 83 : il existe un prolongement $y' \in E'$ de x' à E tel que $V \subseteq \ker(y')$. On en déduit que $y' \in K'$. De plus, pour tout $F' \in \mathcal{F}'$ et pour tout $x \in {}^\perp \text{dir}(F')$, on a $\langle y', x \rangle = \langle x', x \rangle = \langle x'_{F'}, x \rangle$, donc $y' \in F'$ d'après l'Équivalence III.3. On déduit alors que $K' \cap (\cap \mathcal{F}') \neq \emptyset$. On a bien montré que $K' = V^\perp$ est linéairement compact. $\square$

Remarque. Dans [Bar76], Barr donne une autre démonstration de cette proposition. Celle-ci repose sur les propriétés des quotients et sur l'adjonction entre espaces discrets et espaces linéairement compacts qui est décrite à la Proposition III.60 page 114 ci-dessous.

Proposition III.60. [Bar76] Soit E un espace de Lefschetz. Si E est linéairement compact, alors $(E', \tau_{\mathcal{C}})$ est discret. D'autre part, si E est discret, alors $(E', \tau_{\mathcal{D}})$ est linéairement compact.

Démonstration. En effet, $\text{ann}(E) = \{0\}$ est un élément du système fondamental de $(E', \tau_{\mathcal{C}})$. Si E est discret, alors $(E', \tau_{\mathcal{D}})$ est linéairement homéomorphe à l'espace E^* de toutes les formes linéaires qui est un sous-espace fermé du produit $\mathbb{k}^E$ qui est un espace linéairement compact d'après la Proposition III.51 page 109. $\square$

Linéairement bornés. Une partie d'un espace vectoriel topologique est bornée lorsqu'elle est absorbée par tout ouvert. Intuitivement, un sous-espace vectoriel d'un espace de Lefschetz est linéairement borné lorsque les éléments de B qui ne sont pas dans V forment un espace de dimension finie.

Définition III.16. Un sous-espace vectoriel B d'un espace de Lefschetz E est dit **linéairement borné** lorsque pour tout ouvert linéaire V de E , la codimension de l'intersection $B \cap V$ dans B est finie, i.e.

$$\forall V \subseteq E \text{ ouvert linéaire, } B/B \cap V \text{ de dimension finie.} \quad (\text{III.4})$$

Une partie V **absorbe linéairement** une partie B , si $B/B \cap V$ est de dimension finie. On note $\mathfrak{B}$ la famille des linéairement bornés de E .

Proposition III.61. Soit E un espace de Lefschetz. Un sous-espace vectoriel B est linéairement borné si et seulement si

$$\forall V \subseteq E \text{ ouvert linéaire, } (B + V)/V \text{ de dimension finie.} \quad (\text{III.5})$$

Démonstration. Il suffit de montrer qu'il existe un isomorphisme entre $B/B \cap V$ et $(B + V)/V$ pour en déduire que la dimension de $B/B \cap V$ est finie si et seulement si la dimension de $(B + V)/V$ est finie. Soit ϕ la surjection composée de l'injection et de la projection suivantes

$$\phi : B \hookrightarrow (B + V) \twoheadrightarrow (B + V)/V.$$

Le noyau de ϕ est $\ker \phi = \{x \in B ; \phi(x) = 0\} = B \cap V$. On obtient donc l'isomorphisme

$$\bar{\phi} : B/B \cap V \xrightarrow{\sim} (B + V)/V,$$

par propriété universelle du quotient. □

On dira aussi que B est un espace de Lefschetz linéairement borné lorsque tout ouvert linéaire V est de co-dimension finie dans B , i.e. B/V est de dimension finie.

La propriété des linéairement bornés généralise la propriété d'intersection finie dans les espaces de finitude.

Exemple III.17. Soit $A = (|A|, \mathcal{F}(A))$ un espace de finitude relationnel. Pour tous $u \in \mathcal{F}(A)$ et $u' \in \mathcal{F}(A)^\perp$, la partie $u_0 = u \cap u'$ est finie, or

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(u) \cap \mathcal{V}(u') &= \{x \in E_A ; |x| \subseteq u, |x| \cap u' = \emptyset\} \\ &= \{x \in E_A ; |x| \subseteq u \setminus u \cap u'\} \\ &= \{x \in E_A ; |x| \subseteq u \setminus u \cap u_0\}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{K}(u) / (\mathcal{K}(u) \cap \mathcal{V}(u'))$ est de dimension finie égale au cardinal de u_0 .

Les espaces linéairement bornés vérifient les propriétés usuelles des bornés et d'autres plus exotiques.

Proposition III.62. [Köt79, §13] Soit E un espace de Lefschetz.

(LB1) Un sous-espace d'un linéairement borné est linéairement borné.

Démonstration. Si $B \subseteq B'$ alors pour tout ouvert linéaire V , $B + V \subseteq B' + V$ et $(B + V)/V \subseteq (B' + V)/V$. On utilise pour conclure la caractérisation (III.5) de la Définition III.16 page 115. □

(LB2) Une intersection quelconque de linéairement bornés est linéairement bornée.

Démonstration. C'est un corollaire direct de la Propriété (LB1) précédente. $\square$

(LB3) Une somme finie de linéairement bornés est linéairement bornée.

Démonstration. On vérifie facilement que pour tous sous-espaces B , B' et V d'un espace de Lefschetz E ,

$$(B + B' + V)/V = (B + V)/V + (B' + V)/V,$$

où les deux parties de l'égalité sont vues comme des sous-espaces de E/V . On conclut d'après la caractérisation (III.5) de la Définition III.16 page 115. $\square$

(LB4) L'adhérence d'un linéairement borné est linéairement bornée.

Démonstration. Soient B et V deux sous-espaces d'un espace de Lefschetz E . En utilisant la définition de l'adhérence, on vérifie facilement l'inégalité

$$B + V \subseteq \overline{B} + V \subseteq \overline{B + V}$$

Par ailleurs, si V est un ouvert linéaire de E , $B + V$ est fermé. En effet, si $x \notin B + V$, alors $(x + V) \cap (B + V) = \emptyset$, le complémentaire de $B + V$ est donc ouvert et $\overline{B + V} = B + V$. On en déduit que

$$B + V = \overline{B} + V.$$

On conclut en utilisant la caractérisation (III.5) de la Définition III.16 page 115. $\square$

(LB5) Soit E un espace de Lefschetz. Si B est linéairement borné dans E , alors B est linéairement borné dans $\tilde{E}$, le complété de E .

Démonstration. Rappelons la Proposition III.23 page 88. La topologie de $\tilde{E}$ est engendrée par le système fondamental $\text{ann}_{E'^*}(\text{ann}_{E'}(V)) \subseteq V^*$ où V est un ouvert linéaire de E . De plus, E est linéairement homéomorphe à un sous-espace dense de $\tilde{E}$ via l'application linéaire ev

$$\begin{aligned} E &\hookrightarrow \tilde{E} \\ x &\mapsto x' \mapsto \langle x', x \rangle. \end{aligned}$$

Par abus de notation, on considère que E est un sous-espace de $\tilde{E}$. Ainsi, dire que B est linéairement borné dans $\tilde{E}$ signifie que $\text{ev}(B)$ est linéairement borné dans $\tilde{E}$.

Soit B un linéairement borné de E . Soit V un ouvert linéaire de E . Comme $B \subseteq E$, on a $\text{ev}(B) \cap \text{ann}_{E'^*}(\text{ann}_{E'}(V)) = \text{ev}(B \cap V)$. On en déduit que

$$\text{ev}(B)/(\text{ev}(B) \cap \text{ann}_{E'^*}(\text{ann}_{E'}(V))) = \text{ev}(B/(B \cap V)).$$

Or B est linéairement borné et V un ouvert linéaire de E . On en déduit que $B/(B \cap V)$ est de dimension finie. Comme sur ev est un isomorphisme entre E et son image, $\text{ev}(B)/(\text{ev}(B) \cap \text{ann}_{E'^*}(\text{ann}_{E'}(V)))$ est aussi de dimension finie. On en déduit que $\text{ev}(B)$ est linéairement bornée. $\square$

(LB6) *L'image par une fonction linéaire continue d'un linéairement borné est linéairement bornée.*

Démonstration. Soient $f : E \rightarrow F$ une fonction linéaire continue entre deux espaces de Lefschetz, B un linéairement borné de E et V un ouvert linéaire de F . Notons U le ouvert linéaire $f^{-1}(V)$ de E (f est continue). Comme f est linéaire continue, la composée

$$g : B + U \xrightarrow{f} f(B) + V \twoheadrightarrow (f(B) + V)/V,$$

est linéaire continue. De plus g est surjective et son noyau vérifie $U \subseteq \ker(g)$. On en déduit que

$$\tilde{g} : (B + U)/U \twoheadrightarrow (f(B) + V)/V$$

est bien définie et surjective. Comme $(B + U)/U$ est de dimension finie, il en est de même pour $(f(B) + V)/V$. On conclut d'après la caractérisation (III.5) de la Définition III.16 page 115. $\square$

(LB7) *Tout espace de dimension finie est linéairement borné.*

Démonstration. En effet, si B est de dimension finie, alors $B/B \cap V$ est aussi de dimension finie. $\square$

(LB8) *Tout linéairement compact est linéairement borné.*

Démonstration. Soient E un espace de Lefschetz et K un sous-espace linéairement compact dans E . Pour tout ouvert linéaire V de E , $V \cap K$ est un ouvert linéaire de K . D'après la Proposition III.39 page 101, $K/(K \cap V)$ est discret. Comme la projection $K \rightarrow K/(K \cap V)$ est continue, $K/(K \cap V)$ est linéairement compact (voir la Proposition 4 page 108). Or tout espace de Lefschetz linéairement compact et discret est de dimension finie d'après la Proposition 6 page 109. $\square$

(LB9) *Dans un espace de Lefschetz discret, les linéairement bornés sont les espaces de dimension finie.*

Démonstration. Soit B un linéairement borné d'un espace de Lefschetz discret E . Comme $\{0\}$ est un ouvert linéaire, $B/\{0\} = B$ est de dimension finie. $\square$

Proposition III.63. [Köt79, §13.3] *Dans un espace de Lefschetz complet, un sous-espace fermé est linéairement borné si et seulement s'il est linéairement compact.*

Démonstration. Il suffit de montrer le sens direct puisque la réciproque est la juxtaposition des propriétés (LB8) de la Proposition III.62 page 115 ci-dessus et (LC3) de la Proposition III.50 page 108.

Soit B un linéairement borné fermé d'un espace complet. Alors, muni de la topologie induite, B est complet et pour tout ouvert linéaire V de B , B/V est de dimension finie.

Nous allons montrer que B est linéairement homéomorphe à un sous-espace fermé de l'espace produit $\mathbb{k}^{B'}$, B'^* . Or $\mathbb{k}^{B'}$ est linéairement compact comme produit de linéairement compacts (voir la Proposition III.51 page 109). On en déduira que B est linéairement compact.

Commençons par montrer que l'application linéaire

$$\begin{aligned}\phi : B &\rightarrow \mathbb{k}^{B'} \\ x &\mapsto (\langle x', x \rangle)_{x' \in B'}\end{aligned}$$

est injective et continue.

Elle est injective car, d'après la Proposition III.18 page 84, si $x \neq 0$ alors il existe $x' \in B'$ tel que $\langle x', x \rangle \neq 0$.

Rappelons la Proposition III.27 page 94, V^* est un ouvert de $\mathbb{k}^{B'}$ si et seulement s'il existe $(x'_i ; i \leq d)$ une famille finie de formes linéaires sur B' telle que

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(x'_i ; i \leq d) &= \left\{ (y_{x'})_{x' \in B'} ; \forall i \leq d, y_{x'_i}^* = 0 \right\} \\ &\subseteq V^*.\end{aligned}$$

Montrons que ϕ est continue.

Soit V^* un ouvert de $\mathbb{k}^{B'}$. Il existe $(x'_i ; i \leq d)$ une famille finie de formes linéaires sur B' telle que

$$\mathcal{V}(x'_i ; i \leq d) \subseteq V^*.$$

Soit D' le sous-espace vectoriel de dimension finie de B' , engendré par la famille $(x'_i)_{i \leq d}$. Le sous-espace ${}^\perp D'$ de B est ouvert car il est égal à l'intersection (finie) des noyaux des x'_i pour $i \leq d$. Or

$$\phi^{-1}(D') = \phi^{-1}(\phi(B) \cap \mathcal{V}(x'_i ; i \leq d)).$$

On en déduit que ϕ est continue.

Montrons que lorsque l'on restreint le co-domaine de ϕ à $\phi(B)$, ϕ est ouverte.

Soit V un ouvert linéaire de B . Comme B/V est de dimension finie, on a que $V^\perp / (B^\perp \cap V^\perp)$ est de dimension finie d'après la Proposition III.43 page 102. Or

$$B^\perp = \{x' \in B' ; \forall x \in B, \langle x', x \rangle = 0\} = \{0\}$$

donc $V^\perp$ est aussi de dimension finie. On note $x'_1, \dots, x'_d$ une base de $V^\perp$.

On vérifie facilement que

$$\phi(V) = \phi(B) \cap \mathcal{V}(x'_i ; i \leq d).$$

On en déduit que $\phi(V)$ est un ouvert dans $\phi(B)$.

On a donc montré que B est linéairement homéomorphe à $\phi(B)$. Il nous reste à montrer que $\phi(B)$ est linéairement compact. Pour cela, nous allons montrer que $\phi(B)$ est fermé dans $\mathbb{k}^{B'}$.

Soit $y \in \overline{\phi(B)}$. On va construire y^* dans le complété $\tilde{B}$ de B (voir la Proposition III.23 page 88). Comme B est complet, on en déduira que y^* dans B et on vérifiera que $\phi(y^*) = y$.

Comme $y \in \overline{\phi(B)}$, pour tous $x'_1, \dots, x'_n \in B'$, $(y + \mathcal{V}(x'_i; i \leq d)) \cap \phi(B) \neq \emptyset$.

Pour tout $x' \in B'$, on pose $\langle y^*, x' \rangle = y_{x'}$.

Montrons que y^* est linéaire. Soient $x'_1, x'_2 \in B'$ et $\lambda \in \mathbb{k}$. Comme $(y + \mathcal{V}(x'_i; i \leq d)) \cap \phi(B) \neq \emptyset$, il existe $x \in B$ tel que $y - \phi(x) \in \mathcal{V}(x'_1, x'_2, x'_1 + \lambda x'_2)$. Comme pour tout $z \in \mathcal{V}(x'_1, x'_2, x'_1 + \lambda x'_2)$, $z_{x'_1} = 0$, $z_{x'_2} = 0$ et $z_{x'_1 + \lambda x'_2} = 0$, on a $y_{x'_1} = \langle x'_1, x \rangle = \langle y^*, x'_1 \rangle$, $y_{x'_2} = \langle x'_2, x \rangle = \langle y^*, x'_2 \rangle$ et $y_{x'_1 + \lambda x'_2} = \langle x'_1 + \lambda x'_2, x \rangle = \langle y^*, x'_1 + \lambda x'_2 \rangle$. D'où la linéarité de y^* .

Montrons que $y^* \in \tilde{B}$. D'après la caractérisation des complets (voir la Proposition III.23 page 88), il nous suffit de montrer que pour tout ouvert linéaire V de B , il existe $x \in B$ tel que

$$\forall x' \in B', \langle y^*, x' \rangle = \langle \text{ev}_x, x' \rangle = \langle x', x \rangle.$$

Soit V un ouvert linéaire de B . Comme B/V est de dimension finie, on a que $V^\perp / (B^\perp \cap V^\perp)$ est de dimension finie d'après la Proposition III.43 page 102. Or

$$B^\perp = \{x' \in B' ; \forall x \in B, \langle x', x \rangle = 0\} = \{0\}$$

donc $V^\perp$ est aussi de dimension finie, notée d .

Soit $(x'_i)_{i \leq d}$ une base de $V^\perp$. D'après le Lemme III.20 page 85, il existe une famille $(x_i)_{i \leq d}$ de B telle que $\forall i, j \leq d$, $\langle x'_i, x_j \rangle = \delta_{i,j}$. Posons $x = \sum_{i=1}^d \langle y^*, x'_i \rangle x_i$. On a alors que pour tout $x' \in V^\perp$, $\langle y^*, x' \rangle = \langle x', x \rangle$, d'où $y^* \in \tilde{B}$. Or B est complet donc $y^* \in B$. □

On peut munir l'espace des fonctions continues de la topologie de la convergence uniforme sur la bornologie des linéairement bornés (voir la Définition III.12 page 103).

Lemme III.64. *Soit E un espace de Lefschetz. La famille $\tau_{\mathfrak{B}}$ des linéairement bornés de E est une bornologie linéaire.*

Démonstration. D'après la Proposition III.62(LB7) page 115, $\mathfrak{B}$ contient les sous-espace de dimension finie. D'après la Proposition III.62(LB3) page 115, $\mathfrak{B}$ est stable par somme. □

Proposition III.65. [FG64] *Soient E et F deux espaces de Lefschetz. L'espace fonctionnel $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un espace de Lefschetz lorsqu'il est muni de la topologie de la convergence uniforme $\tau_{\mathfrak{B}}$ sur les linéairement bornés engendrée par la bornologie linéaire $\mathfrak{B}$. Il admet pour système fondamental linéaire la famille*

$$\mathcal{W}(B, V) = \{f \in \mathcal{L}_c(E, F) ; f(B) \subseteq V\}$$

où $B \in \mathfrak{B}$ est linéairement borné dans E et V est un ouvert linéaire de F .

Démonstration. C'est une application directe de la Proposition III.45 page 104. □

Rappelons que pour tout espace de Lefschetz E , l'espace de Lefschetz $(E', \tau_{\mathfrak{B}})$ est le dual topologique de E muni de la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement bornés.

La proposition suivante assure que les équicontinus (voir la Définition III.18 page 120 ci-dessous) de E' sont linéairement bornés dans $(E', \tau_{\mathfrak{B}})$.

Proposition III.66 (Équicontinus linéairement bornés). *Soit E un espace de Lefschetz. Pour tout ouvert linéaire U de E , l'annulateur $U^\perp$ est linéairement borné dans $(E', \tau_{\mathfrak{B}})$.*

Démonstration. Soient U un ouvert linéaire et B un linéairement borné de E . Par définition, comme B est linéairement borné, le quotient $B/(B \cap U)$ est de dimension finie. D'après la Proposition III.43 page 102, cela implique que $U^\perp/(U^\perp \cap B^\perp)$ est de dimension finie. Comme la famille des $(B^\perp ; B \in \mathfrak{B})$ forme un système fondamental de $(E', \tau_{\mathfrak{B}})$, on en déduit que $U^\perp$ est un linéairement borné. $\square$

Linéairement équicontinus. On dit qu'un ensemble de fonctions est équicontinu lorsque toutes les fonctions on le même module de continuité.

Définition III.17. Soient E et F deux espaces de Lefschetz. Une partie M de $\mathcal{L}_c(E, F)$ est dite équicontinue lorsque pour tout ouvert linéaire V de F , il existe un ouvert linéaire U de E tel que pour tout $f \in M$, $f(U) \subseteq V$, i.e.

$$M(U) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup \{f(U) ; f \in M\} \subseteq V.$$

En se souvenant que $\mathbb{k}$ est discret, on obtient la définition des équicontinus pour le dual topologique.

Définition III.18. Soit E un espace de Lefschetz. Un sous-espace Q' de E' est dit **linéairement équicontinu** lorsqu'il existe un ouvert linéaire V de E tel que $Q' \subseteq V^\perp$. On note $\mathfrak{Q}$ la famille des linéairement équicontinus.

Proposition III.67. *Soit E un espace de Lefschetz. La famille $\mathfrak{Q}$ des sous-espaces équicontinus forme une bornologie linéaire sur E' .*

Démonstration. La famille $\mathfrak{Q}$ recouvre E' car

$$E' \subseteq \bigcup_{x' \in E'} \ker(x')^\perp$$

et pour tout $x' \in E'$, le noyau $\ker(x')$ est un ouvert linéaire de E et $x' \in \ker(x')^\perp$. Pour la stabilité par somme finie, on utilise l'inégalité de l'algèbre linéaire

$$V_1^\perp + V_2^\perp \subseteq (V_1 \cap V_2)^\perp.$$

$\square$

Le cas finitaire. Soit $A = (|A|, \mathcal{F}(A))$ un espace de finitude relationnel. Rappelons que pour tout $u \in \mathcal{F}(A)$, on note $\mathcal{K}(u) = \{x \in E_A ; |x| \subseteq u\}$ et que pour tout K sous-espace vectoriel de E_A , on note $|K| = \{a \in |A| ; \exists x \in K, x_a \neq 0\}$. D'après la Proposition III.47 page 105, la famille des sous-espaces K tels que $|K| \in \mathcal{F}(A)$ est une bornologie linéaire, dite finitaire..

La proposition suivante va nous permettre de faire le lien entre les bornologies linéairement compacte, linéairement bornée et finitaires.

Proposition III.68. *Soit A un espace de finitude relationnel. Pour tout sous-espace K de E , les trois conditions suivantes sont équivalentes*

- (i) K est linéairement compact,
- (ii) K est linéairement borné et fermé,
- (iii) $|K|$ est une partie finitaire de A et K est fermé.

Dans un espace de Lefschetz finitaire, les linéairement bornés fermés coïncident avec les linéairement compacts.

Démonstration. On va montrer (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i).

On a (i) $\Rightarrow$ (ii) car tout linéairement compact est fermé et linéairement borné d'après les Propositions III.50 (LC3) page 108 et III.62 (LC8) page 115.

Soit K un sous-espace linéairement borné et fermé de E_A . Soit $u' \in \mathcal{F}(A)^\perp$. Le sous-espace $\mathcal{V}(u')$ est un ouvert linéaire de E_A . Comme K est linéairement borné, il existe un sous-espace de dimension finie K_0 de K tel que $K = (K \cap \phi(\mathcal{V}(u'))) \oplus K_0$. Comme la dimension de K_0 est finie, $|K_0|$ est une partie finitaire de A . De plus, on a l'égalité $|K| \cap u' = |K_0| \cap u'$ dont le membre droit est une intersection d'une partie finitaire et d'une partie anti-finitaire donc finie. Nous avons donc prouvé que $|K| \in \mathcal{F}(A)$.

Soit K un sous-espace de E tel que $|K|$ est finitaire dans A . La topologie induite par E_A sur son sous-espace $\mathbb{k}^{|K|}$ est la topologie produit (voir la Proposition III.27 page 94). En effet, elle est engendrée par $\mathbb{k}^{|K|} \cap \mathcal{V}(u') = \{x \in \mathbb{k}^{|K|} ; |x| \cap u' = \emptyset\}$ avec $u' \in \mathcal{F}(A)^\perp$ et donc $|K| \cap u'$ est finie. Par la Proposition III.51 page 109 de Tychonov $\mathbb{k}^{|K|}$ est linéairement compact. Comme K est un sous-espace fermé de l'espace linéairement compact $\phi(\mathbb{k}^{|K|})$, K est aussi linéairement compact.

Soit E un espace de Lefschetz finitaire. Soit (E, ϕ, A) une carte de E . Comme ϕ est un homéomorphisme linéaire, il préserve les linéairement bornés et linéairement compacts. Ainsi, K est linéairement borné et fermé si et seulement si $\phi(K)$ est linéairement borné et fermé dans E_A si et seulement si $\phi(K)$ est linéairement compact dans E_A si et seulement si K est linéairement compact dans E . $\square$

Proposition III.69. *Soient E et F deux espaces de Lefschetz finitaires. L'espace de fonctions $\mathcal{L}_c(E, F)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les sous-espaces de support finitaire est un espace de Lefschetz finitaire.*

Démonstration. Soient (E, ϕ, A) et (F, ψ, B) des cartes respectives de E et de F . D'après la Proposition III.48 ci-dessus, il existe un homéomorphisme linéaire ϕ_0 entre $\mathcal{L}_c(E_A, E_B)$ et $E_{A \rightarrow B}$.

L'application linéaire

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_c(E, F) & \xrightarrow{\psi \circ - \circ \phi} & \mathcal{L}_c(E_A, E_B) \\ f & \mapsto & \psi \circ f \circ \phi \end{array}$$

est continue. En effet, pour tout K linéairement borné dans E_A , $\phi^{-1}K$ est linéairement borné dans E et pour tout V ouvert linéaire de E_B $\psi^{-1}V$ est un ouvert linéaire dans F . De plus l'image réciproque de $\mathcal{W}(K, V)$ par cette application est $\mathcal{W}(\phi^{-1}(K), \psi^{-1}(V))$ qui est ouvert

dans $\mathcal{L}_c(E, F)$. Comme ψ et ϕ sont des homéomorphismes linéaires, on peut appliquer ce que nous venons de prouver à ϕ^{-1} et ψ^{-1} . On en déduit que $\phi^{-1} \circ _ \circ \psi^{-1}$ est linéaire continue. C'est l'inverse de $\psi \circ _ \circ \phi$ qui est donc un homéomorphisme linéaire.

L'application linéaire

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{L}_c(E, F) & \xrightarrow{\psi \circ _ \circ \phi} & \mathcal{L}_c(E_A, E_B) & \xrightarrow{\phi_0} & E_{A \rightarrow B} \\ f & \mapsto & \psi \circ f \circ \phi & \mapsto & \phi_0(\psi \circ f \circ \phi) \end{array}$$

est donc un homéomorphisme linéaire. $\square$

Comme tout espace de Lefschetz finitaire est complet, les topologies $\tau_{\mathfrak{B}}$ et $\tau_{\mathfrak{C}}$ coïncident. On note $\neg E$ le dual topologique E' muni de l'une des deux topologies.

Proposition III.70. *Soit E un espace de Lefschetz finitaire. Le dual $\neg E$ est un espace de Lefschetz finitaire. De plus, si (E, ϕ, A) est une carte de E , alors il existe un homéomorphisme linéaire noté $\phi_{\neg}$ tel que $(\neg E, \phi_{\neg}, A^{\perp})$ soit une carte de $\neg E$.*

Démonstration. Soit E un espace de Lefschetz finitaire et (E, ϕ, A) une carte de E .

D'après la Proposition III.69 page 121, $\mathcal{L}_c(E_A, \mathbb{k}) = \neg E_A$ et $E_{A \rightarrow 1}$ sont linéairement homéomorphes. Or, dans les espaces de finitude, on a que $A \rightarrow 1 = A^{\perp}$. On en déduit l'existence d'un homéomorphisme linéaire $f : \neg E_A \rightarrow E_{A^{\perp}}$.

Comme $E_A \xrightarrow{\phi^{-1}} E$ est un homéomorphisme linéaire, $\neg E \xrightarrow{\neg \phi^{-1}} \neg E_A$ est aussi un homéomorphisme linéaire.

On en déduit l'homéomorphisme linéaire

$$\neg E \xrightarrow{\neg \phi^{-1}} \neg E_A \xrightarrow{f} E_{A^{\perp}}.$$

$\square$

Proposition III.71. *Soit A un espace de finitude relationnel. Pour tout K' sous-espace vectoriel de $\neg E_A$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) K' est linéairement borné et fermé,
- (ii) K' est linéairement compact,
- (iii) $|K'|$ est anti-finitaire dans A et K' est fermé,
- (iv) K' est linéairement équicontinu et fermé.

Soit E un espace de Lefschetz finitaire. On a équivalence entre les trois notions linéairement borné et fermé, linéairement compact et linéairement équicontinue de $\neg E$.

Démonstration. L'équivalence entre les trois premiers points est une conséquence directe des Propositions III.68 et III.70.

On montre l'équivalence entre (iii) et (iv). Si K' est fermé et $|K'|$ est anti-finitaire dans A , alors $\mathcal{V}(|K'|)$ est un ouvert linéaire de E_A (voir la Proposition III.4 page 75). Or,

$$\begin{array}{ll} \forall x' \in K', & |x'| \subseteq |K'|, \\ \text{donc} & \forall x \in \mathcal{V}(|K'|), |x| \cap |x'| = \emptyset, \\ \text{soit} & \forall x \in \mathcal{V}(|K'|), \langle x', x \rangle = 0. \end{array}$$

Ainsi, $K' \subseteq \mathcal{V}(|K'|)^\perp$ est linéairement équicontinu (voir la Définition III.17 page 120).

Réciproquement, si K' est équicontinue, alors il existe un ouvert linéaire de E_A tel que $K' \subseteq V^\perp$. Il existe donc une partie anti-finitaire u' de A telle que $\mathcal{V}(u') \subseteq V$, donc $K' \subseteq \mathcal{V}(u')^\perp$. On en déduit que $|K'| \subseteq u'$ et que $|K'|$ est anti-finitaire.

La deuxième partie de la proposition vient de la préservation des différentes bornologies linéaires par les homéomorphismes linéaires. $\square$

III.3.1.c Réflexivité et topologies du dual

Dans ce paragraphe, nous allons comparer les différentes topologies duales. Nous allons notamment voir que dans les topologies de la convergence uniforme sur les linéairement compacts et sur les linéairement bornés coïncident sur les espaces de Lefschetz complets (voir la Proposition III.74 page 124).

Ensuite nous allons étudier le problème de la réflexivité par rapport à chacune des topologies décrites au paragraphe précédent. Chacune d'entre elles apporte sa contribution à la réflexivité (voir la Proposition III.75 page 124).

Nous terminons par des exemples et contre-exemples d'espaces réflexifs. Nous verrons notamment qu'il existe des espaces de Lefschetz qui ne sont pas réflexifs par rapport à la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts (Contre-exemple III.18 page 126). Nous verrons que pour la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts, tout espace de Lefschetz séquentiel (Proposition III.79 page 127) et tout dual topologique (Proposition III.78 page 126) sont réflexifs.

Enfin, nous montrerons que les espaces de Lefschetz finitaires sont réflexifs (Corollaire III.3 page 128)

Définition III.19. Soit E un espace de Lefschetz.

Le dual topologique E' sera noté

- $\neg_{\mathfrak{D}}E$ lorsqu'il est muni de la topologie faible $\tau_{\mathfrak{D}}$.
- $\neg_{\mathfrak{C}}E$ lorsqu'il est muni de la topologie $\tau_{\mathfrak{C}}$ de la convergence uniforme sur les linéairement compacts.
- $\neg_{\mathfrak{B}}E$ lorsqu'il est muni de la topologie $\tau_{\mathfrak{B}}$ de la convergence uniforme sur les linéairement bornés.

On dit que E est **réflexif** pour la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts (resp. linéairement bornés, faible) lorsque l'évaluation ev est un homéomorphisme linéaire entre E et $\neg\neg E$ pour $\neg = \neg_{\mathfrak{C}}$ (resp. $\neg_{\mathfrak{B}}$, $\neg_{\mathfrak{D}}$)

$$\begin{aligned} \text{ev} : E &\rightarrow \neg\neg E \\ x &\mapsto \text{ev}_x : x' \mapsto \langle x', x \rangle. \end{aligned}$$

Lemme III.72. Soit E un espace de Lefschetz. Sur le dual E' , les topologies de la convergence uniforme sur les linéairement bornés ($\tau_{\mathfrak{B}}$), linéairement compacts ($\tau_{\mathfrak{C}}$), sous-espaces de dimension finie ($\tau_{\mathfrak{D}}$) sont ordonnées de la façon suivante

$$\tau_{\mathfrak{D}} \leq \tau_{\mathfrak{C}} \leq \tau_{\mathfrak{B}}.$$

Autrement dit, tout ouvert de $\tau_{\mathfrak{D}}$ est un ouvert de $\tau_{\mathfrak{C}}$ et tout ouvert de $\tau_{\mathfrak{C}}$ est un ouvert de $\tau_{\mathfrak{B}}$.

Démonstration. D'après la Proposition III.51 page 109, tout espace de dimension finie D est linéairement compact. Ainsi, tous les éléments du système fondamental $(D^\perp ; D \in \mathfrak{D})$ de $(E', \tau_{\mathfrak{D}})$ sont des ouverts linéaires de $(E', \tau_{\mathfrak{C}})$. D'après la Proposition III.62 (LB8 page 115, tout linéairement compact est linéairement borné. Nous avons en fait démontré que $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$. $\square$

Proposition III.73. *Soit E un espace de Lefschetz. Les trois opérateurs $\neg_{\mathfrak{D}}$, $\neg_{\mathfrak{C}}$ et $\neg_{\mathfrak{B}}$ sont des foncteurs contravariants sur **Lef**. De plus, on a*

$$(\neg_{\mathfrak{B}}E)' \supseteq (\neg_{\mathfrak{C}}E)' \supseteq (\neg_{\mathfrak{D}}E)'. \quad (\text{III.6})$$

Enfin, si $\neg$ est l'un des deux opérateurs $\neg_{\mathfrak{C}}$ ou $\neg_{\mathfrak{B}}$, alors l'opérateur $\neg_{\mathfrak{D}}\neg$ qui à tout espace de Lefschetz associe le dual topologique $\neg_{\mathfrak{D}}\neg E$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les équicontinus de $\neg E$ est un foncteur co-variant.

Proposition III.74. *Soit E un espace de Lefschetz complet. Les topologies de la convergence uniforme sur les linéairement compacts et sur les linéairement bornés coïncident sur E' . Dans ce cas, on note $\neg E$ le dual topologique E' muni de l'une des deux topologies.*

Démonstration. D'après la Proposition III.63 page 117, comme E est complet, un sous-espace est linéairement borné si et seulement si sa fermeture est linéairement compacte. Or la topologie de la convergence uniforme sur une bornologie linéaire $\mathfrak{S}$ est engendrée par :

$$\text{ann}_{E'}(S) ; S \in \mathfrak{S}.$$

Or, pour tout $x' \in E'$, x' étant continue, elle s'annule sur S si et seulement si elle s'annule sur sa clôture $\bar{S}$. On en déduit que pour tout linéairement borné B de E

$$\text{ann}_{E'}(B) = \text{ann}_{E'}(\bar{B}).$$

Les topologies de la convergence uniforme sur les linéairement bornés d'une part et sur les linéairement compacts d'autre part coïncide. $\square$

Proposition III.75. *Soit E un espace de Lefschetz. L'évaluation*

$$\begin{aligned} \text{ev} : E &\rightarrow \mathbb{k}^{E'} \\ x &\mapsto \text{ev}_x : x' \mapsto \langle x', x \rangle \end{aligned}$$

est une fonction linéaire injective et continue lorsque $\mathbb{k}^{E'}$ est muni de la topologie produit.

Démonstration. Soit V un ouvert linéaire de $\mathbb{k}^{E'}$. D'après la définition de la topologie produit, il existe une famille finie $(x'_i)_{i \leq d}$ d'éléments de E' tel que $\text{ann}((x'_i)_{i \leq n}) \subseteq V$. Or l'image réciproque de $\text{ann}((x'_i)_{i \leq n})$ par ev est égale à $\cap_{i \leq n} \ker(x'_i)$, donc c'est un ouvert de E en tant qu'intersection finie d'ouverts.

De plus, ev est injective. En effet, si $x \neq 0$, alors $\text{ev}_x \neq 0$ car, d'après le Lemme III.18 page 84 de séparation, il existe $x' \in E'$ tel que $\langle \text{ev}_x, x' \rangle = 1$. $\square$

Afin d'obtenir la réflexivité de la logique linéaire, i.e. l'homéomorphisme entre un espace et son deuxième dual, il nous faut équiper le dual d'une topologie telle que l'application linéaire ev soit injective, surjective continue et ouverte. L'injectivité provient du Lemme III.18 page 84 de séparation, comme nous l'avons vu à proposition précédente. La topologie $\tau_{\mathfrak{B}}$ de la convergence uniforme sur les linéairement bornés assure l'ouverture. La topologie $\tau_{\mathfrak{C}}$ de la convergence uniforme sur les linéairement compacts assure la surjectivité. Enfin, la topologie équicontinue sur le deuxième dual assure la continuité. La Proposition III.76 suivante nous permet de montrer la réflexivité lorsque les trois topologies coïncident. Les espaces *linéairement bornologiques* vérifient cette propriété. De plus, comme nous allons voir dans le paragraphe suivant, les espaces de Lefschetz finitaires sont linéairement bornologiques. C'est pourquoi, à la Section III.3.1.d, nous allons étudier les espaces linéairement bornologiques et complets.

Proposition III.76. *La fonction d'évaluation*

$$\begin{aligned} \text{ev} : E &\rightarrow \neg\neg E \\ x &\mapsto \text{ev}_x : x' \rightarrow \langle x', x \rangle \end{aligned}$$

vérifie les propriétés suivantes :

- pour la convergence uniforme sur les linéairement bornés, $\text{ev} : E \rightarrow \neg_{\mathfrak{B}}\neg_{\mathfrak{B}}E$ est injective et ouverte ;
- pour la convergence uniforme sur les linéairement compacts, $\text{ev} : E \rightarrow \neg_{\mathfrak{C}}\neg_{\mathfrak{C}}E$ est injective, surjective et ouverte ;
- Pour la convergence uniforme sur les linéairement équicontinus du dual, si $\neg$ est l'un des foncteurs $\neg_{\mathfrak{B}}$ ou $\neg_{\mathfrak{C}}$, alors $\text{ev} : E \rightarrow \neg_{\Omega}\neg E$ est injective et continue.

Démonstration. D'après la Proposition III.75 page 124 précédente, ev est linéaire injective car pour n'importe quelle topologie, $\neg\neg E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{k}^{E'}$.

On montre que ev est à valeurs dans $(\neg_{\mathfrak{B}}E)'$, on pourra alors déduire de l'Équation (III.6) qu'elle est à valeurs dans $\neg\neg E$ pour les trois foncteurs. Soit $x \in E$. Étant donné que $x^{\perp} = \ker(\text{ev}_x)$ et que $\mathbb{k} \cdot x$ est linéairement borné dans E , $x^{\perp}$ est ouvert dans $\neg_{\mathfrak{B}}E$, d'où la continuité de ev_x .

Soit U un ouvert linéaire de E . D'après la Proposition III.59 page 113 (resp. la Proposition III.66 page 120), $U^{\perp}$ est linéairement compact dans $\neg_{\mathfrak{C}}E$ (resp. linéairement borné dans $\neg_{\mathfrak{B}}E$). Donc $U^{\perp\perp}$ est un ouvert de $\neg_{\mathfrak{C}}\neg_{\mathfrak{C}}E$ (resp. de $\neg_{\mathfrak{B}}\neg_{\mathfrak{B}}E$). Ceci prouve que ev est ouverte pour la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts (resp. linéairement bornés).

Soit $\phi \in \neg_{\mathfrak{C}}\neg_{\mathfrak{C}}E$ supposée non-nulle. Par continuité de ϕ , $\ker(\phi)$ est un ouvert. Comme $\phi \neq 0$, il existe $x' \in E'$ tel que $\langle \phi, x' \rangle = 1$ d'où $x' \notin \ker(\phi)$. Comme de plus $\ker(\phi)$ est fermé (car c'est un sous-espace ouvert) et par la Proposition III.58 page 113 de séparation dans $\neg_{\mathfrak{C}}E$, il existe $x \in E$ tel que $x \in {}^{\perp}\ker(\phi)$ et $\langle x', x \rangle = 1$. Comme ϕ et ev_x coïncident sur $\ker(\phi)$ et x' , ils sont égaux. Ceci montre que ev est surjective sur $\neg_{\mathfrak{C}}\neg_{\mathfrak{C}}E$.

Soit V un ouvert linéaire de $\neg_{\Omega}\neg E$. Par définition de la topologie de la convergence uniforme sur les équicontinus, il existe un sous-espace vectoriel équicontinu Q' de E' tel que $Q'^{\perp} \subseteq V$. D'après la Définition des équicontinus III.18 page 120, il existe un ouvert linéaire de E tel que $Q' \subseteq U^{\perp}$. On en déduit que $\text{ev}(U) \subseteq V$, d'où la continuité de ev sur $\neg_{\Omega}\neg E$. $\square$

Fait III.77. *Un espace de Lefschetz E est réflexif pour la topologie de la convergence sur les linéairement compacts si et seulement si pour tout K' linéairement compact de $\neg_{\mathcal{C}}E$, ${}^{\perp}K'$ est un ouvert linéaire de E .*

La topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts assure presque la réflexivité, ev est un isomorphisme ouvert. Pourtant en général, il n'est pas continu comme le montre l'exemple suivant.

Contre-Exemple III.18. Supposons que $\mathbb{k}$ est dénombrable.

On considère $\mathcal{C} = \mathbb{k}^{(\mathbb{N})}$ l'espace des suites finies à valeurs dans $\mathbb{k}$ muni de la topologie engendrée par le système fondamental formé des sous-espaces vectoriels de codimension finie.

Le dual topologique de $\mathcal{C}$ est l'espace $\mathcal{P} = \mathbb{k}^{\mathbb{N}}$ des suites quelconques à valeurs dans $\mathbb{k}$ et muni de la topologie produit.

En effet, $\mathcal{P}$ admet comme système fondamental les annulateurs des linéairement compacts de $\mathcal{C}$. Soit K un linéairement compact de $\mathcal{C}$. D'après la Proposition III.51 page 109 de Tychonov, il existe I fini ou dénombrable tel que C est isomorphe à $\mathbb{k}^I$. Or, si I est dénombrable, $\mathbb{k}^I$ n'est pas dénombrable, donc C est un sous-espace non dénombrable de $\mathbb{k}^{(\mathbb{N})}$, ce qui contredit le fait que l'espace des suites finies sur un ensemble dénombrable est dénombrable. On en déduit que C est isomorphe à $\mathbb{k}^I$ pour I fini, donc C est de dimension finie. Ainsi, la topologie sur $\mathcal{P}$ admet pour système fondamental les annulateurs des sous-espaces de dimension finie de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire les sous-espaces de codimension finie. Cette topologie est équivalente à la topologie produit.

Or le dual topologique de $\mathcal{P}$ est $\mathbb{k}^{(\mathbb{N})}$ muni de la topologie discrète. En effet, $\mathbb{k}^{\mathbb{N}}$ est linéairement compact, d'après la Proposition III.60 page 114. Ainsi, $\{0\}$ est ouvert dans $\mathbb{k}^{(\mathbb{N})}$. Or $\text{ev}^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ n'est pas ouvert dans $\mathcal{C}$ car il ne contient pas de sous-espace de codimension finie. On a donc montré que ev n'est pas continue.

Il y a pourtant des situations où la réflexivité est assurée.

Le cas du dual.

Proposition III.78. [Bar76] *Pour tout espace de Lefschetz E , le dual topologique $\neg_{\mathcal{C}}E$, muni de la topologie uniforme sur les linéairement compacts, est réflexif.*

Démonstration. D'après la Proposition III.76 page 125,

$$\begin{aligned} \text{ev}_E : E &\rightarrow \neg_{\mathcal{C}}\neg_{\mathcal{C}}E, \\ \text{ev}_{\neg_{\mathcal{C}}E} : \neg_{\mathcal{C}}E &\rightarrow \neg_{\mathcal{C}}\neg_{\mathcal{C}}(\neg_{\mathcal{C}}E) \end{aligned}$$

sont des isomorphismes ouverts. On en déduit que la fonction

$$\neg_{\mathcal{C}}\text{ev} : \neg_{\mathcal{C}}\neg_{\mathcal{C}}\neg_{\mathcal{C}}E \rightarrow \neg_{\mathcal{C}}E$$

est un isomorphisme continu réciproque de $\text{ev}_{\neg_{\mathcal{C}}E}$. □

Le cas séquentiel. Un espace vectoriel topologique est séquentiel lorsque les ouverts sont caractérisés par la convergence des suites.

Définition III.20. Soit E un espace de Lefschetz.

Un sous-espace vectoriel V de E est dit **séquentiellement ouvert** lorsque pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ qui converge vers 0, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, \{x_n ; n \geq p\} \cap V \neq \emptyset.$$

Un espace de Lefschetz E est dit **séquentiel** lorsque tout sous-espace séquentiellement ouvert est ouvert.

Proposition III.79. *Tout espace de Lefschetz séquentiel est réflexif pour la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts.*

Démonstration. Soit E un espace de Lefschetz séquentiel. Nous savons d'ores et déjà que $\text{ev}_E : E \rightarrow \neg_{\mathcal{C}} \neg_{\mathcal{C}} E$ est un isomorphisme ouvert. Il nous suffit de montrer qu'il est continu. Soit K' un linéairement compact de $\neg_{\mathcal{C}} E$. Montrons que ${}^{\perp} K'$ est ouvert dans E . On aura alors montré que l'image réciproque ${}^{\perp} K'$ par ev_E de tout élément $K'^{\perp}$ du système fondamental de $\neg_{\mathcal{C}} \neg_{\mathcal{C}} E$ est un ouvert linéaire de E . Utilisons la caractérisation séquentielle des ouverts linéaires de E et raisonnons par l'absurde.

Supposons qu'il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers 0 et p tels que $\{x'_n ; n \geq p\} \cap {}^{\perp} K' = \emptyset$, c'est-à-dire

$$\forall n \geq p, \exists x'_n \in K', \langle x'_n, x_n \rangle \neq 0.$$

Quitte à multiplier x'_n par un coefficient, on peut supposer que pour tout $n \geq p$, $\langle x'_n, x_n \rangle = 1$.

On va construire $(y'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite extraite de $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite extraite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \langle y'_n, y_n \rangle = 1 \text{ et } \forall p > n, \langle y'_n, y_p \rangle = 0. \quad (\text{III.7})$$

On pose $y'_1 = x'_1$ et $y_1 = x_1$ ils vérifient bien (III.7) pour le rang 1. On suppose que l'on a construit y'_n et y_n jusqu'au rang p qui vérifient (III.7). Comme y'_p est continue et x'_n converge vers 0, $\langle y'_p, x_n \rangle$ converge vers 0 dans $\mathbb{k}$. Or $\mathbb{k}$ est discret donc $\langle y'_p, x_n \rangle$ est stationnaire (voir la Proposition III.12 page 78), on note n_p le rang à partir duquel $\langle y'_p, x_n \rangle = 0$. Alors $y'_{p+1} = x'_{n_p}$ et $y_{p+1} = x'_{n_p}$ et vérifient (III.7).

On va maintenant construire $(z'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que

$$\forall n \geq p, \langle z'_n, y_p \rangle = 1. \quad (\text{III.8})$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(\lambda_i^n)_{i \leq n} \in \mathbb{k}^n$. On pose $z'_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i^n y'_i$ et on cherche à résoudre l'équation

en λ_i^n pour obtenir (III.8). On résout le système à n inconnues, les λ_i^n et n équations suivant.

$$\begin{aligned} \langle z'_n, y_n \rangle &= \sum_{i \leq n} \lambda_i^n \langle y'_i, y_n \rangle = \lambda_n^n = 1 \\ \langle z'_n, y_{n-1} \rangle &= \sum_{i \leq n} \lambda_i^n \langle y'_i, y_{n-1} \rangle = \langle y'_n, y_{n-1} \rangle + \lambda_{n-1}^n = 1 \text{ donc } \lambda_{n-1}^n = 1 - \langle y'_n, y_{n-1} \rangle \\ &\dots \\ \langle z'_n, y_1 \rangle &= \sum_{i \leq n} \lambda_i^n \langle y'_i, y_1 \rangle = \sum_{i=2}^n \lambda_i^n \langle y'_i, y_1 \rangle + \lambda_1^n = 1. \end{aligned}$$

C'est un système triangulaire, il admet donc une solution.

Pour tout p , on pose $G'_p = \overline{\text{aff}}(z'_n \mid n \geq p)$. La famille des $(G'_p ; p \in \mathbb{N})$ est un filtre de sous-espaces affines fermés de K' . Comme K' est linéairement compact, $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} G'_p \neq \emptyset$. Soit $x' \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} G'_p$. En particulier, $x' \in G'_p$ donc x' est linéaire continue et pour tout $n \leq p$, $\langle x', y_n \rangle = 1$ (car G'_p est la clôture affine fermée des z'_n pour $n \geq p$).

Or y_n est une suite extraite de x_n qui converge vers 0. On en déduit que y_n converge vers 0 et que $\langle x', y_n \rangle$ converge vers 0 ce qui contredit le fait que pour tout n , $\langle x', y_n \rangle = 1$.

On en déduit que ${}^\perp K'$ est un ouvert séquentiel de E et donc est un ouvert. $\square$

Le cas finitaire. Comme les espaces de Lefschetz finitaires sont complets (voir la Proposition III.25 page 90), les linéairement compacts, linéairement bornés fermés coïncident, on a égalité entre les foncteurs $\neg_{\mathcal{C}}$ et $\neg_{\mathcal{B}}$ que l'on note $\neg$. De plus, ev est un isomorphisme ouvert (voir la Proposition III.76 page 125). Dans l'espace de Lefschetz finitaire, $\neg E$, linéairement compacts et linéairement équicontinus fermés coïncident, on en déduit la continuité de l'évaluation (voir la Proposition III.76 page 125). L'évaluation est donc un homéomorphisme linéaire. On déduit la réflexivité des espaces de Lefschetz finitaires.

Corollaire III.3. [Ehr05] *Tout espace de Lefschetz finitaire est réflexif et complet.*

III.3.1.d Linéairement bornologiques, une solution à la réflexivité

Dans ce paragraphe, nous proposons une classe d'espaces de Lefschetz qui sont réflexifs et nous montrons que cette classe est stable par les opérations additives de la logique linéaire et par la négation.

Bien que n'étant pas référencée, cette généralisation s'inspire d'idées bien connues en topologie⁹ et les adapte au cadre linéarisé des espaces de Lefschetz. En effet, dans le prélude, nous avons vu que toute topologie engendre une bornologie et réciproquement, toute bornologie engendre une topologie (voir page 27). Nous allons introduire une version linéarisée des linéairement bornivores. La topologie linéaire engendrée par la bornologie formée par les linéairement bornés est alors la topologie admettant comme système fondamental la famille des linéairement bornivores. Un espace de Lefschetz qui est linéairement bornologique est l'équivalent linéaire des espaces vectoriels topologico-bornologiques décrits dans le prélude.

⁹Le lecteur intéressé peut se référer à [Jar81, HN77] pour une description dans le cadre des espaces localement convexes et à [FK88] pour un point de vue catégorique sur ces idées.

Les résultats que nous allons établir dans ce paragraphe sont résumés dans la Figure III.1.

La notion de sous-espace linéairement bornivore d'un espace de Lefschetz est introduite à la Définition III.21 page 131. La notion d'espace de Lefschetz linéairement bornologique est introduite à la Définition III.22 page 131.

Soit E un espace de Lefschetz.

- Si E est complet, alors les topologies de la convergence uniforme sur les linéairement compacts et linéairement bornés coïncident. En particulier, $\neg E$ désigne le dual topologique muni de l'une de ces topologies. (Proposition III.74 page 124)
- E est linéairement bornologique et complet si et seulement s'il est réflexif. (Théorème III.5 page 133)
- Si E est linéairement bornologique et complet, alors $\neg E$ est linéairement bornologique et complet. (Proposition III.87 page 133)
- Si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille d'espaces linéairement bornologiques et complets, alors $\bigoplus_{i \in I} E_i$ et $\prod_{i \in I} E_i$ sont linéairement bornologiques et complets. (Proposition III.91 page 134)

FIG. III.1: Résultats sur les linéairement bornologiques complets

Introduction. Nous avons vu que les espaces de Lefschetz finitaires étaient réflexifs. Afin de comprendre d'où vient cette réflexivité, récapitulons les différents résultats que nous avons établis dans le cas des espaces de Lefschetz engendrés par des espaces de finitude.

Soit A un espace de finitude relationnel. Rappelons la Notation III.5 page 74 :

$$\begin{cases} \mathcal{K}(u)_A &= \{x; |x| \subseteq u\}, u \in \mathcal{F}(A), \\ \mathcal{V}(u')_A &= \{x; |x| \cap u' = \emptyset\}, u' \in \mathcal{F}(A)^\perp. \end{cases}$$

- La topologie de E_A est co-engendrée par les supports anti-finitaires (Proposition III.4 page 75), c'est-à-dire que :

$$V \text{ ouvert linéaire dans } E_A \iff \exists u' \in \mathcal{F}(A)^\perp; \mathcal{V}(u') \subseteq V$$

- Les linéairement bornés de E_A sont les sous-espaces de support finitaire (Proposition III.71 page 122), c'est-à-dire que :

$$B \text{ linéairement borné dans } E_A \iff \exists u \in \mathcal{F}(A); B \subseteq \mathcal{K}(u).$$

- Les espaces de Lefschetz E'_A et $E_{A^\perp}$ sont linéairement homéomorphes. Modulo cet homéomorphisme, on a la correspondance (Propositions III.22 page 86) :

$$\forall u' \in \mathcal{F}(A)^\perp, \mathcal{V}(u')_A^\perp = \mathcal{K}(u')_{A^\perp} \text{ et } \forall u \in \mathcal{F}(A), \mathcal{K}(u)_A^\perp = \mathcal{V}(u)_{A^\perp}.$$

En prenant l'orthogonal de ces égalités et en remarquant que $\mathcal{V}(u')$ et $\mathcal{K}(u)$ sont fermés, on déduit de la Proposition III.19 page 84 la correspondance :

$$\forall u' \in \mathcal{F}(A)^\perp, \mathcal{V}(u')_A = {}^\perp \mathcal{K}(u')_{A^\perp} \text{ et } \forall u \in \mathcal{F}(A), \mathcal{K}(u)_A = {}^\perp \mathcal{V}(u)_{A^\perp}.$$

Soient $u \in \mathcal{F}(A)$ et $u' \in \mathcal{F}(A^\perp)$. Si B, V sont des sous-espaces de E_A et B' et V' sont des sous-espaces $E_{A^\perp}$ tels que					
	E_A	$\neg_{\mathfrak{B}} E_A \simeq E_{A^\perp}$		E_A	$E'_A \simeq E_{A^\perp}$
linéairement borné	$B \subseteq \mathcal{K}(u)_A$	$B' \subseteq \mathcal{K}(u')_{A^\perp}$	alors,	${}^\perp V' \subseteq \mathcal{K}(u)_A$	$V^\perp \subseteq \mathcal{K}(u')_{A^\perp}$
ouvert linéaire	$\mathcal{V}(u')_A \subseteq V$	$\mathcal{V}(u)_{A^\perp} \subseteq V'$		$\mathcal{V}(u')_A \subseteq {}^\perp B'$	$\mathcal{V}(u)_{A^\perp} \subseteq B^\perp$

TAB. III.1: Description de la dualité ouverts linéaires versus linéairement bornés dans un espace de Lefschetz engendré par un espace de finitude

Si B et V sont des sous-espaces de E et B' et V' sont des sous-espaces de E' tels que					
	E	$\neg_{\mathfrak{B}} E$		E	$\neg_{\mathfrak{B}} E$
linéairement borné	B	B'	alors,	linéairement borné	$?$ $V^\perp$ (Prop. III.66)
ouvert linéaire	V	V'		ouvert linéaire	$?$ $B^\perp$ (Prop III.65)

TAB. III.2: Relation entre les ouverts linéaires et les linéairement bornés d'un espace de Lefschetz E

De ces résultats, nous déduisons qu'il existe dans les espaces de Lefschetz finitaires, une dualité (résumée dans la Figure III.1) entre les linéairement bornés dont le support est finitaire, et les ouverts linéaires qui sont définis par rapport aux anti-finitaires (autrement dit finitaires dans le dual).

Par contre, dans les espaces de Lefschetz, seule une partie de cette dualité est vérifiée. La Figure III.2 page 130 montre les relations que nous avons prouvées entre linéairement bornés et ouverts linéaires. Lorsque l'on regarde le détail des preuves, on s'aperçoit que ces relations proviennent de la Proposition III.43 page 102 qui assure que dans un espace de Lefschetz E : « pour tous B et V sous-espaces vectoriels de E , si $B/(B \cap V)$ est de dimension finie, alors $V^\perp/(V^\perp \cap B^\perp)$ est de dimension finie. »

Nous allons généraliser les relations entre ouverts linéaires et linéairement bornés que l'on retrouve dans les espaces de Lefschetz finitaires. Nous allons notamment introduire une notion de linéairement bornivore dont l'intersection avec n'importe quel linéairement borné est de codimension finie dans ce linéairement borné. Nous allons nous appuyer sur la deuxième partie de la Proposition III.43 page 102 qui assure que dans un espace de Lefschetz « pour tous B' et V' sous-espaces vectoriels de E' , si $B'/(B' \cap V')$ est de dimension finie, alors ${}^\perp V'/({}^\perp V' \cap {}^\perp B')$ est de dimension finie. »

Dans la Figure III.3 page 131, nous récapitulons la dualité entre les linéairement bornés et les bornivores linéaires, que nous allons établir dans ce paragraphe.

Si B et V sont des sous-espaces de E et B' et V' sont des sous-espaces de E' tels que					
	E	$\neg_{\mathfrak{B}} E$		E	$\neg_{\mathfrak{B}} E$
linéairement borné	B	B'	alors,	${}^{\perp} V'$ (Prop III.85)	$V^{\perp}$ (Prop III.83)
linéairement bornivore	V	V'		${}^{\perp} B'$ (Prop III.84)	$B^{\perp}$ (Prop III.82)

TAB. III.3: Relation entre les **bornivores** linéaires et les linéairement bornés d'un espace de Lefschetz E

Définition. Rappelons que les linéairement bornés sont définis par rapport aux ouverts linéaires (voir la Définition III.16 page 115). De façon symétrique, les linéairement bornivores sont définis par rapport aux linéairement bornés.

Définition III.21. Soit E un espace de Lefschetz. Un sous-espace U de E est dit **linéairement bornivore** lorsque pour tout linéairement borné B , le quotient $B/(B \cap U)$ est de dimension finie.

Remarquons que tout ouvert est bien sûr linéairement bornivore.

Proposition III.80. Soit E un espace de Lefschetz. La famille des linéairement bornivores fermés forme un système fondamental d'une topologie linéaire sur E plus fine que la topologie de départ.

Définition III.22. Un espace de Lefschetz **linéairement bornologique** est un espace dans lequel tous les linéairement bornivores fermés sont ouverts.

Un exemple fondamental, le cas finitaire.

Proposition III.81. Dans un espace de Lefschetz finitaire, tout linéairement bornivore fermé est ouvert.

Démonstration. En effet, la notion de bornivore est stable par homéomorphisme linéaire. Il suffit donc de le montrer pour tout espace de Lefschetz engendré par un espace de finitude relationnel A .

Soit V un bornivore fermé de E_A . Pour tout $u \in \mathcal{F}(A)$, $\mathcal{K}(u)/\mathcal{K}(u) \cap V$ est de dimension finie. On en déduit que $V^{\perp}/V^{\perp} \cap \mathcal{K}(u)^{\perp}$ est de dimension finie d'après la Proposition III.43 page 102. Or, d'après les Propositions III.22 page 86 et la réflexivité $A^{\perp\perp} = A$, on a l'égalité $\mathcal{K}(u)^{\perp}_A = \mathcal{V}(u)_{A^{\perp}}$. De plus, $\mathcal{V}(u)_{A^{\perp}}$ est un ouvert linéaire de $E_{A^{\perp}} \simeq \neg E_A$. On en déduit que $V^{\perp}$ est linéairement borné dans $E_{A^{\perp}}$. D'après la Proposition III.71 page 122, $v' = |V^{\perp}| \in \mathcal{F}(A)^{\perp}$. Pour finir, on vérifie que $\mathcal{V}(v') \subseteq V$. Pour tout $x \in \mathcal{V}(v')$, $|x| \cap v' = \emptyset$. Or pour tout $x' \in V^{\perp}$, $|x'| \subseteq v'$, donc $\langle x', x \rangle = \sum_{a \in |A|} x'_a x_a = \sum_{a \in |x'| \cap |x|} x'_a x_a = 0$. On en déduit que $\mathcal{V}(v') \subseteq {}^{\perp} V^{\perp}$. Comme V est fermé dans E_A , on a ${}^{\perp} V^{\perp} = V$ (voir la Proposition III.19 page 84) ce qui permet de conclure. $\square$

Corollaire III.4. Tout espace de Lefschetz finitaire est linéairement bornologique.

Propriétés de dualité. Les propositions qui suivent permettent de montrer les relations résumées à la Figure III.3 page 131 qui existent entre les linéairement bornivores et les linéairement bornés d'un espace et de son dual topologique. C

Proposition III.82. *Soit E un espace de Lefschetz. Pour tout linéairement borné B de E , l'orthogonal $B^\perp$ est linéairement bornivore dans $\neg_{\mathfrak{B}}E$.*

Démonstration. Comme nous l'avons déjà fait remarqué, un ouvert linéaire est un linéairement bornivore. Or la topologie de $\neg_{\mathcal{C}}E$ est engendrée par les $B^\perp$ pour B linéairement borné dans E . Donc $B^\perp$ est un ouvert linéaire de $\neg_{\mathcal{C}}E$ et par conséquent un linéairement bornivore. $\square$

À la Proposition III.66 page 120, nous avons montré que l'annulateur $V^\perp$ d'un ouvert linéaire V d'un espace de Lefschetz E est linéairement borné dans $\neg_{\mathfrak{B}}E$, c'est-à-dire E' muni de la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement bornés. La démonstration utilise le fait que tout ouvert linéaire est bornivore.

Proposition III.83. *Soit E un espace de Lefschetz. Pour tout linéairement bornivore V de E , l'orthogonal $V^\perp$ est linéairement borné dans $\neg_{\mathfrak{B}}E$.*

Démonstration. Soit $V \subseteq E$ un linéairement bornivore. Montrons que $V^\perp$ est linéairement borné dans $\neg_{\mathfrak{B}}E$. Soit V' un ouvert de $\neg_{\mathfrak{B}}E$. Comme $\neg_{\mathfrak{B}}E$ est E' muni de la convergence uniforme sur les linéairement bornés, il existe B sous-espace linéairement borné de E tel que $B^\perp \subseteq V'$. Comme B est linéairement borné et V est un ouvert linéaire de E , le quotient $B/(B \cap V)$ est de dimension finie. D'après la Proposition III.43 page 102, on en déduit que $V^\perp/B^\perp \cap V^\perp$ est lui aussi de dimension finie. Comme $B^\perp \subseteq V'$, on a $B^\perp \cap V^\perp \subseteq V' \cap V^\perp$. On en déduit un plongement de $V^\perp/V' \cap V^\perp$ dans $V^\perp/B^\perp \cap V^\perp$, donc $V^\perp/V' \cap V^\perp$ est lui aussi de dimension finie. On a donc bien montré que $V^\perp$ est linéairement borné. $\square$

Proposition III.84. *Soit E un espace de Lefschetz. Si B' est linéairement borné dans $\neg_{\mathfrak{B}}E$, alors ${}^\perp B'$ est un linéairement bornivore de E .*

Démonstration. Soit B' un linéairement borné de $\neg_{\mathfrak{B}}E$. Pour tout linéairement borné B de E , $B^\perp$ est un ouvert linéaire de $\neg_{\mathfrak{B}}E$. Par définition, le quotient $B'/(B' \cap B^\perp)$ est de dimension finie. D'après la Proposition III.43 page 102, $B/(B \cap {}^\perp B')$ est de dimension finie. On en déduit que ${}^\perp B'$ est linéairement bornivore dans E . $\square$

Proposition III.85. *Soit E un espace de Lefschetz. Si V' est linéairement bornivore dans $\neg_{\mathfrak{B}}E$, alors ${}^\perp V'$ est linéairement borné dans E .*

Démonstration. Soit V' un linéairement bornivore de $\neg_{\mathfrak{B}}E$. D'après la Proposition III.83, $V^\perp$ est linéairement borné dans $\neg_{\mathfrak{B}}E$. Par définition, le quotient $V^\perp/(V^\perp \cap V')$ est de dimension finie. D'après la Proposition III.43 page 102, le quotient ${}^\perp V'/({}^\perp V' \cap V)$ est de dimension finie. On en déduit que ${}^\perp V'$ est linéairement borné dans E . $\square$

Caractérisation de la réflexivité par les bornologies. Nous allons maintenant caractériser la réflexivité pour la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement bornés en termes d'espaces bornologiques et de complétude. D'autres caractérisations ont été établies par Köthe [Köt79] et par Barr [Bar76] pour la réflexivité par rapport à la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts. Notre caractérisation a l'avantage de généraliser le cadre des espaces topologico-bornologiques et de s'énoncer clairement. Ceci semble indiquer que nous avons choisi la bonne topologie pour l'espace des fonctions.

Théorème III.5. *Un espace de Lefschetz est réflexif pour la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement bornés si et seulement s'il est linéairement bornologique et complet.*

Démonstration. Le sens direct de l'implication est démontré à la Proposition III.88 page 134 et le sens réciproque à la Proposition III.90 page 134. $\square$

Lemme III.86. *Soit E un espace de Lefschetz bornologique. Le dual $\neg_{\mathfrak{B}}E$ est complet.*

Démonstration. Soit $(x'_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ un réseau de Cauchy de $\neg_{\mathfrak{B}}E$, i.e.

$$\forall B \in \mathfrak{B}, \exists \gamma_B, \forall \alpha, \beta \geq \gamma_B, \forall x \in K, \langle x'_\alpha, x \rangle = \langle x'_\beta, x \rangle.$$

Rappelons en effet que la topologie de $\neg_{\mathfrak{B}}E$ est engendrée par les ouverts linéaires de la forme $B^\perp$ pour $B \in \mathfrak{B}$ linéairement borné.

Pour tout $x \in E$, la droite $\mathbb{k} \cdot x$ est de dimension finie donc linéairement bornée. Il existe donc γ_x tel que $\forall \alpha, \beta \geq \gamma_x, \langle x'_\alpha, x \rangle = \langle x'_\beta, x \rangle$. On définit $x' \in E^*$ par $\langle x', x \rangle = \langle x'_{\gamma_x}, x \rangle$.

Vérifions que la définition de x' ne dépend pas de γ_x . Soit γ' un autre indice tel que $\forall \alpha \geq \gamma', \langle x'_\alpha, x \rangle = \langle x'_{\gamma'}, x \rangle$. Comme Γ est un ensemble filtrant (voir la définition des réseaux de Cauchy au Paragraphe III.1.5 page 88), il existe $\alpha \geq \gamma', \gamma_x$. De $\alpha \geq \gamma'$, on déduit $\langle x'_\alpha, x \rangle = \langle x'_{\gamma'}, x \rangle$ et de $\alpha \geq \gamma_x$, on déduit $\langle x'_\alpha, x \rangle = \langle x'_{\gamma_x}, x \rangle$. Donc $\langle x'_{\gamma'}, x \rangle = \langle x'_{\gamma_x}, x \rangle$.

Vérifions que x' est continue en montrant que sont noyau $\ker(x')$ est un bornivore.

Soit B un linéairement borné de E . Il existe γ_B tel que pour tout $x \in B$, on a $\langle x', x \rangle = \langle x'_{\gamma_B}, x \rangle$, d'où $\ker(x') \cap B = \ker(x'_{\gamma_B}) \cap B$. Comme $\ker(x'_{\gamma_B})$ est un ouvert linéaire de E , on en déduit que $B/\ker(x'_{\gamma_B}) \cap B$ est de dimension finie, puis que $\ker(x')$ est bornivore et x' est continue. On vérifie facilement que le réseau de Cauchy $(x'_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ converge vers x' . $\square$

Proposition III.87. *Soit E un espace de Lefschetz bornologique et complet. Son dual $\neg E$ est complet et bornologique.*

Démonstration. Rappelons que d'après la Proposition III.74 page 124, $\neg_{\mathfrak{B}}E = \neg_{\mathcal{C}}E$ et on les note $\neg E$.

La complétude de $\neg E$ vient d'être prouvée au Lemme III.86 ci-dessus. Montrons que $\neg E$ est linéairement bornologique. Soit V' bornivore de $\neg E$. D'après le Lemme III.83 ci-dessus, pour tout ouvert linéaire V de E , $V^\perp$ est linéairement borné dans $\neg E = \neg_{\mathfrak{B}}E$. D'après la définition des bornivores, $V^\perp/V^\perp \cap V'$ est de dimension finie. Or d'après la Proposition III.43 page 102, cela implique que ${}^\perp V'/{}^\perp V' \cap {}^\perp(V^\perp)$ est de dimension finie. Comme V est un ouvert linéaire de E , on a ${}^\perp(V^\perp) = V$ d'après la Proposition III.7 page 77. D'où ${}^\perp V'/{}^\perp V' \cap V$ est de dimension finie. On en déduit que ${}^\perp V'$ est linéairement borné dans E . Or, $({}^\perp V')^\perp = V'$, car V' est fermé dans $\neg E = \neg_{\mathcal{C}}E$ et d'après la Proposition III.58 page 113. On en déduit que V' est un ouvert linéaire de $\neg E$. $\square$

Proposition III.88. *Tout espace de Lefschetz complet et linéairement bornologique est réflexif pour la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement bornés.*

Démonstration. Soit E un espace de Lefschetz complet et linéairement bornologique.

D'après le Lemme III.86), $\neg E$ est complet et bornologique. On en déduit que linéairement compacts et linéairement bornés fermés coïncident dans E et $\neg E$, d'où $\neg\neg E = \neg_{\mathcal{C}}\neg_{\mathcal{C}}E = \neg_{\mathfrak{B}}\neg_{\mathfrak{B}}E$.

D'après la Proposition III.76 page 125, $\text{ev} : E \rightarrow \neg_{\mathcal{C}}\neg_{\mathcal{C}}E$ est un isomorphisme ouvert, il nous suffit donc de montrer que l'évaluation est continue pour montrer que E est homéomorphe à son deuxième dual.

Soit V^* un ouvert linéaire de $\neg\neg E$. Par définition de la topologie, il existe B' un linéairement borné et fermé de $\neg E$ tel que $B'^{\perp} \subseteq V^*$. D'après la Proposition III.84 page 132, ${}^{\perp}B'$ est un bornivore de E . Comme E est linéairement bornologique, ${}^{\perp}B'$ est un ouvert linéaire de E . Or $\text{ev}({}^{\perp}B') = B'^{\perp} \subseteq V^*$. On en déduit que ${}^{\perp}B' \subseteq \text{ev}^{-1}(V^*)$, d'où continuité de ev et la réflexivité de E . $\square$

Lemme III.89. *Soit E un espace de Lefschetz. Si E est réflexif pour la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement bornés, alors E est linéairement bornologique.*

Démonstration. Soit E un espace de Lefschetz réflexif pour $\neg_{\mathfrak{B}}$.

Montrons que E est linéairement bornologique, c'est-à-dire que tout linéairement bornivore fermé de E est un ouvert linéaire.

Soit V un bornivore fermé de E . D'après la Proposition III.85 page 132 $V^{\perp}$ est linéairement borné dans $\neg_{\mathfrak{B}}E$ et $V^{\perp\perp}$ est un ouvert linéaire de $\neg_{\mathfrak{B}}\neg_{\mathfrak{B}}E$.

Or par réflexivité, ev est un homéomorphisme linéaire entre $\neg_{\mathfrak{B}}\neg_{\mathfrak{B}}E$ et E . De plus, $V^{\perp\perp} = \text{ev}({}^{\perp}(V^{\perp})) = \text{ev}(V)$ car V est supposé fermé (voir la Proposition III.19 page 84).

En résumé, on a $V = \text{ev}^{-1}(V^{\perp\perp})$, $V^{\perp\perp}$ est un ouvert de $\neg_{\mathfrak{B}}\neg_{\mathfrak{B}}E$ et ev est un homéomorphisme. On en déduit que V est ouvert dans E . $\square$

Proposition III.90. *Soit E un espace de Lefschetz. Si E est réflexif pour la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement bornés, alors E est linéairement bornologique et complet.*

Démonstration. Soit E un espace de Lefschetz réflexif pour $\neg_{\mathfrak{B}}$.

Montrons que E est complet. Comme par réflexivité de E , on a un homéomorphisme linéaire $E \simeq \neg_{\mathfrak{B}}\neg_{\mathfrak{B}}E$ dont on déduit l'homéomorphisme linéaire $\neg_{\mathfrak{B}} \simeq \neg_{\mathfrak{B}}\neg_{\mathfrak{B}}\neg_{\mathfrak{B}}E$. Ainsi, $\neg_{\mathfrak{B}}E$ est réflexif et d'après le Lemme III.89 précédent, $\neg_{\mathfrak{B}}E$ est linéairement bornologique. D'après le Lemme III.86 page 133, comme $\neg_{\mathfrak{B}}E$ est linéairement bornologique, $\neg_{\mathfrak{B}}\neg_{\mathfrak{B}}E$ est complet. $\square$

Pour le moment, on ne sait pas si cette famille est stable par espace de fonctions. Par contre la structure additive préserve la famille des linéairement bornologiques complets.

Proposition III.91. *La famille des espaces de Lefschetz complets et linéairement bornologiques est stable par produits et co-produits finis.*

Démonstration. Rappelons que le produit et le co-produit d'espaces de Lefschetz complets est complet (voir les Propositions III.28 page 94 et III.32 page 97).

Commençons par caractériser les linéairement bornés du produit. Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces linéairement bornologiques. Un sous-espace B de $\prod_{i \in I} E_i$ est linéairement borné si et seulement si pour tout $i \in I$, sa projection $\Pi_i(B)$ est linéairement bornée. Le sens direct vient du fait que pour chaque $i \in I$, la projection est continue et le caractère linéairement borné est préservé par les fonctions linéaires continues (voir (LB6) de la Proposition III.62 page 115). Pour la réciproque, remarquons que $B \subseteq \prod_{i \in I} \overline{\Pi_i(B)}$, or comme pour tout $i \in I$, E_i est complet, si $\Pi_i(B)$ est linéairement borné, sa fermeture $\overline{\Pi_i(B)}$ est donc linéairement compacte (voir la Proposition III.63 page 117). Le produit quelconque de linéairement compacts étant linéairement compact (voir la Proposition III.51 page 109), le produit $\prod_{i \in I} \overline{\Pi_i(B)}$ est linéairement compact et donc linéairement borné (voir la Proposition III.63 page 117). Comme la famille des linéairement bornés est stable par inclusion, on en déduit que B est linéairement borné (voir (LB1) de la Proposition III.62 page 115).

Dans le co-produit, commençons par montrer que si V est un sous-espace bornivore de $\oplus_{i \in I} E_i$, alors pour tout $j \in I$, $\iota_j^{-1}(V)$ est bornivore dans E_j .

Soit V un bornivore de $\oplus_{i \in I} E_i$. Pour tout $j \in I$, l'image réciproque de V par l'injection $\iota_j : E_j \hookrightarrow \oplus E_j$ continue est un bornivore de E_j . En effet, soit B_j un linéairement borné de E_j . Comme ι_j est linéaire et continue, $\iota_j(B_j)$ est linéairement borné dans $\oplus_{i \in I} E_i$ (voir (LB6) de la Proposition III.62 page 115). Comme V est un bornivore de $\oplus_{i \in I} E_i$, $\iota_j(B_j)/(\iota_j(B_j) \cap V)$ est de dimension finie. On pose f_j la composée

$$B_j \xrightarrow{\iota_j} \iota_j(B_j) \twoheadrightarrow \iota_j(B_j)/(\iota_j(B_j) \cap V).$$

Son noyau est

$$\ker(f_j) = \iota_j^{-1}(\iota_j(B_j) \cap V) = B_j \cap \iota_j^{-1}(V).$$

On en déduit que $B_j/B_j \cap \iota_j^{-1}(V)$ est isomorphe à $\iota_j(B_j)/(\iota_j(B_j) \cap V)$ qui, rappelons-le, est de dimension finie. On a donc montré que $\iota_j^{-1}(V)$ est bornivore dans E_j .

Nous pouvons maintenant montrer que si pour tout $i \in I$, E_i est linéairement bornologique, alors le co-produit $\oplus_{i \in I} E_i$ est linéairement bornologique. En effet, tout bornivore V de $\oplus_{i \in I} E_i$ contient $\oplus_{i \in I} \iota_i^{-1}(V) \subseteq V$. Or pour tout $i \in I$, $\iota_i^{-1}(V)$ est un bornivore de E_i donc un ouvert linéaire. Or une somme directe d'ouverts linéaires des E_i est un ouvert linéaire de $\oplus_{i \in I} E_i$, donc V est un ouvert linéaire de $\oplus_{i \in I} E_i$.

Dans le cas fini, produits et co-produits coïncident (voir la Proposition III.31 page 97). Si E et F sont linéairement bornologiques et complets, alors $E \times F = E \oplus F$ est donc linéairement bornologique et complet. $\square$

III.3.2 Mix, par et produit tensoriel inductif

Nous allons introduire l'interprétation du $\mathfrak{A}$ en passant par la règle du (Mix), ce qui est étrange puisqu'il existe une règle dédiée à l'introduction du $\mathfrak{A}$ dans la logique linéaire. Pourtant, cette façon d'introduire le $\mathfrak{A}$ est classique en topologie. En effet, nous allons voir dans les paragraphes suivants que le $\mathfrak{A}$ est interprété par le **produit tensoriel inductif** qui n'est autre

que le complété des $x \wp y$ introduits ci-dessous pour une topologie adaptée. Avant d'introduire le produit tensoriel inductif, nous avons besoin d'étudier l'espace de Lefschetz des formes bilinéaires symétriques (y compris en dimension infinie).

Pour étudier l'espace des fonctions et l'interprétation du $\wp$ dans les espaces de Lefschetz, nous n'allons considérer que des espaces complets. Rappelons la Proposition III.74 page 124 : si E est un espace de Lefschetz complet, alors les linéairement bornés fermés et les linéairement compacts coïncident. Dans ce cas, on note $\neg = \neg_{\wp} = \neg_{\mathcal{L}}$ l'opérateur qui munit le dual topologique E' d'un espace de Lefschetz complet E de la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement bornés ou sur les linéairement compacts. On note de même $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F muni de la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement bornés ou sur les linéairement compacts de l'espace complet E .

Nous commençons par introduire une version partielle du par, notée $\wp_f$, définie comme un sous-espace de fonctions bilinéaires (Définition III.25 page 138). Ensuite, nous montrons que cette construction se plonge dans l'espace des fonctions de rang fini (Proposition III.92 page 139). En s'appuyant sur un théorème de prolongement, nous montrons que dans le cas linéairement bornologique et complet, l'espace des fonctions linéaires continues est linéairement homéomorphe au complété de la version partielle du par (Proposition III.94 page 140).

Au paragraphe III.3.2.c, nous allons voir que ce complété peut-être décrit comme un espace de fonctions multilinéaires hypocontinues (Définition III.26 page 141). C'est pourquoi nous étudions les propriétés de ces fonctions. Nous caractérisons cette notion de continuité en termes de continuité séparée et de la continuité des fonctions bilinéaires (Proposition III.99 page 143). Nous montrons que c'est la bonne notion pour décrire la continuité de l'évaluation (Contre-exemple III.19 page 144).

Enfin, nous définissons le par en utilisant la construction par produit tensoriel inductif introduite par Grothendieck [Gro55] et étudiée dans le cadre linéarisé par Gross et Fischer [FG65]. Dans le cas linéairement bornologique et complet, nous montrons que le par est associatif (Proposition III.103 page 148), complet (Proposition III.107 page 151) et qu'il vérifie la relation $\neg E \wp F \simeq \mathcal{L}_c(E; F)$ avec l'espace de fonctions, usuelle en logique linéaire (Proposition III.104 page 149). Nous donnons aussi une caractérisation de ses linéairement bornés (Proposition III.102 page 146) adaptée d'un théorème de Gross et Fischer [FG65]. Par contre, nous ne savons pas si cette construction préserve le caractère linéairement bornologique. Pour terminer, nous montrons que le par construit dans les espaces de Lefschetz généralise bien l'interprétation du par dans les espaces de finitude (Proposition III.109 page 153).

III.3.2.a Mix, «Par» et fonctions de rang fini

Tant que l'on ne considère pas les connecteurs exponentiels, la dimension des espaces de Lefschetz finitaires qui interprètent la logique linéaire est finie. Or tout espace de Lefschetz de dimension finie est discret. Ainsi, l'interprétation de MALL dans les espaces de Lefschetz finitaires coïncide avec celle du modèle des espaces vectoriels de dimension finie (voir la Figure I.4 page 16). Dans ce modèle, une formule A est interprétée par un espace vectoriel noté $\llbracket A \rrbracket$ et une preuve π par un vecteur de cet espace $\llbracket \pi \rrbracket \in \llbracket A \rrbracket$. En particulier, le connecteur logique $\otimes$ est interprété par le produit tensoriel algébrique et son dual $\wp$ par les formes bilinéaires.

Rappelons que le produit tensoriel $E \otimes F$ de deux espaces vectoriels est la solution du

problème universel

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{\phi} & G \\ \pi \downarrow & \nearrow \exists! \hat{\phi} & \\ E \otimes F & & \end{array} \quad (\text{III.9})$$

où ϕ est une application bilinéaire et $\hat{\phi}$ une application linéaire. Le produit tensoriel $E \otimes F$ est le quotient de l'espace vectoriel engendré par le produit $E \times F$ par le sous espace engendré par

$$\begin{aligned} (x + x', y) - (x, y) - (x', y) \\ (x, y + y') - (x, y) - (x, y') \\ (\lambda x, y) - \lambda(x, y) \\ (x, \lambda y) - \lambda(x, y) \end{aligned}$$

où $x, x' \in E, y, y' \in F$ et $\lambda \in \mathbb{k}$.

Notation III.23. On notera $x \otimes y$ la classe d'équivalence de (x, y) . L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E_1, E_2 ; F)$ désigne l'ensemble des applications bilinéaires de $E_1 \times E_2$ dans F .

En dimension finie, les espaces sont réflexifs. Ainsi, une preuve $\pi' \vdash A^\perp$ est interprétée par une forme linéaire sur le dual $\llbracket A \rrbracket'$, c'est-à-dire un vecteur de $\llbracket A \rrbracket$.

La règle d'introduction du tenseur de la logique linéaire

$$\frac{\frac{\dots \pi \dots}{\llbracket \pi \rrbracket \vdash A} \quad \frac{\dots \rho \dots}{\llbracket \rho \rrbracket \vdash B}}{\llbracket \pi \rrbracket \otimes \llbracket \rho \rrbracket \vdash A \otimes B} (\otimes)$$

est interprétée par le vecteur $\llbracket \pi \rrbracket \otimes \llbracket \rho \rrbracket$ du produit tensoriel $\llbracket A \rrbracket \otimes \llbracket B \rrbracket$. Notons $\llbracket \pi' \rrbracket \wp \llbracket \rho' \rrbracket$ l'interprétation de la preuve obtenue par la règle (Mix) de la logique linéaire qui introduit le connecteur $\wp$

$$\frac{\frac{\dots \pi' \dots}{\llbracket \pi' \rrbracket \vdash A^\perp} \quad \frac{\dots \rho' \dots}{\llbracket \rho' \rrbracket \vdash B^\perp}}{\llbracket \pi' \rrbracket \wp \llbracket \rho' \rrbracket \vdash A^\perp \wp B^\perp \simeq (A \otimes B)^\perp} (\text{Mix})$$

$\llbracket \pi' \rrbracket \wp \llbracket \rho' \rrbracket$ est une forme linéaire sur $\llbracket A \rrbracket \otimes \llbracket B \rrbracket$. Par la propriété universelle du tenseur, elle correspond à une forme bilinéaire sur $\llbracket A \rrbracket \times \llbracket B \rrbracket$.

Par ailleurs, la règle du (Mix) coupée avec la règle d'introduction au tenseur

$$\frac{\frac{x' \vdash A^\perp \quad y' \vdash B^\perp}{x' \wp y' \vdash A^\perp \wp B^\perp} (\text{Mix}) \quad \frac{x \vdash A \quad y \vdash B}{x \otimes y \vdash A \otimes B} (\otimes)}{\langle x' \wp y', x \otimes y \rangle \vdash \perp} (\text{Cut})$$

se réduit en la preuve

$$\frac{\frac{x \vdash A \quad x' \vdash A^\perp}{\langle x', x \rangle \vdash \perp} (Cut) \quad \frac{y \vdash B \quad y' \vdash B^\perp}{\langle y', y \rangle \vdash \perp} (Cut)}{\langle x', x \rangle \langle y', y \rangle \vdash \perp} (Mix)$$

La règle (Mix) sur le type $\perp$ revient à se donner une multiplication scalaire qui est une forme bilinéaire sur $\mathbb{k} \times \mathbb{k}$ (rappelons que $\llbracket \perp \rrbracket = \mathbb{k}$). Comme la sémantique de MALL des espaces vectoriels de dimension finie doit être invariante par élimination des coupures, le (Mix) de deux preuves d'interprétation respective $x' \in \llbracket A \rrbracket'$ et $y' \in \llbracket B \rrbracket'$ est interprété par

$$\langle x' \wp y', x \otimes y \rangle = \langle x', x \rangle \langle y', y \rangle.$$

Notation III.24. Soient E et F deux espaces de Lefschetz. Pour tous $x \in E$ et $y \in F$, on note $x \wp y$ la forme bilinéaire sur $E' \times F'$ définie par

$$\begin{aligned} x \wp y : E' \times F' &\rightarrow \mathbb{k} \\ (x', y') &\mapsto \langle x', x \rangle \langle y', y \rangle. \end{aligned}$$

Par la suite on notera de la même façon $x \wp y : E' \otimes F' \rightarrow \mathbb{k}$ l'application linéaire associée par la propriété universelle du produit tensoriel algébrique.

La définition suivante introduit l'opérateur $\wp_f$ sur les espaces de Lefschetz. Si E et F sont des espaces de Lefschetz, $E \wp_f F$ est fait de formes bilinéaires qui correspondent par *curryfication* aux fonctions linéaires de rangs finis, d'où l'indice f .

On va utiliser la topologie équicontinue, définie par rapport à la bornologie des linéairement équicontinus (voir Définition III.17 page 120).

Définition III.25. Soient E et F des espaces de Lefschetz complets. L'espace vectoriel $E \wp_f F$ est l'espace engendré par l'image de

$$\begin{aligned} E \times F &\rightarrow \mathcal{L}(E', F'; \mathbb{k}) \\ (x, y) &\mapsto x \wp y : (x', y') \mapsto \langle x', x \rangle \langle y', y \rangle. \end{aligned}$$

Muni de topologie induite par la **topologie équicontinue**, engendrée par le système fondamental linéaire

$$\mathcal{W}(U^\perp, V^\perp) = \left\{ \phi \in E \wp_f F ; \forall x' \in U^\perp, \forall y' \in V^\perp, \phi(x', y') = 0 \right\},$$

$E \wp_f F$ est un espace de Lefschetz.

Démonstration. Soit $\mathcal{V}_E$ et $\mathcal{V}_F$ les familles de ouverts linéaires de E et F respectivement. La famille $(\mathcal{W}(U^\perp, V^\perp) ; U \in \mathcal{V}_E, V \in \mathcal{V}_F)$ forme un filtre de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E', F'; \mathbb{k})$ car les familles d'équicontinus de E' et de F' respectivement, forment des bornologies linéaires (voir la Proposition III.67 page 120). Il nous faut vérifier que la topologie équicontinue est séparée (voir la Condition (TL2) de la Définition III.1 page 71). Soit ϕ dans l'intersection $\cap_{U \in \mathcal{V}_E, V \in \mathcal{V}_F} \mathcal{W}(U^\perp, V^\perp)$. Soient $x' \in E'$ et $y' \in F'$. Posons $U = \ker(x')$ et $V = \ker(y')$. Alors, $x' \in U^\perp$ et $y' \in V^\perp$. Donc $x \wp y$ est nulle sur (x', y') . $\square$

Proposition III.92. [FG65, §1.3] Soient E et F deux espaces de Lefschetz complets. Le plongement

$$\begin{aligned} (\neg E) \mathfrak{A}_f F &\rightarrow \mathcal{L}_c(E; F) \\ x' \mathfrak{A}_f y &\mapsto x \mapsto \langle x', x \rangle y \end{aligned}$$

est continu. De plus, l'image par Φ de $(\neg E) \mathfrak{A}_f F$ est égal à l'espace des fonctions linéaires continues de rang fini qui est dense dans $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Démonstration. Commençons par montrer que l'application linéaire

$$\Phi : (\neg E) \mathfrak{A}_f F \hookrightarrow \mathcal{L}_c(E; F)$$

est bien définie.

Rappelons que l'évaluation $\text{ev} : F \rightarrow \neg \mathfrak{C} \neg \mathfrak{C} F$ est un isomorphisme et ouvert (voir la Proposition III.76 page 125). Son inverse est donc un isomorphisme continu. Or Φ est la composée

$$\begin{aligned} (\neg E) \mathfrak{A}_f F &\rightarrow \mathcal{L}_c(E; \neg \neg F) &&\rightarrow \mathcal{L}_c(E, F) \\ x' \mathfrak{A}_f y &\mapsto (x \mapsto [y' \mapsto \langle x', x \rangle \langle y', y \rangle]) &&\mapsto x \mapsto \text{ev}^{-1}[y' \mapsto \langle x', x \rangle \langle y', y \rangle] \\ &&&\mapsto x \mapsto \langle x', x \rangle y \end{aligned}$$

Montrons que Φ est à valeurs dans les applications linéaires continues de rang fini. Soient $x' \in \neg E$ et $y \in F$. L'application $\Phi(x' \mathfrak{A}_f y) : x \mapsto \langle x', x \rangle y$ est continue. En effet, pour tout ouvert linéaire V de F , $\ker(x) \subseteq \Phi(x' \mathfrak{A}_f y)^{-1}(V)$. De plus, $\Phi(x', y) : x \mapsto \langle x', x \rangle y$ est de rang 1. Comme $(\neg E) \mathfrak{A}_f F$ est l'espace des combinaisons linéaires finies des $x' \mathfrak{A}_f y$, pour tout $z \in (\neg E) \mathfrak{A}_f F$, $\phi(z)$ est continue et de rang fini.

Montrons que Φ est injective. Si $x' \mathfrak{A}_f y \neq 0$, alors $x' \neq 0$ et il existe $x \in E$ tel que $\langle x', x \rangle \neq 0$ donc $\Phi(x' \mathfrak{A}_f y) \neq 0$.

Montrons que Φ est continue. Soit W un ouvert de $\mathcal{L}_c(E, F)$. Il existe K linéairement compact de E et V un ouvert linéaire de F tel que $\mathcal{W}(K, V) \subseteq W$. Or, $K^\perp$ est un ouvert linéaire de $\neg E$, donc $\mathcal{W}(K^{\perp\perp}, V^\perp)$ est un ouvert linéaire de $(\neg E) \mathfrak{A}_f F$. Comme de plus, $\mathcal{W}(K^{\perp\perp}, V^\perp) \subseteq \Phi^{-1}(\mathcal{W}(K, V)) \subseteq \Phi^{-1}(W)$, ϕ est continue.

Montrons que toute fonction linéaire continue de rang fini est dans l'image de Φ . Soit $f \in \mathcal{L}_c(E; F)$ de rang fini n . Il existe une famille libre de F $(y_i)_{i \leq n}$ telle que pour tout $x \in E$, $f(x) = \sum_{i \leq n} f_i(x) y_i$. Pour tout $i \leq n$, la forme $f_i : x \mapsto f_i(x) \in \mathbb{k}$ définie de façon unique par cette formule est linéaire. De plus f_i est continue car $\ker(f_i) \supseteq f^{-1}(0)$ qui est ouvert car f est à valeurs dans un espace de dimension finie qui est donc discret. On en déduit que $f \in \Phi(\neg E \mathfrak{A}_f F)$.

Montrons à présent que $\Phi(\neg E \mathfrak{A}_f F)$ est dense dans $\mathcal{L}_c(E; F)$. Soient $f \in \mathcal{L}_c(E; F)$, K un linéairement compact de E et V un ouvert linéaire de F . On cherche $\phi \in \neg E \mathfrak{A}_f F$ tel que $f - \phi \in \mathcal{W}(K, V)$. Comme f est continue, il existe U tel que $f(U) \subseteq V$. Comme K est linéairement compact, il est linéairement borné (voir (LB8) de la Proposition III.62 page 115). On en déduit l'existence d'un sous-espace B_0 de E de dimension finie tel que

$$K = B_0 \oplus (K \cap U).$$

En utilisant le lemme de Zorn [Jar81, §1.4 p.19], Il existe un sous-espace vectoriel C tel que $E = B_0 \oplus U \oplus C$ (remarquons que $K \cap C = \{0\}$ car $K \subseteq B_0 \oplus U$). Soit $\mathbf{p}$ la projection de E sur B_0 . C'est une involution. Elle est continue, car elle est à valeurs dans un espace discret et son noyau est ouvert car il contient U . Enfin, remarquons que pour tout $x \in K$, $\mathbf{p}(x - \mathbf{p}(x)) = 0$ donc $x - \mathbf{p}(x) \in \ker(\mathbf{p}) = U \oplus C$. De plus, pour tout $x \in K$, $\mathbf{p}(x) \in B_0 \subseteq K$ donc $x - \mathbf{p} \in K$. On en déduit que

$$\forall x \in K, x - \mathbf{p}(x) \in K \cap U.$$

On en déduit que pour tout $x \in K$, $f(x) - (f \circ \mathbf{p})(x) \in f(U) \subseteq V$ donc $f - f \circ \mathbf{p} \in \mathcal{W}(K, V)$.

Enfin, comme $\mathbf{p}$ est à valeurs dans B_0 qui est de dimension finie. On en déduit que $\mathbf{p}$ est de rang fini, puis que la composée $f \circ \mathbf{p}$ est de rang fini. Donc $f \circ \mathbf{p} \in \Phi(\neg E \mathfrak{A}_f F)$. $\square$

Le cas linéairement bornologique. Plaçons nous dans le cas bornologique pour le reste de ce paragraphe.

Proposition III.93. Soient E et F deux espaces de Lefschetz linéairement bornologiques et complets. L'espace $\mathcal{L}_c(E, F)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts est complet.

Démonstration. La preuve de cette proposition est une généralisation de celle du Lemme III.86 page 133 qui traite le cas où $F = \mathbb{k}$. $\square$

Proposition III.94. Soient E et F deux espaces de Lefschetz linéairement bornologiques et complets. Le plongement $\neg E \mathfrak{A}_f F \hookrightarrow \mathcal{L}_c(E, F)$ se prolonge en un homéomorphisme linéaire entre le complété de $\neg E \mathfrak{A}_f F$ et $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Démonstration. Étant donné que le plongement de $\neg E \mathfrak{A}_f F$ dans $\mathcal{L}_c(E ; F)$ est continu, il est aussi uniformément continu (voir la Proposition III.2 page 72). De plus, $\mathcal{L}_c(E ; F)$ est complet donc le plongement se prolonge en un homéomorphisme linéaire entre le complété de $\neg E \mathfrak{A}_f F$ et $\mathcal{L}_c(E, F)$. $\square$

Nous allons voir que le complété de $\neg E \mathfrak{A}_f F$ peut-être décrit comme un espace de fonctions multilinéaires hypocontinues. Tout d'abord commençons par décrire les propriétés de ces fonctions.

III.3.2.b Fonctions multilinéaires hypocontinues.

Dans ce paragraphe, nous introduisons l'hypocontinuité [Bou56] qui est une notion de continuité des formes bilinéaires à mi-chemin entre la continuité et la continuité séparée (voir la Proposition III.98 page 142). Nous allons ensuite construire une topologie sur l'espace des formes bilinéaires hypocontinues sur $E \times F$, qui en fait un espace de Lefschetz.

Une fonction n -linéaire est séparément continue lorsque quand on fixe $n - 1$ points, la fonction linéaire est continue. On a besoin d'une notion de continuité un peu plus uniforme, au lieu de fixer $n - 1$ points, on fixe $n - 1$ linéairement compacts et on demande à la fonction d'être uniformément continue sur ce produit de linéairement compacts.

Définition III.26. Soient $(E_i)_{i \leq n}$ et F des espaces de Lefschetz. Une application n -linéaire $\phi : E_1 \times \cdots \times E_n \rightarrow F$ est dite **hypocontinue** lorsque pour tout ouvert linéaire W de F et pour toute famille $(K_i ; i \leq n)$ de linéairement compacts K_i de E_i , on a

$$\forall j \leq n, \exists V_j ; \phi\left(\prod_{i \leq n} A_i\right) \subseteq W, \text{ avec } \begin{cases} A_i = K_i, \forall i \neq j \\ A_j = V_j \text{ ouvert de } E. \end{cases}$$

On note $\mathcal{L}_h(E_1 \times \cdots \times E_n ; F)$ l'espace des fonctions n -linéaires hypocontinues sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ à valeurs dans F .

Fait III.95. Pour tout espace de Lefschetz F fixé, l'opérateur $\mathcal{L}_h(_, F) : \mathbf{Lef} \times \cdots \times \mathbf{Lef} \rightarrow \mathbf{Lef}$ qui à n espaces $(E_i)_{i \leq n}$ associe l'espace $\mathcal{L}_h(E_1 \times \cdots \times E_n, F)$ est un n -foncteur contra-variant en chacune des directions.

Proposition III.96. Soient $(E_i)_{i \leq n}$ et F des espaces de Lefschetz.

L'espace des fonctions n -linéaires hypocontinues $\mathcal{L}_h(E_1 \times \cdots \times E_n ; F)$ est un espace de Lefschetz qui admet pour système fondamental :

$$\mathcal{W}(K_1, \dots, K_n ; W) = \{\phi \in \mathcal{L}_h(E_1 \times \cdots \times E_n ; F) ; \phi(K_1, \dots, K_n) \subseteq W\}$$

où pour tout $i \leq n$, K_i est un sous-espace linéairement compact de E_i et W un ouvert linéaire de F .

Démonstration. Il nous faut montrer que la famille $(\mathcal{W}((K_i)_{i \leq n} ; W))_{(K_i), W}$ forme un système fondamental linéaire (voir Définition III.1 page 71).

Vérifions la condition de séparation (TL2). Soit $\phi \in \mathcal{L}_h(E_1 \times \cdots \times E_n ; F)$ non nulle. Il existe $x_1, \dots, x_{n-1}$ tel que $\phi(x_1, \dots, x_{n-1}, _) \in \mathcal{L}_c(E_n ; F)$ soit non nulle. Comme $\mathcal{L}_c(E_n ; F)$ est un espace de Lefschetz, par séparation dans $\mathcal{L}_c(E_n ; F)$ qui est équipé de la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts, il existe K linéairement compact de E_n et W ouvert linéaire de F tel que $\phi(x_1, \dots, x_{n-1}, _) \notin \mathcal{W}(K, W)$. On en déduit que $\phi \notin \mathcal{W}(\mathbb{k} \cdot x_1, \dots, \mathbb{k} \cdot x_{n-1}, K \notin W$. On a donc trouvé des linéairement compacts $\mathbb{k} \cdot x_1, \dots, \mathbb{k} \cdot x_{n-1}$ et K , et un ouvert linéaire de F tels que $\phi \notin \mathcal{W}(\mathbb{k} \cdot x_1, \dots, \mathbb{k} \cdot x_{n-1}, K ; W)$.

Il nous reste à vérifier que la famille est stable par intersection finie :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}((K_i)_{i \leq n} ; W) \cap \mathcal{W}((K'_i)_{i \leq n} ; W') &= \{\phi ; \phi(K_i)_{i \leq n} \subseteq W, \phi(K'_i)_{i \leq n} \subseteq W'\} \\ &\supseteq \{\phi ; \phi(K_i + K'_i)_{i \leq n} \subseteq W \cap W'\}. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $i \leq n$, $K_i + K'_i$ est linéairement compacts d'après la Proposition III.53 page 110 et parce que $W \cap W'$ est ouvert. $\square$

Comme $\mathbb{k}$ est discret, la topologie sur les formes linéaires continues est décrite par une famille de linéairement compacts et l'ouvert linéaire $\{0\}$ de $\mathbb{k}$ (l'espace d'arrivée).

Notation III.27. On abrégera l'ensemble des formes n -linéaires hypocontinues par

$$\mathcal{L}_h(E_1 \times \cdots \times E_n) = \mathcal{L}_h(E_1 \times \cdots \times E_n ; \mathbb{k}).$$

L'espace des formes n -linéaires hypocontinues par $\mathcal{L}_h(E_1 \times \cdots \times E_n)$ admet pour système fondamental linéaire la famille

$$\mathcal{W}(K_1, \dots, K_n) = \{\phi \in \mathcal{L}_h(E_1 \times \cdots \times E_n) ; \phi(K_1, \dots, K_n) = 0\}$$

où pour tout $i \leq n$, K_i est linéairement compact dans E_i .

Proposition III.97. *Soit E un espace de Lefschetz. L'espace $\mathcal{L}_h(E \times \mathbb{k})$ est linéairement homéomorphe au dual $\neg_{\mathfrak{C}}E$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts.*

Démonstration. La fonction linéaire

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h(E \times \mathbb{k}) &\rightarrow \neg_{\mathfrak{C}}E \\ \phi &\mapsto \phi(_, 1). \end{aligned}$$

est continue. En effet, pour tout K linéairement compact de E , l'image réciproque de $K^\perp$ contient $\mathcal{W}(K, \mathbb{k})$. Sa réciproque

$$\begin{aligned} \neg_{\mathfrak{C}}E &\rightarrow \mathcal{L}_h(E \times \mathbb{k}) \\ x' &\mapsto (\lambda, x) \mapsto \lambda \langle x', x \rangle. \end{aligned}$$

est elle aussi continue. Puisque $\mathbb{k}$ est linéairement compact et pour tout linéairement compact K de E , l'image réciproque de $\mathcal{W}(K, \mathbb{k})$ contient $K^\perp$. □

Nous allons maintenant comparer l'hypocontinuité avec les autres types de continuité pour les fonctions multi-linéaires.

Proposition III.98. *Toute fonction n -linéaire hypocontinue est séparément continue et continue sur les produits de compacts. Toute fonction n -linéaire continue est hypocontinue.*

Démonstration. Nous allons traiter le cas bilinéaire, les autres cas se traitent de façon similaire. Soient E, F et G des espaces de Lefschetz.

La première partie de la proposition repose sur le fait que pour tous $x \in E$ et $y \in F$, $\mathbb{k} \cdot x$ et $\mathbb{k} \cdot y$ sont des linéairement compacts respectifs de E et de F .

Soit $\phi : E \times F \rightarrow G$ une fonction bilinéaire hypocontinue. Soient K et L des linéairement compacts respectifs de E et F . Soit W un ouvert linéaire de G . Il existe des ouverts linéaires U et V de E et F (respectivement) tels que $\phi(U \times L) \subseteq W$ et $\phi(K \times V) \subseteq W$. On en déduit que $\phi(U \cap K \times V \times L) \subseteq W$. Donc ϕ est continue sur $K \times L$.

Pour la seconde partie, soit ϕ une fonction bilinéaire continue sur $E \times F$ à valeurs dans G . Soit W un ouvert linéaire de G .

Comme ϕ est continue, il existe U et V deux ouverts linéaires respectifs de E et de F tels que

$$\phi(U \times V) \subseteq W.$$

Pour montrer que ϕ est hypocontinue, on se donne K un linéairement compact de E .

Étant donné que tout linéairement compact est linéairement borné (voir (LB8) de la Proposition III.62 page 115), il existe B_0 de dimension finie tel que $K = B_0 \oplus (K \cap U)$. Soit $(x_i)_{i \leq n}$ une base de B_0 . On a alors

$$\forall x \in K, \exists (\lambda_i)_{i \leq n} \in \mathbb{k}^n, \exists y \in K \cap U ; x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + y.$$

Comme ϕ est séparément continue, pour tout $i \leq n$, il existe V_i ouvert linéaire de F tel que

$$\phi(\mathbb{k} \cdot x_i \times V_i) \subseteq W.$$

Posons $V_0 = V \cap (\cap_{i \leq n} V_i)$. Soit $(x, z) \in K \times V_0$. Il existe $x \in K$, $(\lambda_i)_{i \leq n} \in \mathbb{k}^n$ et $y \in K \cap U$ tels que $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + y$. Comme ϕ est linéaire par rapport à la première variable, on a

$$\phi(x, z) = \lambda_1 \phi(x_1, z) + \cdots + \lambda_n \phi(x_n, z) + \phi(y, z).$$

Or pour tout $i \leq n$, $z \in V_0 \subseteq V_i$ donc $\phi(x_i, z) \in W$. De plus, $y \in K \cap U \subseteq U$ et $z \in V$ donc $\phi(y, z) \in W$. On en déduit que $\phi(x, z) \in W$. On a donc montré que

$$\phi(K \times V_0) \subseteq W.$$

Pour L linéairement compact de F , en utilisant la même technique, on trouvera un ouvert U_0 de E tel que $\phi(U_0 \times L) \subseteq W$. $\square$

Dans le cas linéairement bornologique et complet, l'hypocontinuité se ramène à la continuité séparée et à la continuité sur les produits de linéairement compacts.

Proposition III.99. *Soient $(E_i)_{i \leq n}$ et F des espaces de Lefschetz linéairement bornologiques et complets. Une fonction n -linéaire sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ à valeurs dans F est hypocontinue si et seulement si elle est séparément continue et sa restriction à tout produit de linéairement compacts est continue.*

Démonstration. On ne traite que le cas bi-linéaire.

Soit $\phi : E \times F \rightarrow G$ une fonction bilinéaire séparément continue et continue sur les produits de linéairement compacts.

Montrons que ϕ est hypocontinue. Soit W un ouvert linéaire de G . Soit K un linéairement compact de E .

Comme ϕ est séparément continue, pour tout $x \in K$, il existe un ouvert linéaire V_x de F tel que

$$\phi((\mathbb{k} \cdot x) \times V_x) \subseteq W.$$

Soit L un linéairement compact de F . Comme ϕ est continue sur les produits de compacts, il existe U_L et V_L ouverts linéaires respectifs de E et F tels que

$$\phi(K \cap U_L \times L \cap V_L) \subseteq W.$$

Or, tout linéairement compact est en particulier linéairement borné. Il existe donc $x_1, \dots, x_n \in E$ tels que $K = \mathbb{k} \cdot x_1 + \cdots + \mathbb{k} \cdot x_n \oplus K \cap U_L$. De cette décomposition et des deux inéquations ci-dessus, on déduit que

$$\phi(K \times (L \cap V_L)) \subseteq W.$$

Posons $V = \cup_{L \in \mathfrak{C}_F} L \cap V_L$. Comme F est supposé linéairement bornologique, il suffit de montrer que V est bornivore pour montrer que V est un ouvert linéaire. Or pour tout B linéairement borné et fermé de V , B est linéairement compact car F est supposé complet. On en déduit que $V \cap B \supseteq B \cap V_B$, donc le noyau de la projection

$$\pi : B \rightarrow (B/B \cap V)$$

contient $B \cap V_B$. Par la propriété universelle du quotient, on a

$$\tilde{\pi} : B/(B \cap V_B) \rightarrow B/(B \cap V).$$

Or $B/(B \cap V_B)$ est de dimension finie car V_B est un ouvert linéaire de F et B est linéairement borné dans F . On en déduit que $B/(B \cap V)$ est aussi de dimension finie. On a démontré que V est linéairement bornivore dans F linéairement bornologique, c'est donc un ouvert ouvert.

De plus, on vérifie facilement que

$$\phi(K \times V) \subseteq W.$$

On procède symétriquement pour montrer la deuxième partie de la définition de l'hypocontinuité. $\square$

Contre-Exemple III.19. [Ehr05] Toute fonction bilinéaire hypocontinue sur $E \times F$ n'est pas forcément continue sur $E \times F$. Par exemple, étant donné un espace réflexif E , la fonction $\text{ev} : E \times \neg_{\mathfrak{C}} E \rightarrow \mathbb{k}$ est hypocontinue mais pas toujours continue.

Montrons que ev est hypocontinue. Soit K un linéairement compact de E . L'annulateur $K^\perp$ de K est un ouvert linéaire de $\neg_{\mathfrak{C}} E$ et $\text{ev}(K \times K^\perp) = 0$. Soit à présent L un linéairement compact de $\neg E$. Comme E est réflexif, ${}^\perp L$ est un ouvert linéaire de E (voir le Fait III.77 page 126). De plus $\text{ev}({}^\perp L \times L) = 0$. On a donc montré que ev est hypocontinue.

Par contre, si ev est continue, cela implique l'existence de U ouvert linéaire de E et de K linéairement compact de E tels que $\text{ev}(U, K^\perp) = 0$. On en déduit que $K^\perp \subseteq U^\perp$, puis par réflexivité de E que $U \subseteq K$ donc U est linéairement compact (rappelons que tout ouvert linéaire d'un espace de Lefschetz est fermé d'après (VL1) de la Proposition III.7 page 77). L'existence d'un tel sous-espace à la fois ouvert et linéairement compact implique que E est localement linéairement compact.

Ehrhard a montré que dans l'espace de Lefschetz finitaire E_{Nat} , il n'existe pas d'ouvert linéaire qui soit linéairement compact (voir le Paragraphe sur la Propriété universelle du quotient dans le papier [Ehr05, page 15]).

III.3.2.c Produit tensoriel inductif

Nous avons maintenant tous les outils pour introduire le produit tensoriel inductif dans les espaces de Lefschetz, que l'on notera $E \mathfrak{A} F$. Nous allons ensuite montrer que le produit tensoriel inductif est associatif, complet et que l'on a l'homéomorphisme de la logique linéaire $\mathcal{L}_c(E, F) \simeq (\neg E) \mathfrak{A} F$.

Le cas général. Fischer et Gross ont introduit dans le cadre général le produit tensoriel inductif. Dans le cadre linéairement bornologique, ce produit tensoriel coïncide avec la construction du par. Nous pourrions donc adapter leurs résultats à notre cadre.

Définition III.28. [FG65] Soient E et F deux espaces de Lefschetz linéairement bornologiques et complets. Le produit tensoriel inductif de E et F , noté $E \mathfrak{A} F$, est l'espace des formes bilinéaires hypocontinues sur $\neg E \times \neg F$, muni de la **topologie hypoéquicontinue** engendrée par le système fondamental

$$\mathcal{W}(U^\perp, V^\perp) = \left\{ \phi \in \mathcal{L}_h(\neg E \times \neg F) ; \forall x' \in U^\perp, \forall y' \in V^\perp, \phi(x', y') = 0 \right\}.$$

C'est un espace de Lefschetz.

Le cas linéairement bornologique et complet. Dans le cas où les espaces sur lesquels nous travaillons sont complets et linéairement bornologiques, les propositions précédentes se simplifient un peu.

Les espaces vectoriels $E \mathfrak{A} F$ et $\mathcal{L}_h(\neg E \times \neg F)$ sont identiques. Pourtant dans le cas général, leur topologie n'est pas équivalente. La première est la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement équicontinus, la seconde sur les linéairement compacts du dual. Or, dans le cas linéairement bornologique complet, ces deux topologies coïncident. On va donc avoir un homéomorphisme linéaire entre les deux espaces.

Proposition III.100. Soient E et F des espaces de Lefschetz complets et linéairement bornologiques. Alors $E \mathfrak{A} F \simeq \mathcal{L}_h(\neg E \times \neg F)$.

Démonstration. Remarquons que lorsque E et F sont supposés linéairement bornologiques, les linéairement équicontinus de $\neg E$ et $\neg F$ sont exactement les linéairement compacts de ces espaces. Ainsi, $E \mathfrak{A} F$ est linéairement homéomorphe à l'espace $\mathcal{L}_h(\neg E \times \neg F)$ des formes bilinéaires hypocontinues muni de la topologie de la convergence sur les linéairement compacts. $\square$

Proposition III.101. Soient E et F deux espaces de Lefschetz complets et linéairement bornologiques. On note $\mathcal{V}_E$ (resp. $\mathcal{V}_F$) l'ensemble des ouverts linéaires de E (resp. F) et $\mathfrak{C}_E$ (resp. $\mathfrak{C}_F$) l'ensemble des linéairement compacts de E (resp. F). Une forme bilinéaire ϕ est dans $E \mathfrak{A} F$ si et seulement si

$$\begin{cases} \forall V \in \mathcal{V}_F, \exists K \in \mathfrak{C}_E, \phi(K^\perp, V^\perp) = 0 \\ \forall U \in \mathcal{V}_E, \exists L \in \mathfrak{C}_F, \phi(U^\perp, L^\perp) = 0 \end{cases}$$

Démonstration. Soit $\phi \in E \mathfrak{A} F$. Comme ϕ est hypocontinue sur $\neg E \times \neg F$ et par définition de l'hypocontinuité,

$$\begin{aligned} \forall K' \in \mathfrak{C}_{\neg E}, \exists V' \in \mathcal{V}_{\neg F}, \quad \phi(K', V') &= 0 \\ \forall L' \in \mathfrak{C}_{\neg F}, \exists U' \in \mathcal{V}_{\neg E}, \quad \phi(U', L') &= 0. \end{aligned}$$

Comme E et F sont linéairement bornologiques et complets, $\neg E$ et $\neg F$ sont complets. La topologie de $\neg E$ (resp. $\neg F$) est engendrée par le système fondamental formé les $K^\perp$ où $K \in \mathfrak{C}_E$ (resp. $L^\perp$ où $L \in \mathfrak{C}_F$). Pour tout linéairement compact K' de $\neg E$ (resp. L' de $\neg F$), il existe $U \in \mathcal{V}_E$ tel que $K' = U^\perp$ (resp. $V \in \mathcal{V}_F$ tel que $L' = V^\perp$). $\square$

Les linéairement bornés de cet espace admettent une caractérisation.

Proposition III.102. [FG65, §2.1, Th.2.7] Soient E et F deux espaces de Lefschetz complets et linéairement bornologiques. Soit A un sous-espace vectoriel de $E \mathfrak{A} F$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes

1. B est linéairement hypoéquicontinu :

$$\begin{aligned} \forall U \in \mathcal{V}_E, \exists V' \in \mathcal{V}_{\neg F} ; \forall \phi \in A, \phi(U^\perp, V') = 0, \\ \forall V \in \mathcal{V}_E, \exists U' \in \mathcal{V}_{\neg E} ; \forall \phi \in A, \phi(U', V^\perp) = 0, \end{aligned}$$

2. B est séparément équicontinu et équicontinu sur tous les produits de sous-espaces équicontinus :

$$\begin{aligned} \forall x' \in \neg E, \exists C \in \mathfrak{B}_F ; \forall \phi \in A, \phi(x', C^\perp) = 0, \\ \forall y' \in \neg F, \exists B \in \mathfrak{B}_E ; \forall \phi \in A, \phi(B^\perp, y') = 0, \\ \forall U \in \mathcal{V}_E, \forall V \in \mathcal{V}_F, \exists B \in \mathfrak{B}_E, \exists C \in \mathfrak{B}_F ; \forall \phi \in A, \phi(U^\perp \cap B^\perp, V^\perp \cap C^\perp) = 0. \end{aligned}$$

3. B est linéairement borné :

$$\forall U \in \mathcal{V}_E, \forall V \in \mathcal{V}_F, A/(A \cap \mathcal{W}(U^\perp, V^\perp)) \text{ de dimension finie.}$$

Où $\mathcal{V}_G$ (resp. $\mathfrak{B}_G$) désigne l'ensemble des ouverts linéaires (resp. linéairement bornés) de G pour G variant parmi $E, F, \neg E$ ou $\neg F$.

Démonstration. (1 $\Rightarrow$ 2) On suppose 1 et on montre la première et la troisième parties de 2, la deuxième s'obtenant par symétrie à partir de la première.

Soit $x' \in \neg E$. Comme x' est linéaire continue sur E , il existe $U \in \mathcal{V}_E$ tel que $U \subseteq \ker(x')$. On en déduit que $x' \in U^\perp$. Or, par 1, il existe $C \in \mathfrak{B}_F$ tel que $A(U^\perp, C^\perp) = 0$, donc $A(x', C^\perp) = 0$.

Soient $U \in \mathcal{V}_E$ et $V \in \mathcal{V}_F$. Par 1, il existe $B \in \mathfrak{B}_E$ et $C \in \mathfrak{B}_F$ tels que $A(U^\perp, C^\perp) = 0$ et $A(B^\perp, V^\perp) = 0$. On en déduit que $A(U^\perp \cap B^\perp, V^\perp \cap C^\perp) = 0$.

(2 $\Rightarrow$ 3) On suppose 2. Donc A est séparément équicontinue et continue sur les produits d'équicontinus.

Soient $U \in \mathcal{V}_E$ et $V \in \mathcal{V}_F$.

Comme A est continue sur $U^\perp \cap V^\perp$, il existe $B_0 \in \mathfrak{B}_E$ et $C_0 \in \mathfrak{B}_F$ tels que :

$$A(U^\perp \cap B_0^\perp, V^\perp \cap C_0^\perp) = 0.$$

D'après les résultats résumés dans la Figure III.2 page 130 $U^\perp$ est linéairement borné dans $\neg E$ et $B_0^\perp$ est un ouvert linéaire de $\neg B$. On en déduit que $U^\perp/(B_0^\perp \cap U^\perp)$ est de dimension finie, d'où l'existence d'une famille $x'_1, \dots, x'_n$ de formes linéaires continues sur E telle que :

$$U^\perp = B_0^\perp \cap U^\perp \oplus \langle x'_1, \dots, x'_n \rangle.$$

Comme A est séparément équicontinue, pour tous $i \leq n$ il existe $C_i \in \mathfrak{B}_F$ tel que :

$$\forall i \leq n, A(x'_i, C_i^\perp) = 0.$$

Par symétrie, il existe $C_0 \in \mathfrak{B}_F$ et une famille $(y'_1, \dots, y'_m)$ de formes linéaires continues sur E telle que :

$$V^\perp = C_0^\perp \cap V^\perp \oplus \langle y'_1, \dots, y'_m \rangle.$$

Pour tous $j \leq m$ il existe $B_j \in \mathfrak{B}_F$ tel que :

$$\forall j \leq m, A(B_j^\perp, y'_j) = 0.$$

Posons $B = B_0 + B_1 + \dots + B_n$ et $C = C_0 + C_1 + \dots + C_n$, ce sont des linéairement bornés. On a alors $B^\perp = \bigcap_{0 \leq i \leq n} B_i^\perp$ et $C^\perp = \bigcap_{0 \leq j \leq n} C_j^\perp$.

Comme $B_0^\perp \cap U^\perp$ est linéairement borné (comme sous-espace d'un linéairement borné $U^\perp$) et $B^\perp$ est un ouvert linéaire de $\neg E$, il existe une famille $(x'_{n+1}, \dots, x'_p)$ de formes linéaires continues sur E telle que :

$$B_0^\perp \cap U^\perp = B^\perp \cap U^\perp \oplus \langle x'_{n+1}, \dots, x'_p \rangle.$$

De même, il existe une famille $(y'_{m+1}, \dots, y'_q)$ de formes linéaires continues sur F telle que :

$$C_0^\perp \cap V^\perp = C^\perp \cap V^\perp \oplus \langle y'_{m+1}, \dots, y'_q \rangle.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} U^\perp &= B^\perp \cap U^\perp \oplus \langle x'_1, \dots, x'_p \rangle \\ V^\perp &= C^\perp \cap V^\perp \oplus \langle y'_1, \dots, y'_q \rangle. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $i \leq p$, on a $A(x'_i, C^\perp \cap V^\perp) = 0$ et pour tout $j \leq q$, on a $A(B^\perp \cap U^\perp, y'_j) = 0$.

On applique le Théorème de séparation de Hahn-Banach : pour tout $i \leq p$, $x'_i \notin B^\perp \cap U^\perp \oplus \langle x_k ; k \neq i \rangle$, il existe donc $x_i \in E$ tel que :

$$\langle x'_i, x_i \rangle = 1, \forall k \neq i \langle x'_k, x_i \rangle = 0, \forall x' \in B^\perp \cap U^\perp, \langle x', x_i \rangle = 0.$$

De même, pour tout $j \leq q$, il existe $y_j \in F$ tel que :

$$\langle y'_j, y_j \rangle = 1, \forall l \neq j \langle y'_l, y_j \rangle = 0, \forall y' \in C^\perp \cap V^\perp, \langle y', y_j \rangle = 0.$$

On a maintenant tous les ingrédients pour montrer que :

$$\forall \phi \in A, \phi - \sum_{i \leq p} \sum_{j \leq q} \phi(x'_i, x'_j) x_i \otimes y_j \in \mathcal{W}(U^\perp, V^\perp).$$

On en déduit que $A \subseteq A \cap \mathcal{W}(U^\perp \cap V^\perp) \oplus \langle x_i \otimes y_j ; i \leq p, j \leq q \rangle$.

On a donc bien montré que A est linéairement borné.

(3 $\Rightarrow$ 1) On suppose 3. Soit V un voisinage linéaire de F . On cherche B un linéairement borné de E tel que $A(B^\perp, V^\perp) = 0$. Notons $D' = V^\perp$, c'est un linéairement borné de $\neg F$. Comme $\neg F$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement bornés, il suffit de trouver U' ouvert linéaire de $\neg E$ tel que $A(U', D') = 0$. Pour la deuxième partie de 1, on conclura par symétrie.

Considérons :

$$\begin{aligned} \xi : A \times D' &\rightarrow \neg\neg E \\ \phi, y' &\mapsto x' \mapsto \phi(x', y'). \end{aligned}$$

Comme on a supposé que E est linéairement bornologique et complet, il est réflexif : $\neg\neg E \simeq E$. On peut donc considérer ξ comme la fonction bilinéaire :

$$\begin{aligned} \xi : A \times D' &\rightarrow E \\ \phi, y' &\mapsto x ; \forall x' \in \neg E, \langle x', x \rangle = \phi(x', y'). \end{aligned}$$

Soit $U \in \mathcal{V}_E$. Posons $\mathcal{W} = \mathcal{W}(U^\perp, V^\perp)$. On vérifie que $\xi(A \cap \mathcal{W}, D') = \xi(A \cap \mathcal{W}(U^\perp, V^\perp), V^\perp) \subseteq U$. Considérons la surjection :

$$A \times D' \xrightarrow{\xi} \xi(A, D') \rightarrow \xi(A, D') / (\xi(A, D') \cap U).$$

Par propriété universelle du quotient, la fonction suivante est une surjection :

$$A / (A \cap \mathcal{W}) \times D' / D' \rightarrow A \times D' / (A \cap \mathcal{W}) \times D' \rightarrow \xi(A, D) \rightarrow \xi(A, D') / (\xi(A, D') \cap U).$$

Or, $A / (A \cap \mathcal{W})$ est de dimension finie puisque A est linéairement borné et $\mathcal{W}$ est un ouvert linéaire. On en déduit que $\xi(A, D') / (\xi(A, D') \cap U)$ est de dimension finie. Donc $\xi(A, D')$ est linéairement borné dans E .

Comme $\xi(A, D')$ est linéairement borné dans E et $\xi(A, D')^\perp$ est un ouvert linéaire de $\neg E$. Or, on vérifie que $A(\xi(A, D')^\perp, D') = 0$, on a donc trouvé l'ouvert de $\neg E$ que l'on cherchait.

□

Proposition III.103. [FG65, §2.1, Th.2.9] Soient E et F deux espaces de Lefschetz complets. L'espace de Lefschetz $E \mathcal{R} F$ est complet.

Démonstration. On note $\mathfrak{C}_{\neg E}$ et $\mathfrak{C}_{\neg F}$ les familles de linéairement compact de E' et F' respectivement.

Soit $(\phi_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ un réseau de Cauchy de $E \mathcal{R} F$, i.e.

$$\forall K' \in \mathfrak{C}_{\neg E}, \forall L' \in \mathfrak{C}_{\neg F}, \exists \gamma ; \forall \alpha, \beta \geq \gamma, \forall (x', y') \in K' \times L', \phi_\alpha(x', y') = \phi_\beta(x', y').$$

Soient $x' \in \neg E$ et $y' \in \neg F$. Comme $\mathbb{k} \cdot x'$ et $\mathbb{k} \cdot y'$ sont des linéairement compacts respectifs de $\neg E$ et de $\neg F$, $(\phi_\gamma(x', y'))_{\gamma \in \Gamma}$ est un réseau de Cauchy de l'espace complet $\mathbb{k}$. On note $\phi(x', y')$ sa limite.

On vérifie facilement que ϕ est bilinéaire.

D'après la Proposition III.99 ci-dessus, il suffit de montrer que ϕ est séparément continue et continue sur $U^\perp \times V^\perp$ où U et V sont des ouverts linéaires respectifs de E et de F .

Montrons que ϕ est continue sur $U^\perp \times V^\perp$. Il existe $\gamma_{U,V}$ tel que

$$\forall x' \in U^\perp, y' \in V^\perp, \phi(x', y') = \phi_{\gamma_{U,V}}(x', y')$$

Or $\phi_{\gamma_{U,V}}$ est hypocontinue donc continue sur $U^\perp \times V^\perp$ d'après la Proposition III.99. Il en est donc de même de la restriction de ϕ à $U^\perp \times V^\perp$.

Montrons que ϕ est séparément continue. Pour tout $x' \in \neg E$, $\ker(x')$ est un ouvert linéaire de E . Soit V un ouvert linéaire de F . Nous venons de montrer que ϕ est continue sur $\ker(x')^\perp \times V^\perp$. Comme $x' \in \ker(x')^\perp$, on en déduit que $\phi(x', -)$ est continue sur $V^\perp$. On a donc montré qu'il existe $y^* \in \neg \neg F$ tel que

$$\forall y' \in V^\perp, \langle y^*, y' \rangle = \phi(x', y')$$

Or l'inverse de l'évaluation $\text{ev}^{-1} : \neg \neg F \rightarrow F$ est un isomorphisme continu (voir la Proposition III.76 page 125). On en déduit l'existence de $y \in F$ tel que

$$\forall y' \in V^\perp, \langle y', y \rangle = \phi(x', y').$$

Or F est supposé complet et d'après la caractérisation du complété d'un espace (voir la Proposition III.23 page 88), $\phi(x', -) \in \widetilde{F} = F$. On en déduit l'existence de $y \in F$ tel que

$$\forall y' \in \neg F, \langle y', y \rangle = \phi(x', y'),$$

d'où l'on déduit que $\phi(x', -)$ est continue sur $\neg F$.

On montre de la même façon que $\phi(-, y')$ est continue pour tout $y' \in \neg F$. □

Proposition III.104. [FG65, §2.2 Th.2.12] Soient E et F deux espaces de Lefschetz complets et linéairement bornologiques. L'espace $E \mathfrak{R}_f F$ muni de la topologie équicontinue est dense dans $E \mathfrak{R} F$. De plus, on a un homéomorphisme linéaire entre $\neg E \mathfrak{R} F$ et $\mathcal{L}_c(E; F)$.

Démonstration. Commençons par remarquer que $E \mathfrak{R}_f F \subseteq E \mathfrak{R} F$ et cette inclusion est continue.

Soit $\phi \in E \mathfrak{R} F$.

On va se ramener à la densité de $F \mathfrak{R}_f F$ dans $\mathcal{L}_c(F; F)$ en utilisant la fonction

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{L}_c(F; F) &\rightarrow E \mathfrak{R} F \\ \psi &\mapsto (x', y') \mapsto \phi(x', y' \circ \psi). \end{aligned}$$

Montrons que α est linéaire continue.

En effet, soient U et V deux ouverts linéaires respectifs de E et de F . D'après la Proposition III.59 page 113, $U^\perp$ est linéairement compact de $\neg E$. Comme ϕ est hypocontinue, il existe $K^\perp$ ouvert linéaire de $\neg F$ (où L linéairement compact de F) tel que $\phi(U^\perp, K^\perp) = 0$.

Montrons que $\mathcal{W}(K, V) \subseteq \alpha^{-1}(\mathcal{W}(U^\perp, V^\perp))$. Soit $\psi \in \mathcal{L}_c(F; F)$ tel que $\psi(K) \subseteq V$. Comme pour tous $x' \in U^\perp$ et $y' \in V^\perp$, $y' \circ \psi \in K^\perp$, on a

$$\alpha(\psi)(x', y') = \phi(x', y' \circ \psi) = 0.$$

D'où $\alpha(\mathcal{W}(K, V)) \subseteq \mathcal{W}(U^\perp, V^\perp)$. On en déduit la continuité de α .

Soit $\mathcal{W}(U^\perp, V^\perp)$ un ouvert de $E \mathfrak{A} F$, on va montrer que $(\phi + \mathcal{W}(U^\perp, V^\perp)) \cap E \mathfrak{A}_f F \neq \emptyset$.

Comme α est continue, il existe un ouvert $\mathcal{W}(K, V)$ de $\mathcal{L}_c(F; F)$ tel que $\alpha(\mathcal{W}(K, V)) \subseteq \mathcal{W}(U^\perp, V^\perp)$. D'après la Proposition III.92 page 139, l'espace des fonctions linéaires continues de rang fini, c'est-à-dire l'image de $\neg F \mathfrak{A} F$, est dense dans $\mathcal{L}_c(F; F)$. On en déduit l'existence de $\zeta \in \mathcal{L}_c(F; F)$ de rang fini telle que $id_F - \zeta \in \mathcal{W}(K, V)$. En appliquant α , on obtient que $\phi - \alpha(\zeta) \in \mathcal{W}(U^\perp, V^\perp)$. Or, $\alpha(\zeta)$ est dans $E \mathfrak{A}_f F$. En effet, ζ est de rang fini. On en déduit que $E \mathfrak{A}_f F$ est dense dans $E \mathfrak{A} F$. $\square$

La série de définition et de lemme qui suivent vont nous permettre de montrer l'associativité du produit tensoriel inductif.

Définition III.29. Soient E_1 et E_2 deux espaces de Lefschetz complets et linéairement bornologiques. Pour tous $x'_1 \in \neg E_1$ et $x'_2 \in \neg E_2$, on définit $x'_1 \otimes x'_2 \in \neg(E_1 \mathfrak{A} E_2)$ par :

$$\forall \alpha \in \mathcal{L}_h(\neg E_1 \times \neg E_2), \langle x'_1 \otimes x'_2, \alpha \rangle = \alpha(x'_1, x'_2).$$

On note $\neg E_1 \otimes_f \neg E_2$ l'espace vectoriel engendré par les $x'_1 \otimes x'_2$.

Lemme III.105. [FG65] Soient E_1 et E_2 deux espaces de Lefschetz complets et linéairement bornologiques. Soit A' un sous-espace de $\neg(E_1 \mathfrak{A} E_2)$. Alors A' est équicontinu si et seulement si il existe B'_1 linéairement borné de $\neg E_1$ et B'_2 linéairement borné de $\neg E_2$ tels que $A' \subseteq \overline{B'_1 \otimes_f B'_2}$.

Démonstration. Par équicontinuité de A' , il existe un voisinage linéaire $\mathcal{W}$ de $E_1 \mathfrak{A} E_2$ tel que $A' \subseteq c^\perp \mathcal{W}$. Par définition de la topologie de $E_1 \mathfrak{A} E_2$, il existe U_1 ouvert linéaire de E_1 et U_2 ouvert linéaire de E_2 tel que $\mathcal{W}(U_1^\perp, U_2^\perp) \subseteq \mathcal{W}$ et $A' \subseteq \mathcal{W}(U_1^\perp, U_2^\perp)^\perp$. Posons $B'_1 = U_1^\perp$ et $B'_2 = U_2^\perp$, ce sont des linéairement bornés respectifs de $\neg E_1$ et de $\neg E_2$. On vérifie que $\mathcal{W}(B'_1, B'_2)^\perp = (\perp B'_1 \otimes_f B'_2)^\perp$. Or, $E_1 \mathfrak{A} E_2$ est complet donc $\neg(E_1 \mathfrak{A} E_2) = \neg_{\mathcal{C}}(E_1 \mathfrak{A} E_2)$. D'après la Proposition III.58 page 113, $(\perp B'_1 \otimes_f B'_2)^\perp = \overline{B'_1 \otimes_f B'_2}$. $\square$

Lemme III.106. Soient E_1 et E_2 deux espaces de Lefschetz complets et linéairement bornologiques. L'espace $\neg E_1 \otimes_f \neg E_2$ est dense dans $\neg(E_1 \mathfrak{A} E_2)$.

Démonstration. Considérons l'application bilinéaire :

$$\begin{aligned} \xi : \neg E_1 \times \neg E_2 &\rightarrow \neg(E_1 \mathfrak{A} E_2) \\ (x'_1, x'_2) &\mapsto x'_1 \otimes x'_2 : \alpha \mapsto \alpha(x'_1, x'_2). \end{aligned}$$

Vérifions que ξ est bien définie. Comme $\mathbb{k} \cdot x'_1$ et $\mathbb{k} \cdot x'_2$ sont linéairement bornés, $\mathcal{W}(\mathbb{k} \cdot x'_1, \mathbb{k} \cdot x'_2)$ est un ouvert de $E_1 \mathfrak{A} E_2$. Or $\mathcal{W}(\mathbb{k} \cdot x'_1, \mathbb{k} \cdot x'_2) \subseteq \ker(x'_1 \otimes x'_2)$ donc $x'_1 \otimes x'_2$ est une forme linéaire continue.

Vérifions que ξ est hypocontinue. Soient $\mathcal{W}$ un ouvert de $\neg(E_1 \mathfrak{A} E_2)$ et B'_1 linéairement borné de $\neg E_1$. Par définition de la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement bornés, il existe A linéairement borné dans $E_1 \mathfrak{A} E_2$ tel que $A^\perp \subseteq \mathcal{W}$. D'après la caractérisation

des linéairement bornés de $E_1 \mathfrak{A} E_2$, il existe un ouvert linéaire V'_2 de $\neg E_2$ tel que $A(B'_1, V'_2) = 0$. On en déduit que $B'_1 \otimes_f V'_2 \subseteq A^\perp \subseteq \mathcal{W}$ puis que $\xi(B'_1, V'_2) \subseteq \mathcal{W}$.

Montrons que $\xi(\neg E_1, \neg E_2)$ est dense dans $\neg(E_1 \mathfrak{A} E_2)$. Soit $\alpha \in \neg(E_1 \mathfrak{A} E_2)$. Comme $\mathbb{k} \cdot \alpha \subseteq (\perp \ker(\alpha))$ est équicontinu, il existe un linéairement borné B'_1 de $\neg E_1$ et un linéairement borné B'_2 de $\neg E_2$ tels que $\mathbb{k} \cdot \alpha \subseteq \overline{B'_1 \otimes_f B'_2}$. On en déduit que $\alpha \in \xi(B'_1, B'_2)$. $\square$

Proposition III.107. [FG65, §2.2, Th.2.13] Soient $(E_i)_{i \leq n}$ une famille d'espaces de Lefschetz complets. Soit $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$ une partition de $\{1, \dots, n\}$. Il existe un homéomorphisme linéaire

$$\mathfrak{A}_{\lambda \in L} \left(\mathfrak{A}_{i \in I_\lambda} E_i \right) \simeq \mathcal{L}_h(\neg E_1 \times \dots \times \neg E_n).$$

On note $\mathfrak{A}_{i \leq n} E_i = \mathcal{L}_h(\neg E_1 \times \dots \times \neg E_n)$.

Démonstration. Montrons que l'application linéaire suivante est un homéomorphisme linéaire :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : (E_1 \mathfrak{A} E_2) \mathfrak{A} E_3 &\rightarrow \mathcal{L}_h(\neg E_1 \times \neg E_2 \times \neg E_3) \\ \phi &\mapsto \tilde{\phi} : x'_1, x'_2, x'_3 \mapsto \phi(x'_1, x'_2, x'_3). \end{aligned}$$

Vérifions que $\mathcal{T}$ est bien définie. Soit $\phi \in (E_1 \mathfrak{A} E_2) \mathfrak{A} E_3 = \mathcal{L}_h(\neg(E_1 \mathfrak{A} E_2), \neg E_3)$. Montrons que $\tilde{\phi}$ est hypocontinue.

- Soient B'_1 linéairement borné dans $\neg E_1$ et B'_2 linéairement borné dans $\neg E_2$. Alors, $B'_1 \otimes_f B'_2$ est équicontinu donc linéairement borné dans $\neg(E_1 \mathfrak{A} E_2)$. Comme ϕ est bilinéaire hypocontinue, il existe V'_3 ouvert linéaire de $\neg E_3$ tel que $\phi(B'_1 \otimes_f B'_2, V'_3) = 0$ donc $\tilde{\phi}(B'_1, B'_2, V'_3) = 0$.
- Soient B'_1 linéairement borné dans $\neg E_1$ et B'_3 linéairement borné dans $\neg E_3$. Comme ϕ est bilinéaire hypocontinue, il existe $\mathcal{W}$ ouvert linéaire de $\neg(E_1 \mathfrak{A} E_2)$ tel que $\phi(\mathcal{W}, B'_3) = 0$. Par définition de la topologie sur $\neg(E_1 \mathfrak{A} E_2)$, il existe A linéairement borné de $E_1 \mathfrak{A} E_2$ tel que $A^\perp \subseteq \mathcal{W}$. D'après la caractérisation des linéairement borné dans $E_1 \mathfrak{A} E_2$, il existe V'_2 tel que $A(B'_1, V'_2) = 0$. On en déduit que $B'_1 \otimes_f V'_2 \subseteq \mathcal{W}$, donc $\tilde{\phi}(B'_1, V'_2, B'_3) = 0$.
- Le dernier cas se traite de façon similaire au précédent.

La continuité de $\mathcal{T}$ vient de :

$$\mathcal{T}(\mathcal{W}(B'_1 \otimes_f B'_2), B'_3) \subseteq \mathcal{W}(B'_1, B'_2, B'_3).$$

Montrons que $\mathcal{T}$ est ouverte. Soit $\mathcal{W}$ ouvert linéaire de $\mathcal{L}_h(\neg(E_1 \mathfrak{A} E_2) \times \neg E_3)$. Par définition de la topologie, il existe A' équicontinu dans $\neg(E_1 \mathfrak{A} E_2)$ et B'_3 équicontinu dans $\neg E_3$ tels que $\mathcal{W}(A', B'_3) \subseteq \mathcal{W}$. Comme A' est équicontinu, il existe B'_1 linéairement borné de $\neg E_1$ et B'_2 linéairement borné de $\neg E_2$ tels que $A' \subseteq \overline{B'_1 \otimes_f B'_2}$. On en déduit que $\mathcal{W}(B'_1, B'_2, B'_3) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{W}(A', B'_3))$. On conclut en rappelant que E_1 et E_2 sont linéairement bornologiques et complets, les linéairement bornés de $\neg E_1$ et de $\neg E_2$ coïncident avec les équi-continus.

On vérifie facilement l'injectivité de $\mathcal{T}$. Montrons sa surjectivité. Soit $\tilde{\phi} \in \mathcal{L}_h(\neg E_1, \neg E_2, \neg E_3)$. On définit ϕ par :

$$\begin{aligned} \phi : \neg E_1 \otimes_f \neg E_2 \times \neg E_3 &\rightarrow \mathbb{k} \\ (x'_1 \otimes x'_2, x'_3) &\mapsto \langle x'_1 \otimes x'_2, \tilde{\phi}(\cdot, \cdot, x'_3) \rangle = \tilde{\phi}(x'_1, x'_2, x'_3). \end{aligned}$$

On montre que ϕ est hypocontinue en montrant qu'elle est séparément continue et continue sur les produits d'équicontinus. Comme $\neg E_1 \otimes_f \neg E_2$ est dense dans $\neg(E_1 \wp E_2)$ et $\neg E_3$ est complet, on peut prolonger $\phi : \neg(E_1 \wp E_2) \times \neg E_3 \rightarrow \mathbb{k}$ en une fonction hypocontinue. On conclut en vérifiant que $\phi = \mathcal{T}(\phi)$. $\square$

Proposition III.108. *Soient E et F deux espaces de Lefschetz complets et linéairement bornologiques. Soit $n \geq 2$. On a un homéomorphisme linéaire entre l'espaces des fonctions n -linéaires hypocontinues sur E à valeurs dans F et l'espace de fonctions :*

$$\mathcal{L}_h(\neg E \times \dots \times \neg E ; F) \simeq \mathcal{L}_c(E ; \mathcal{L}_c(\dots ; \mathcal{L}_c(E ; F))).$$

Démonstration. On va montrer le cas $n = 2$, les autres cas se montrent de façon similaire. Considérons l'application :

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{L}_h(E \times E ; F) &\rightarrow \mathcal{L}_c(E ; \mathcal{L}_c(E ; F)) \\ \phi &\mapsto x_1 \mapsto x_2 \mapsto \phi(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Montrons que ρ est bien définie. La continuité de $\rho(\phi)$ vient de l'hypocontinuité de ϕ .

Montrons que ρ est un isomorphisme. Elle est linéaire et injective. Pour la surjectivité, pour tout $f \in \mathcal{L}_c(E ; \mathcal{L}_c(E ; F))$, on définit $\phi : x_1, x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$. Montrons que ϕ est hypocontinue. Soient V un ouvert linéaire de F et B un linéairement borné de E . Comme $\mathcal{W}(B ; V)$ est un ouvert linéaire de $\mathcal{L}_c(E ; F)$, il existe un ouvert linéaire U_1 de E tel que $f(1) \subseteq \mathcal{W}(B ; V)$. On en déduit que $\phi(1, B) \subseteq V$. Par ailleurs, $f(B)$ est linéairement borné dans $\mathcal{L}_c(E ; F) \simeq \neg E \wp F$. D'après la caractérisation des linéairement bornés dans $\neg E \wp F$, il existe un linéairement borné B' de $\neg E$, autrement dit un ouvert linéaire $U_2 = {}^\perp B'$ de E (rappelons que E est supposé linéairement bornologique) tel que $f(B)(U_2) \subseteq V$. On en déduit que $\phi(B, U_2) \subseteq V$. On a donc montré que ϕ est hypocontinue.

Pour conclure, pour tout B_1 linéairement borné de E et B_2 linéairement borné de E et V ouvert linéaire de F , on a :

$$\rho(\mathcal{W}(B_1 \times B_2 ; V)) = \mathcal{W}(B_1 \mathcal{W}(B_2 ; V)).$$

On en déduit que ρ est un homéomorphisme linéaire. $\square$

Le cas finitaire. Rappelons que tout espace de Lefschetz finitaire est linéairement bornologique (voir l'Exemple III.4 page 131).

Étant donné que d'une part nous avons déjà étudié l'espace de fonctions dans le cas finitaire (voir les Propositions III.48 page 105 et III.69 page 121) et que d'autre part le dual d'un espace de Lefschetz finitaire est un espace de Lefschetz finitaire (voir la Proposition III.70 page 122),

la proposition qui suit se déduit directement des propriétés des espaces de finitude relationnels et des propriétés des espaces de fonctions. Pourtant, la démonstration de ce théorème fait apparaître le lien entre les ouverts linéaires de $E_A \mathfrak{Y} E_B$ et de $E_{A \mathfrak{Y} B}$. Elle justifie donc les choix effectués dans la définition de $\mathfrak{Y}$.

Proposition III.109. *Soient E et F deux espaces de Lefschetz finitaires. L'espace $E \mathfrak{Y} F$ est un espace de Lefschetz finitaire.*

Démonstration. Soient (E, ϕ, A) et (F, ψ, B) des cartes respectives de E et de F . On va montrer que $E_A \mathfrak{Y} E_B$ est linéairement homéomorphe à $E_{A \mathfrak{Y} B}$. On en déduira l'homéomorphisme linéaire entre $E \mathfrak{Y} F$ et $E_{A \mathfrak{Y} B}$ par la fonctorialité de $\mathfrak{Y}$.

Rappelons que d'après le Lemme III.14 page 80, $(e_a)_{a \in |A|}$ est une base Schauder de E_A . En particulier, les projections $e'_a : x = (x_b)_{b \in |A|} \mapsto x_a$ est une forme linéaire continue sur E_A pour tout $a \in |A|$. Remarquons que puisque $\neg E_A$ est homéomorphe à $E_{A^\perp}$ et que c'est homéomorphisme associe $e'_a \in \neg E_A$ à $e_a \in E_{A^\perp}$, la famille $(e'_a)_{a \in |A|}$ est une base de Schauder de $\neg E_A$.

Commençons par montrer que l'application linéaire

$$\begin{aligned} \phi_0 : E_A \mathfrak{Y} E_B &\rightarrow E_{A \mathfrak{Y} B} \\ \rho &\mapsto (\rho(e'_a, e'_b))_{a \in |A|, b \in |B|} \end{aligned}$$

est un homéomorphisme linéaire dont l'inverse est

$$\begin{aligned} \phi_0^{-1} : E_{A \mathfrak{Y} B} &\rightarrow E_A \mathfrak{Y} E_B \\ (\rho_{a,b})_{a \in |A|, b \in |B|} &\mapsto \rho : (e'_a, e'_b) \mapsto \rho_{a,b} \end{aligned}$$

Les deux fonctions sont bien à valeurs dans les espaces annoncés. En effet, d'après la Proposition III.101 page 145,

$$\rho \in E_A \mathfrak{Y} E_B \iff \begin{cases} \forall V \in \mathcal{V}_{E_B}, \exists K \in \mathfrak{C}_{E_A}, \rho(K^\perp, V^\perp) = 0 \\ \forall U \in \mathcal{V}_{E_A}, \exists L \in \mathfrak{C}_{E_B}, \rho(U^\perp, L^\perp) = 0 \end{cases}$$

Or d'après la Proposition III.68 page 121, un sous-espace K de E_A (resp. L de E_B) est linéairement compact si et seulement si son support est finitaire : $|K| \in \mathcal{F}(A)$ (resp. $|L| \in \mathcal{F}(B)$). De plus, d'après la Proposition III.4 page 75 la topologie sur E_A (resp. E_B) est engendrée par les $\mathcal{V}(u')_{E_A}$ pour $u' \in \mathcal{F}(A)^\perp$ (resp. $\mathcal{V}(v')_{E_B}$ pour $v' \in \mathcal{F}(B)^\perp$). On en déduit l'équivalence

$$\rho \in E_A \mathfrak{Y} E_B \iff \begin{cases} \forall v' \in \mathcal{F}(B)^\perp, \exists u \in \mathcal{F}(A), \rho(\mathcal{K}(u)_A^\perp, \mathcal{V}(v')_B^\perp) = 0 \\ \forall u' \in \mathcal{F}(A)^\perp, \exists v \in \mathcal{F}(B), \rho(\mathcal{V}(u')_A^\perp, \mathcal{K}(v)_B^\perp) = 0 \end{cases}$$

On en déduit enfin les équivalences

$$\begin{aligned} \rho \in E_A \mathfrak{Y} E_B &\iff \begin{cases} \forall v' \in \mathcal{F}(B)^\perp, \exists u \in \mathcal{F}(A), \rho \cdot v' \subseteq u \\ \forall u' \in \mathcal{F}(A)^\perp, \exists v \in \mathcal{F}(B), \rho \cdot u' \subseteq v \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \forall v' \in \mathcal{F}(B)^\perp, \rho \cdot v' \in \mathcal{F}(A) \\ \forall u' \in \mathcal{F}(A)^\perp, \rho \cdot u' \in \mathcal{F}(B) \end{cases} \end{aligned}$$

ϕ_0 est injective car si ρ est non nulle, il existe $x' \in \neg E_A$ et $y' \in \neg E_B$ tels que $\rho(x', y') \neq 0$. Comme $(e'_a)_{a \in |A|}$ est une base de Schauder de $\neg E_A$, il existe $a \in |A|$ et $b \in |B|$ tels que $\rho(e'_a, e'_b) \neq 0$.

De plus $\phi \circ \phi^{-1} = \text{id}$ d'où la surjectivité de ϕ_0 .

On en déduit que ϕ_0 est un isomorphisme. □

III.3.3 Tenseur

En logique linéaire, le tenseur et le par sont inter-définissables par l'intermédiaire de la négation. Encore faut-il avoir la bonne notion de négation. Ici nous montrons certaines propriétés du tenseur dans le cas linéairement bornologique et complet, c'est un bifoncteur associatif et commutatif qui possède une unité (Proposition III.112 page 155) et qui vérifie la propriété universelle du quotient (Proposition III.113 page 156). Cependant, nous ne savons pas si cette construction préserve la complétude et/ou le caractère linéairement bornologique.

Le cas général. Rappelons que $\mathcal{L}_h(- \times -)$ est un bi-foncteur contravariant (voir le Fait III.95 page 141) et $\neg_{\mathcal{C}}$ est un foncteur contravariant (voir la Proposition III.73 page 124). Ils définissent tous deux des espaces de fonctions (multi-)linéaires munis de la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts.

Définition III.30. Soient E et F des espaces de Lefschetz complets. Le produit tensoriel de E et de F est l'espace

$$E \otimes F \stackrel{\text{def}}{=} \neg_{\mathcal{C}}(\mathcal{L}_h(E \times F)).$$

L'opérateur $\otimes$ est un bifoncteur sur la catégorie des espaces de Lefschetz.

Lemme III.110. Soient E et F deux espaces de Lefschetz. Pour tout $x \in E$ et $y \in F$,

$$\begin{aligned} x \otimes y : \mathcal{L}_h(E \times F) &\rightarrow \mathbb{k} \\ \phi &\mapsto \phi(x, y) \end{aligned}$$

est un élément de $E \otimes F$.

Démonstration. Pour tous $x \in E$ et $y \in F$, $\mathbb{k} \cdot x$ et $\mathbb{k} \cdot y$ sont des linéairement compacts respectifs de $\neg E$ et de $\neg F$. On en déduit que $\mathcal{W}(\mathbb{k} \cdot x \times \mathbb{k} \cdot y)$ est un ouvert de $\mathcal{L}_h(E \times F)$. Or $\mathcal{W}(\mathbb{k} \cdot x \times \mathbb{k} \cdot y) \subseteq \ker(x \otimes y)$. On en déduit que $x \otimes y$ est continue. □

Pour tout espace de Lefschetz E , nous allons construire une application linéaire continue entre $E \otimes \mathbb{k}$ et E .

Remarquons que $\mathcal{L}_h(E \times \mathbb{k})$ est homéomorphe à $\neg_{\mathcal{C}} E$. En appliquant le foncteur $\neg_{\mathcal{C}}$, on obtient un homéomorphisme entre $E \otimes \mathbb{k}$ et $\neg_{\mathcal{C}} \neg_{\mathcal{C}} E$. Or, d'après la Proposition III.76 page 125, $\text{ev}_E^{-1} : \neg_{\mathcal{C}} \neg_{\mathcal{C}} E \rightarrow E$ est un isomorphisme continu.

On en déduit la Proposition suivante.

Proposition III.111. Soit E un espace de Lefschetz. L'application linéaire $\iota : \neg\mathcal{L}_h(\neg E, \mathbb{k}) \simeq E \xrightarrow{\text{ev}^{-1}} E$ définie par

$$\begin{aligned} \iota : E \otimes \mathbb{k} &\rightarrow E \\ \phi &\mapsto x \text{ tel que } \forall x' \in \neg_{\mathcal{C}}E, \langle x', x \rangle = \phi(x', 1), \end{aligned}$$

est un isomorphisme continu.

Comme en général ev n'est pas un homéomorphisme, ι n'est pas en général un homéomorphisme.

Pour avoir un homéomorphisme, il nous faut passer dans le cas réflexif. Nous allons utiliser le cadre des linéairement bornologiques que nous avons introduit pour assurer la réflexivité.

Le cas bornologique. Soient E, F et G des espaces linéairement bornologiques complets.

Rappelons les différentes propriétés que nous avons établies.

D'après la Proposition III.63 page 117, sur tout espace de Lefschetz complet, les linéairement bornés fermés et linéairement compacts coïncident. On note alors $\neg = \neg_{\mathcal{C}} = \neg_{\mathcal{B}}$.

D'après la Proposition III.87 page 133, $\neg E, \neg F$ et $\neg G$ sont complets et linéairement bornologiques.

De plus, d'après la Proposition III.100 page 145, les topologies de $E \mathcal{B} F$ et de $\mathcal{L}_h(\neg E, \neg F)$ sont équivalentes. On peut donc identifier les deux espaces. Enfin, tout espace complet et linéairement bornologique est réflexif (Théorème III.5 page 133).

Enfin, d'après la Proposition III.93 page 140, comme $\neg E$ et $\neg F$ sont complets, $\mathcal{L}_h(\neg E, \neg F)$ est complet, on peut donc noter $\neg\mathcal{L}_h(\neg E, \neg F) = \neg_{\mathcal{C}}\mathcal{L}_h(\neg E, \neg F)$.

Sur la sous-catégorie des espaces de Lefschetz linéairement bornologiques et complets, le produit tensoriel est un bi-foncteur symétrique et associatif.

Proposition III.112. Soient E, F et G des espaces de Lefschetz complets et linéairement bornologiques. On a les homéomorphismes linéaires suivants

$$\begin{aligned} E \otimes \mathbb{k} &\simeq E \\ \neg\mathcal{L}_h(E \times F \times G) &\simeq (E \otimes F) \otimes G \\ E \otimes F &\simeq \neg(\neg E \mathcal{B} \neg F) \simeq \neg\mathcal{L}_c(E, \neg F). \end{aligned}$$

Démonstration. Comme ev est un homéomorphisme entre E et $\neg\neg E$,

$$E \otimes \mathbb{k} \simeq \neg\neg E \xrightarrow{\text{ev}^{-1}} E$$

est à son tour un homéomorphisme.

D'après la Proposition III.107 page 151 d'associativité de $\mathcal{B}$, on a $\neg E \mathcal{B} \neg F \mathcal{B} \neg G \simeq (\neg E \mathcal{B} \neg F) \mathcal{B} \neg G$. On en déduit,

$$\mathcal{L}_h(\neg\neg E \times \neg\neg F \times \neg\neg G) \simeq \mathcal{L}_h(\neg[\mathcal{L}_h(\neg\neg E \times \neg\neg F)] \times \neg\neg G).$$

On utilise la réflexivité de E, F et G et on applique le foncteur $\neg$. On a donc

$$\neg\mathcal{L}_h(E \times F \times G) \simeq (E \otimes F) \otimes G.$$

□

Proposition III.113. Soient E et F des espaces de Lefschetz complets et linéairement bornologiques. Le produit tensoriel de E et de F vérifie la propriété universelle du tenseur, i.e. pour toute fonction bilinéaire continue f sur $E \otimes F$ il existe une unique fonction bilinéaire hypocontinue ϕ sur $E \times F$ telle que $f(x \otimes y) = \phi(x, y)$

$$\begin{array}{ccc}
 x \otimes y & & E \otimes F \xrightarrow{f} G \\
 \uparrow \otimes & & \uparrow \phi \\
 (x, y) & & E \times F
 \end{array}$$

Il existe un homéomorphisme linéaire entre $\mathbf{Lef}(E \otimes F, G)$ et $\mathbf{Lef}(E, \mathcal{L}_c(F, G))$

Démonstration. Montrons que $\otimes$ est hypocontinue. Soit A un linéairement compact de $\neg E \mathcal{A} \neg F$. Soit K un linéairement compact de E . On montre qu'il existe un ouvert linéaire V de F tel que $\otimes(K \times V) \subseteq A$.

D'après la Proposition III.102 page 146, pour tout linéairement compact K de E (resp. L de F), il existe un ouvert linéaire V de F (resp. U de E) tel que $A(K \times V) = 0$ (resp. $A(U \times L) = 0$). On en déduit que $\otimes(K \times V) \subseteq A^\perp$ (resp. $\otimes(U \times L) \subseteq A^\perp$) donc $\otimes$ est hypocontinue.

Soit $\phi : E \times F \rightarrow \mathbb{k}$ bilinéaire hypocontinue. Comme $E \otimes F = \neg \mathcal{L}_h(E \times F)$, $f : \rho \mapsto \langle \rho, \phi \rangle$ est l'unique fonction qui fait commuter le diagramme.

Soit $\phi : E \times F \rightarrow G$ bilinéaire hypocontinue. Comme G est réflexif $G \simeq \neg \neg G$, $f : \rho \mapsto \langle z', \rho \rangle \circ \phi$ est l'unique fonction qui fait commuter le diagramme. $\square$

Le cas finitaire. Nous montrons que la notion de tenseur que nous avons choisit généralise le tenseur des espaces de finitude.

Proposition III.114. Soient A et B deux espaces de finitude relationnels. Le produit tensoriel $E_A \otimes E_B$ est homéomorphe à l'espace de Lefschetz finitaire $E_{A \otimes B}$.

Démonstration. En effet, d'après les Propositions III.112 page 155, III.49 page 106 et III.109 page 153,

$$E_A \otimes E_B \simeq \neg(\neg E_A \mathcal{A} \neg E_B) \simeq \neg(E_{\neg A} \mathcal{A} E_{\neg B}) \simeq \neg E_{\neg A \mathcal{A} \neg B} \simeq E_{\neg(\neg A \mathcal{A} \neg B)} \simeq E_{A \otimes B}$$

$\square$

Proposition III.115. Soient E et F deux espaces de Lefschetz finitaires. Le produit tensoriel de E et de F est un espace de Lefschetz finitaire.

Démonstration. Soient (E, ϕ, A) et (F, ψ, B) des cartes respectives de E et de F . Comme $\otimes$ est un bifoncteur, $E \otimes F \xrightarrow{\phi \otimes \psi} E_A \otimes E_B$ est un homéomorphisme. D'où $E \otimes F \simeq E_{A \otimes B}$. $\square$

Proposition III.116. La catégorie $\mathbf{LinFin}$ des espaces de Lefschetz finitaires et des fonctions linéaires continues est une catégorie symétrique monoïdale close munie des produits et des co-produits et $*$ -autonome.

III.4 Structure exponentielle

L'une des propriétés intéressantes des espaces de finitude est que les fonctions du type $!A \multimap B$ vérifient la formule de Taylor. Nous allons partir de cette propriété afin de définir la structure exponentielle des espaces de Lefschetz. Nous commençons par définir un espace de polynômes sur E à valeurs dans F dont le complété (l'espace des fonctions analytiques) interprétera le type $!A \multimap B$. La modalité exponentielle est ensuite construite en prenant le dual des fonctions analytiques à valeurs dans le corps $\mathbb{k}$. Nous démontrons notamment que $!$ ainsi construite est une co-monade sur la famille des espaces de Lefschetz. Nous définissons aussi la structure de co-monoïde. Pour autant, nous ne savons pas au moment de la rédaction de ce document si la catégorie des espaces de Lefschetz complets et bornologiques est stable par cette construction. Enfin, nous montrons que les fonctions du type $!E \multimap F$ vérifient la formule de Taylor. Dans le cas finitaire, on verra que l'on retrouve les constructions de Ehrhard [Ehr05, Ehr07]. On montre notamment que la catégorie des espaces de Lefschetz finitaires est stable par les modalités exponentielles.

Dans cette partie, on suppose le corps $\mathbb{k}$ infini.

III.4.1 Espace de polynômes et de séries formelles, *Pourquoi pas ?*

On va revenir sur les formules pour calculer les exponentielles libres. Nous les avons présentées dans le préambule au paragraphe page 19. Dans le paragraphe page 63 du chapitre précédent, nous avons montré qu'elles ne permettent pas de calculer l'exponentielle libre des espaces de Finitude relationnels. Nous allons voir que l'on rencontre le même problème dans les espaces de Lefschetz finitaires. De plus, nous allons donner une interprétation de ce problème en termes de polynômes et de séries entières.

III.4.1.a Le cas général.

Polynômes homogènes de degré n . Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient E et F deux espaces de Lefschetz complets. Rappelons que $\mathcal{L}_h(\overbrace{E \times \dots \times E}^n ; F)$ est l'espace de Lefschetz des formes n -linéaires hypocontinues (voir la Définition III.26 page 141). De plus, pour F fixé, $\mathcal{L}_h(- \times \dots \times - ; F)$ un n -foncteur contravariant en chacune de ses variables. Nous allons calculer l'égaliseur des symétries $E \times \dots \times E \rightarrow E \times \dots \times E$.

Soit $\phi \in \mathcal{L}_h(\overbrace{E \times \dots \times E}^n ; F)$. On note $P(\phi)$ le polynôme homogène

$$\begin{aligned} P(\phi) : E &\rightarrow \mathbb{k} \\ x &\mapsto \phi(\overbrace{x, \dots, x}^n). \end{aligned}$$

Définition III.31. Soient E et F deux espaces de Lefschetz. Une fonction $f : E \rightarrow F$ est un **polynôme homogène de degré n** lorsqu'il existe une forme n -linéaire hypocontinue $\phi : \times_{1 \leq i \leq n} E \rightarrow F$ telle que

$$\forall x \in E, f(x) = \phi(\underbrace{x, \dots, x}_n).$$

On note $\text{Pol}_{\mathbb{K}}^n(E; F)$ l'espace des polynômes homogènes de degré n . Lorsque F est le corps $\mathbb{K}$, on omet l'espace d'arrivée et on note $\text{Pol}_{\mathbb{K}}^n(E)$ l'espace des formes polynomiales homogènes de degré n .

Lemme III.117. *Soient E et F des espaces de Lefschetz complets. L'application linéaire surjective*

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \mathcal{L}_h(E \times \dots \times E; F) &\rightarrow \text{Pol}_{\mathbb{K}}^n(E; F) \\ \phi &\mapsto \mathcal{P}(\phi) \end{aligned}$$

est continue et ouverte.

Démonstration. Rappelons que d'après la Proposition III.93 page 140, l'espace des formes n -

linéaires symétriques $\mathcal{L}_h(\overbrace{E \times \dots \times E}^n; F)$ est un espace de Lefschetz complet.

Soit W un ouvert de $\mathcal{L}_h(E \times \dots \times E; F)$. Il existe $K_1 \dots K_n$ des linéairement compacts de E et V un ouvert linéaire de F tels que $\mathcal{W}(K_1, \dots, K_n; V) \subseteq W$. Or $\mathcal{W}(\cap_{i \leq n} K_i) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{W}(K_1, \dots, K_n; F)) \subseteq V$. Donc $\mathcal{P}$ est ouverte.

Soit W un ouvert linéaire de $\text{Pol}_{\mathbb{K}}^n(E; F)$. Il existe V un ouvert linéaire de F et K un linéairement compact de E tels que $\mathcal{W}(K; V) \subseteq W$. Or $\mathcal{W}(K \times \dots \times K; V) \subseteq \mathcal{P}^{-1}(\mathcal{W}(K; V)) \subseteq \mathcal{P}^{-1}(W)$. Ce qui montre la continuité de $\mathcal{P}$. $\square$

Le lemme suivant montre que la restriction d'un polynôme homogène à un linéairement compact est continue.

Lemme III.118. *Soient E et F deux espaces de Lefschetz et $n \in \mathbb{N}$.*

Soit ϕ une fonction n -linéaire sur $E \times \dots \times E$ à valeurs dans F . Pour tout $x \in E$, on pose $P(x) = \phi(x, \dots, x)$.

Alors, $P \in \text{Pol}_{\mathbb{K}}^n(E; F)$ si et seulement si pour tout K linéairement compact de E , la restriction de P à K est une fonction continue sur E à valeurs dans F .

Démonstration. Supposons ϕ hypocontinue (voir la Définition III.26 page 141), alors pour tout linéairement compact K de E et pour tout ouvert linéaire W de F , il existe V ouvert linéaire de E tel que $\phi(K, \dots, K, V) \subseteq W$. On en déduit que $P(\phi)(V \cap K) \subseteq W$.

Réciproquement, supposons que la restriction de P à tout linéairement compact soit continue. Alors pour tous K linéairement compact de E et V ouvert linéaire de F , il existe U ouvert linéaire de E tel que $P(K \cap U) = V$ (voir le Lemme III.118 page 158). On en déduit que $h(K \cap U \times \dots \times K \cap U) \subseteq V$. $\square$

Lemme III.119. *Soient E et F deux espaces de Lefschetz linéairement bornologiques et complets. La fonction*

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Pol}_{\mathbb{K}}^n(E; F) &\rightarrow \mathcal{L}_h(\overbrace{E \times \dots \times E}^n; F) \\ P &\mapsto \frac{1}{2^n n!} \sum_{\substack{\epsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq n}} \epsilon_1 \dots \epsilon_n P\left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right) \end{aligned}$$

est bien définie, linéaire et continue. C'est l'inverse de $\mathcal{P}$.

Démonstration. Soit $P \in \text{Pol}_{\mathbb{k}}^n(E ; F)$. Comme $\Phi(P)$ est n -linéaire et $P(x) = \phi(P)(x)$, $\Phi(P)$ est hypocontinue d'après le Lemme III.118 précédent utilisé deux fois.

Montrons que $\Phi(P)$ est hypocontinue. Pour cela nous allons utiliser la Proposition III.99 page 143. Il nous suffit de montrer que $\Phi(P)$ est séparément continue et continue sur tout produit de linéairement compacts.

Montrons que $\Phi(P)$ est séparément continue. Soient $x_1, \dots, x_n \in E$. Soit V un ouvert linéaire de E . Soit K_0 linéairement compact de E . Comme la somme finie des linéairement compacts $K = K_0 + \mathbb{k} \cdot x_1 + \dots + \mathbb{k} \cdot x_n$ est linéairement compacte, il existe $U \in E$ tel que $\Phi(P)(K \cap U \times \dots \times K \cap U) \subseteq V$. On en déduit que $\Phi(P)(K_0 \cap U, x_1, \dots, x_n) \subseteq V$. On a donc montré que $x \mapsto \Phi(P)(x, x_1, \dots, x_n)$ est linéaire et continue sur tout linéairement compact de E , i.e.

$$\forall K \in \mathfrak{C}_E, \exists x' \in \neg E, \forall x \in K, \Phi(P)(x, x_1, \dots, x_n) = \langle x', x \rangle.$$

Comme E est complet et linéairement bornologique, $\neg E$ est complet et E est réflexif. Donc tout linéairement compact K de E est l'orthogonal d'un ouvert linéaire de E . On utilise la caractérisation du complété de la Proposition III.23 page 88 pour montrer que $x \mapsto \Phi(P)(x, x_1, \dots, x_n)$ est dans $\widetilde{\neg E} = \neg E$, elle est donc continue sur tout E .

Montrons que $\Phi(P)$ est continue sur tout produit de linéairement compacts. Soit V un ouvert linéaire de F . Soient $K_1, \dots, K_n$ des linéairement compacts de E . La somme $K = K_1 + \dots + K_n$ est linéairement compacte. Il existe donc U ouvert linéaire de E tel que $\Phi(P)(K \cap U \times \dots \times K \cap U) \subseteq V$. Or, $\Phi(P)((K_1 \cap U) \times \dots \times (K_n \cap U)) \subseteq V$, d'où la continuité de $\Phi(P)$ sur $K_1 \times \dots \times K_n$.

Φ est continue puisque P est ouverte et $\Phi \circ P = \text{id}$. □

Topologies et espaces de polynômes. L'espace des polynômes homogènes de degré n hérite de la topologie de l'espace des fonctions hypocontinues (voir la Proposition III.98 page 142).

Proposition III.120. Soient E et F des espaces de Lefschetz.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace $\text{Pol}_{\mathbb{k}}^n(E ; F)$ est un espace de Lefschetz lorsqu'il est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts, engendrée par

$$\mathcal{W}(K, V) = \{P \in \text{Pol}_{\mathbb{k}}^n(E ; F) ; P(K) \subseteq V\}$$

où K parcourt les linéairement compacts de E .

Lorsque E et F sont complets, $\text{Pol}_{\mathbb{k}}^n(E ; F)$ est un espace complet.

Démonstration. Soit $(P_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ un réseau de Cauchy de $\text{Pol}_{\mathbb{k}}^n(E ; F)$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe ϕ_γ fonction n -linéaire hypocontinue telle que

$$P(\phi_\gamma) = P_\gamma.$$

Montrons que $(\phi_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ est un réseau de Cauchy dans $\mathcal{L}_h(E \times \dots \times E ; F)$. Soit W un ouvert linéaire de $\mathcal{L}_h(E \times \dots \times E ; F)$. Il existe $K_1 \dots K_n$ des linéairement compacts de E et V un ouvert linéaire de F tels que $\mathcal{W}(K_1, \dots, K_n ; V) \subseteq W$. Or la somme de sous-espace linéairement compacts est linéairement compacte (voir la Proposition III.53 page 110), donc

$\mathcal{W}(K_1 + \dots + K_n ; V)$ est un ouvert linéaire de $\text{Pol}_{\mathbb{K}}^n(E ; F)$ et $(P_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ est un réseau de Cauchy, il existe donc $\gamma \in \Gamma$ tel que

$$\forall \alpha, \beta \geq \gamma, P_\alpha - P_\beta \in \mathcal{W}(K_1 + \dots + K_n ; V)$$

Or $P_\alpha - P_\beta = P(\phi_\alpha - \phi_\beta) \in \mathcal{W}(K_1 + \dots + K_n ; V)$. On en déduit que $(\phi_\alpha - \phi_\beta)(K_1 + \dots + K_n) \subseteq V$ puis que

$$\phi_\alpha - \phi_\beta \in \mathcal{W}(K_1, \dots, K_n ; V)$$

On a donc montré que $(\phi_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ est un réseau de Cauchy dans un espace complet, il est donc convergent. Comme P est continue, on en déduit que $(P_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ converge aussi. $\square$

Définition III.32. Soient E et F deux espaces de Lefschetz.

Une fonction $f : E \rightarrow F$ est dite polynomiale lorsqu'il existe un entier n et des fonctions ϕ_n n -linéaires hypocontinues sur E et à valeurs dans F telles que

$$\forall x \in E, f(x) = \sum_{i \leq n} \phi_n(\overbrace{E \times \dots \times E}^n ; F).$$

Proposition III.121. Soient E et F deux espaces de Lefschetz.

L'espace $\oplus_{n \in \mathbb{N}} \text{Pol}_{\mathbb{K}}^n(E ; F)$ est l'espace de Lefschetz des fonctions polynomiales sur E et à valeurs dans F muni de la topologie co-produit. Cette topologie admet pour système fondamental la famille

$$\mathcal{W}(\oplus_n K_n ; V) = \left\{ \sum_{i \leq n} P_n ; P_n \in \text{Pol}_{\mathbb{K}}^n(E ; F) P_n(K_n) \subseteq V \right\}$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}$, K_n est linéairement compact dans E et V est un ouvert linéaire de F .

Si E et F sont complets, alors $\oplus_{n \in \mathbb{N}} \text{Pol}_{\mathbb{K}}^n(E ; F)$ est complet.

Démonstration. On utilise la Définition page 96 de la topologie co-produit et le fait que dans les espaces vectoriels topologiques la complétude est préservée par co-produit. $\square$

Définition III.33. Soient E et F deux espaces de Lefschetz. L'espace des fonctions polynomiales muni de la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts est un espace de Lefschetz noté $\text{Pol}_{\mathbb{K}}(E ; F)$. Il admet le système fondamental

$$\mathcal{W}(K ; V) = \left\{ \sum_{i \leq n} P_n ; P_n \in \text{Pol}_{\mathbb{K}}^n(E ; F) P_n(K) \subseteq V \right\}$$

Remarquons que cette topologie est très différente de la topologie co-produit. En effet, dans la topologie co-produit on a un linéairement compact par degré. Or dans la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts, on a le même linéairement compact pour tous les degrés. Pour que ces deux topologies coïncident, il serait nécessaire que la somme infinie de linéairement compact soit linéairement compacte ce qui n'est pas le cas en général. Ceci peut toutefois arriver lorsque l'on se place en dimension finie par exemple.

Séries formelles. Lorsque E et F sont complets, l'espace des polynômes $\text{Pol}_{\mathbb{k}}(E ; F)$ n'est pas forcément complet. Intuitivement, il manque les séries entières. Nous allons donc introduire l'espace $\text{Ser}_{\mathbb{k}}(E ; F)$ et montrer que c'est le complété de $\text{Pol}_{\mathbb{k}}(E ; F)$.

Définition III.34. Soient E et F deux espaces de Lefschetz. Notons $\mathfrak{C}_E$ la famille des linéairement compacts de E et $\mathcal{V}_F$ la famille des ouverts linéaires de F . L'espace des **séries formelles** définies sur E et à valeurs dans F

$$\text{Ser}_{\mathbb{k}}(E ; F) = \{f : E \rightarrow F ; \forall K \in \mathfrak{C}_E, \forall V \in \mathcal{V}_F, \exists P_{K,V} \in \text{Pol}_{\mathbb{k}}(E), \\ \forall x \in K, f(x) - P_{K,V}(x) \in V\}.$$

muni de la topologie de la convergence sur les linéairement compacts, engendrée par le système fondamental formé des

$$\mathcal{W}(K, V) = \{f \in \text{Ser}_{\mathbb{k}}(E) ; f(K) \subseteq V\}$$

où $K \in \mathfrak{C}_E$ et $V \in \mathcal{V}_F$, est un espace de Lefschetz.

Proposition III.122. Soient E et F deux espaces de Lefschetz. Supposons que F est complet alors $\text{Ser}_{\mathbb{k}}(E, F)$ est le complété de l'espace des polynômes $\text{Pol}_{\mathbb{k}}(E, F)$.

Démonstration. Commençons par remarquer que $\text{Pol}_{\mathbb{k}}(E, F)$ est inclus dans $\text{Ser}_{\mathbb{k}}(E, F)$.

Montrons ensuite que $\text{Ser}_{\mathbb{k}}(E, F)$ est complet. Soit $(f_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ une suite de Cauchy de $\text{Ser}_{\mathbb{k}}(E, F)$, i.e.

$$\forall K \in \mathfrak{C}, V \in \mathcal{V}_F, \exists \gamma \in \Gamma, ; \forall \alpha, \beta \geq \gamma, \forall x \in K, f_\alpha(x) - f_\beta(x) \in V.$$

Étant donné que pour tout $x \in E$, $\mathbb{k} \cdot x$ est linéairement compact, on en déduit que $(f(x)_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet F . On note $f(x)$ sa limite.

Par ailleurs, pour tout $\alpha \in \Gamma$, $f_\alpha \in \text{Ser}_{\mathbb{k}}(E, F)$, par définition, pour tous $K \in \mathfrak{C}_E$ et $V \in \mathcal{V}_F$, il existe P_K^α tel que $\forall x \in K$, $P_K^\alpha(x) - f_\alpha(x) \in V$. On déduit de l'égalité

$$\forall x \in K, f(x) - P_{K,V}^\alpha(x) = f(x) - f_\alpha(x) + f_\alpha(x) - P_{K,V}^\alpha(x),$$

que $\forall x \in K$, $f(x) - P_{K,V}^\alpha(x) \in V$. D'où $f \in \text{Ser}_{\mathbb{k}}(E, F)$.

Enfin, tout $f \in \text{Ser}_{\mathbb{k}}(E, F)$ est la limite du réseau de Cauchy $(P_{K,V} ; K \in \mathfrak{C}_E, V \in \mathcal{V}_F)$ donné par la définition de $\text{Ser}_{\mathbb{k}}(E, F)$. $\square$

Dans le cas où F est égal au corps $\mathbb{k}$. Le complété $\text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$ de l'espace des formes polynomiales sur E est l'ensemble des fonctions $f : E \rightarrow \mathbb{k}$ qui, sur tout compact, coïncident avec un polynôme. En particulier, pour tout $x \in E$, $f(x)$ est une somme *finie* d'image de x par des formes *monomiales* sur E .

Cette propriété énoncée à la proposition suivante est une conséquence directe de la Proposition précédente. Nous en proposons une autre démonstration qui repose sur la description explicite du complété de la Proposition III.23 page 88. Le but est de mettre en avant le fait que pour savoir si une fonctionnelle est dans le complété, il suffit de vérifier que, sur tout compact, elle coïncide avec une forme polynomiale. Comme nous le verrons dans la démonstration, cela revient à tester f sur les masses de Dirac ev_x pour x variant dans ce compact. Au contraire, dans la Proposition III.23 page 88, il est nécessaire de tester f contre plus de fonctions tests.

Notation III.35. Étant donné un espace de Lefschetz E , on définit $\delta_E : E \rightarrow \text{Pol}_{\mathbb{k}}(E)'$ par

$$\forall x \in E, \forall P \in \text{Pol}_{\mathbb{k}}(E), \langle \delta_E(x), P \rangle = P(x).$$

Pour tout $x \in E$, la fonction test, nommée **masse de Dirac**, $\delta_E(x)$ est bien linéaire et continue sur $\text{Pol}_{\mathbb{k}}(E)$. En effet, son noyau est l'ouvert linéaire constitué de l'ensemble des formes polynomiales qui s'annulent sur le linéairement compact $\mathbb{k} \cdot x$.

Proposition III.123. Soient E un espace de Lefschetz et $\mathfrak{C}$ la famille des linéairement compacts de E . Le complété de $\text{Pol}_{\mathbb{k}}(E)$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts, est

$$\text{Ser}_{\mathbb{k}}(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{k} ; \forall K \in \mathfrak{C}, \exists P_K \in \text{Pol}_{\mathbb{k}}(E), \forall x \in K, f(x) = P_K(x)\}. \quad (\text{III.10})$$

Démonstration. Rappelons la Proposition III.23 page 88 : si $\mathcal{V}$ désigne un système fondamental de $\text{Pol}_{\mathbb{k}}(E)$, comme par exemple la famille $(\mathcal{W}(K) ; K \in \mathfrak{C})$, alors le complété de $\text{Pol}_{\mathbb{k}}(E)$ est donné par la formule

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Pol}}_{\mathbb{k}}(E) = \{y^* \in \text{Pol}_{\mathbb{k}}(E)^* ; \forall K \in \mathfrak{C}, \exists P \in \text{Pol}_{\mathbb{k}}(E), \\ \forall \phi \in \mathcal{W}(K)^{\perp}, \langle y^*, \phi \rangle = \langle \text{ev}_P, \phi \rangle\} \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Commençons par montrer que $\widetilde{\text{Pol}}_{\mathbb{k}}(E) \subseteq \text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$. Soit $f \in \widetilde{\text{Pol}}_{\mathbb{k}}(E)$. Pour tout $x \in E$, la droite $\mathbb{k} \cdot x$ est un espace linéairement compact (voir la Propriété (LC1) de la Proposition III.50 page 108). D'après l'Équation (III.11), il existe $P_x \in \text{Pol}_{\mathbb{k}}(E)$ tel que $\forall \phi \in \mathcal{W}(K)^{\perp}, \langle f, \phi \rangle = \langle \text{ev}_{P_x}, \phi \rangle$. En particulier, $\delta(x) : P \in \text{Pol}_{\mathbb{k}}(E) \mapsto P(x)$ est dans $\mathcal{W}(\mathbb{k} \cdot x)^{\perp}$, donc

$$\langle f, \delta(x) \rangle = \langle \text{ev}_{P_x}, \delta(x) \rangle = P_x(x).$$

On peut donc considérer que $f : E \rightarrow \mathbb{k}$ en posant $f(x) = \langle f, \delta(x) \rangle = P_x(x)$. Soit $K \in \mathfrak{C}$, d'après l'Équation (III.11), il existe $P_K \in \text{Pol}_{\mathbb{k}}(E)$ tel que $\forall \phi \in \mathcal{W}^{\perp}(K), \langle f, \phi \rangle = \langle \text{ev}_{P_K}, \phi \rangle$. Comme pour tout $x \in K, \delta(x) \in \mathcal{W}(K)^{\perp}$, on a $f(x) = P_K(x)$, ce qui montre que $f \in \text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$.

Pour démontrer l'inclusion réciproque, on choisit $f \in \text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$. D'après l'Équation (III.10), pour tout $K \in \mathfrak{C}$, il existe $P_K \in \text{Pol}_{\mathbb{k}}(E)$ tel que $\forall x \in K, f(x) = P_K(x)$. On vérifie que la famille $(P_K ; K \in \mathfrak{C})$ est un réseau de Cauchy qui converge vers f pour la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts sur $\text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$.

On en déduit l'égalité entre $\widetilde{\text{Pol}}_{\mathbb{k}}(E)$ et $\text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$.

On vérifie enfin que les deux topologies coïncident. Soit $K \in \mathfrak{C}$. Modulo l'égalité entre $\widetilde{\text{Pol}}_{\mathbb{k}}(E)$ et $\text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$, l'ouvert linéaire $\mathcal{W}(K)^{\perp}$ de $\widetilde{\text{Pol}}_{\mathbb{k}}(E)$ correspond à l'ouvert linéaire $\{f \in \text{Ser}_{\mathbb{k}}(E) ; f(K) = 0\}$ de $\text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$. $\square$

Fait III.124. Les trois opérations qui suivent permettent de manipuler la catégorie des espaces de Lefschetz, elles permettront de construire la modalité !.

(Pol1) Les opérations $\text{Pol}_{\mathbb{k}}(- ; -)$ et $\text{Ser}_{\mathbb{k}}(- ; -)$ sont des bi-foncteurs.

(Pol2) L'opération $\text{Pol}_{\mathbb{k}}(_) : \mathbf{Lef} \rightarrow \mathbf{Lef}$ qui à tout espace de Lefschetz associe l'espace de ses polynômes est un foncteur contravariant. Il agit sur les morphismes $f \in \mathbf{Lef}(E, F)$ par pré-composition

$$\begin{aligned} \text{Pol}_{\mathbb{k}}(f) : \text{Pol}_{\mathbb{k}}(F) &\rightarrow \text{Pol}_{\mathbb{k}}(E) \\ P &\mapsto P \circ f. \end{aligned}$$

(Pol3) Pour tout E , le plongement ι_E du dual topologique dans les fonctions polynomiales, i.e.

$$\iota_E : \neg_{\mathfrak{C}} E \hookrightarrow \text{Pol}_{\mathbb{k}}(E)$$

est une fonction linéaire continue. De plus, ι est une transformation naturelle.

III.4.1.b Le cas finitaire.

Théorème III.6. [Ehr07, Theorem 2] Pour tous espaces de finitude relationnels A et B , il existe un homéomorphisme linéaire entre $E_{A \Rightarrow B}$ et $\text{Ser}_{\mathbb{k}}(E_A, E_B)$.

Corollaire III.7. Soient E et F des espaces de Lefschetz finitaires. L'espace $\text{Ser}_{\mathbb{k}}(E ; F)$ est un espace de Lefschetz finitaire.

Démonstration. On utilise le théorème précédent et la fonctorialité de $\text{Ser}_{\mathbb{k}}(- ; -)$. $\square$

Lorsque F est réduit au corps $\mathbb{k}$, on notera parfois $?E$ au lieu de $\text{Ser}_{\mathbb{k}}(E ; \mathbb{k})$. La formule suivante montre qu'une fonction de $E \Rightarrow \mathbb{k}$ coïncide sur tout linéairement borné avec un polynôme.

Intuitivement, «Les seuls scénarios d'exécution sur une entrée bornée sont de degré fini.»

Corollaire III.8 (Formule de la sémantique quantitative). Soient E un espace de Lefschetz finitaire. Soit $f \in \text{Ser}_{\mathbb{k}}(E, \mathbb{k})$. Pour tout B linéairement borné de E , il existe $n \in \mathbb{N}$ et des formes i -linéaires ϕ_i hypocontinues sur E telles que

$$\forall x \in B, f(x) = \sum_{i \leq n} \phi_i(\overbrace{x \times \dots \times x}^i).$$

Démonstration. Rappelons que puisque tout espace de Lefschetz finitaire est complet, les linéairement bornés fermés coïncident avec les linéairement compacts. Ainsi, on peut appliquer la Proposition III.123 page 162. $\square$

Pour finir ce paragraphe, nous allons commenter le calcul de l'exponentielle libre.

En transportant au dual la Formule I.8 page 21 présentée dans le Prélude au paragraphe 19, nous obtenons que $\oplus_{n \in \mathbb{N}} \text{Pol}_{\mathbb{k}}^n(E)$ est la limite dessinée dans le diagramme suivant.

Or $\oplus_{n \in \mathbb{N}} \text{Pol}_{\mathbb{k}}^n(E)$ est différent de $?E$ (qui est le dual de $!E$) d'après la Proposition III.121 page 160 et la Définition III.33 page 160. On retrouve donc les limites des formules existant pour le calcul de l'exponentielle dans le cadre finitaire qui étaient présentées au Paragraphe II.4 page 63).

Définition III.36. Soient E et F deux espaces de Lefschetz finitaires.

On pose $?E = \text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$ et $!E = \neg \text{Ser}_{\mathbb{k}}(\neg E)$.

Proposition III.125. Soient A et B deux espaces de finitude relationnels. Il existe un homéomorphisme linéaire entre $?E_A$ et l'espace $E_{?A}$ et un homéomorphisme linéaire entre $!E_A$ et $E_{!A}$.

Démonstration. C'est un Corollaire de III.7 page 163 et de III.49 page 106 □

Proposition III.126. Soient E et F deux espaces de Lefschetz finitaires. Les espaces $!E$, $?E$ et $\text{Ser}_{\mathbb{k}}(E, F)$ sont des espaces de Lefschetz finitaires.

Démonstration. C'est un Corollaire de III.7 page 163 et de III.70 page 122 □

Théorème III.9. [Ehr05] La catégorie **LinFin** des espaces de Lefschetz finitaires est une catégorie de Seely *-autonome.

Les figures III.2 page 164 et III.3 page 166 récapitulent l'interprétation des formules et des preuves de la logique linéaire dans la catégorie des espaces de Lefschetz finitaires.

Multiplicatifs : $E_{\perp} = E_1 = \mathbb{k}$ $E_{A \wp B} = \mathcal{B}_{hc}(E'_A, E'_B)$ $E_{A \otimes B} = E_A \otimes E_B$ $E_{A \multimap B} = \mathcal{L}(E_A, E_B)$	Additifs : $E_{\top} = E_0 = \{0\}$ $E_{A \& B} = E_A \times E_B$ $E_{A \oplus B} = E_A \oplus E_B$
Exponentiels : $E_{?(A^{\perp})} = \widetilde{\text{Pol}}_{\mathbb{k}}(E_A)$	
$E_{!A} = [\widetilde{\text{Pol}}_{\mathbb{k}}(E_A)]'$	

FIG. III.2: Interprétation dans **LinFin** des formules de LL

III.4.2 Structure différentielle et formule de Taylor.

Ce paragraphe reprend les constructions introduites par Ehrhard dans le cas finitaire [Ehr05] et les généralisent au cas linéairement bornologique complet.

Pour ce paragraphe, on suppose que $\mathbb{k}$ est infini.

Nous avons déjà rencontré la masse de Dirac $\delta_x \in \neg \text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$ qui à toute série formelle f associe son évaluation en x .

Pour présenter la formule de Taylor, nous allons avoir besoin d'autres distributions qui extraient le polynôme homogène de degré n d'une série formelle.

On va commencer par introduire x^n puis on va faire le lien entre x^n et la dérivée. Enfin nous montrerons que la série des x^n converge vers δ_x et nous en déduisons la formule de Taylor.

Une preuve π	Son interprétation
$\frac{}{\vdash A, A^\perp} \text{ (ax)}$	$\llbracket \pi \rrbracket : \begin{array}{l} \llbracket A \rrbracket' \times \llbracket A \rrbracket \rightarrow \mathbb{k} \\ x' \quad , \quad x \mapsto \langle x', x \rangle \end{array}$
$\frac{\frac{\dots \rho_1 \dots}{\vdash \Gamma_1, A} \quad \frac{\dots \rho_2 \dots}{\vdash \Gamma_2, A^\perp}}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2} \text{ (cut)}$	$\begin{array}{l} \llbracket \rho_1 \rrbracket \in \llbracket \Gamma_1^\perp \multimap A \rrbracket \quad \llbracket \rho_2 \rrbracket \in \llbracket \Gamma_2^\perp \multimap A^\perp \rrbracket \\ \llbracket \pi \rrbracket : \begin{array}{l} \llbracket \Gamma_1 \rrbracket' \times \llbracket \Gamma_2 \rrbracket' \rightarrow \mathbb{k} \\ \gamma_1' \quad , \quad \gamma_2' \mapsto \langle \rho_2(\gamma_2'), \rho_1(\gamma_1') \rangle \end{array} \end{array}$
$\frac{}{\vdash \perp} \text{ (mix}_0\text{)}$	$\llbracket \pi \rrbracket : \begin{array}{l} \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k} \\ a \mapsto a \end{array}$
$\frac{\frac{\dots \rho_1 \dots}{\vdash \Gamma_1} \quad \frac{\dots \rho_2 \dots}{\vdash \Gamma_2}}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2} \text{ (mix)}$	$\begin{array}{l} \llbracket \rho_1 \rrbracket \in \llbracket \Gamma_1 \rrbracket' \quad \llbracket \rho_2 \rrbracket \in \llbracket \Gamma_2 \rrbracket' \\ \llbracket \pi \rrbracket : \begin{array}{l} \llbracket \Gamma_1 \rrbracket' \times \llbracket \Gamma_2 \rrbracket' \rightarrow \mathbb{k} \\ \gamma_1' \quad , \quad \gamma_2' \mapsto \llbracket \rho_1 \rrbracket(\gamma_1') \llbracket \rho_2 \rrbracket(\gamma_2') \end{array} \end{array}$
$\frac{}{\vdash \Gamma, \top} \text{ (}\tau\text{)}$	$\llbracket \pi \rrbracket : \begin{array}{l} \llbracket \Gamma \rrbracket' \times \{0\} \rightarrow \mathbb{k} \\ \gamma' \quad , \quad 0 \mapsto 0 \end{array}$
$\frac{\frac{\dots \rho_1 \dots}{\vdash \Gamma, A_1} \quad \frac{\dots \rho_2 \dots}{\vdash \Gamma, A_2}}{\vdash \Gamma, A_1 \& A_2} \&$	$\begin{array}{l} \llbracket \rho_1 \rrbracket \in \llbracket \Gamma^\perp \multimap A_1 \rrbracket \quad \llbracket \rho_2 \rrbracket \in \llbracket \Gamma^\perp \multimap A_2 \rrbracket \\ \llbracket \pi \rrbracket : \begin{array}{l} \llbracket \Gamma \rrbracket' \times (\llbracket A_1 \rrbracket' \oplus \llbracket A_2 \rrbracket') \rightarrow \mathbb{k} \\ \gamma', x_1' + x_2' \mapsto \langle x_1', \llbracket \rho_1 \rrbracket(\gamma') \rangle + \langle x_2', \llbracket \rho_2 \rrbracket(\gamma') \rangle \end{array} \end{array}$
$\frac{\frac{\dots \rho \dots}{\vdash \Gamma, A_1}}{\vdash \Gamma, A_1 \oplus A_2} \oplus_g$	$\begin{array}{l} \llbracket \rho \rrbracket \in \llbracket \Gamma^\perp \multimap A_1 \rrbracket \\ \llbracket \pi \rrbracket : \begin{array}{l} \llbracket \Gamma \rrbracket' \times (\llbracket A_1 \rrbracket' \times \llbracket A_2 \rrbracket') \rightarrow \mathbb{k} \\ \gamma \quad , \quad (x_1', x_2') \mapsto \langle x_1', \llbracket \rho \rrbracket(\gamma) \rangle \end{array} \end{array}$
$\frac{\frac{\dots \rho \dots}{\vdash \Gamma, A_1}}{\vdash \Gamma, A_1 \oplus A_2} \oplus_d$	$\begin{array}{l} \llbracket \rho \rrbracket \in \llbracket \Gamma^\perp \multimap A_1 \rrbracket \\ \llbracket \pi \rrbracket : \begin{array}{l} \llbracket \Gamma \rrbracket' \times (\llbracket A_1 \rrbracket' \times \llbracket A_2 \rrbracket') \rightarrow \mathbb{k} \\ \gamma \quad , \quad (x_1', x_2') \mapsto \langle x_2', \llbracket \rho \rrbracket(\gamma) \rangle \end{array} \end{array}$

$\frac{\rho}{\vdash \Gamma, \perp} \perp$	$\begin{aligned} & \llbracket \rho \rrbracket \in \llbracket \Gamma \rrbracket' \\ & \llbracket \pi \rrbracket : \llbracket \Gamma \rrbracket' \times \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k} \\ & \quad \gamma, a \mapsto \llbracket \rho \rrbracket (\gamma') \end{aligned}$
$\frac{\rho}{\vdash \Gamma, A \wp B} (\wp)$	$\begin{aligned} & \llbracket \rho \rrbracket \in \llbracket \Gamma^\perp \multimap (A \wp B) \rrbracket \\ & \llbracket \pi \rrbracket : \llbracket \Gamma \rrbracket' \times \mathcal{B}_{hc}(\llbracket A \rrbracket, \llbracket B \rrbracket)' \rightarrow \mathbb{k} \\ & \quad \gamma', \phi \mapsto \langle \phi, \llbracket \rho \rrbracket (\gamma') \rangle \end{aligned}$
$\overline{\vdash 1} \text{ (1)}$	$\begin{aligned} & \llbracket \pi \rrbracket : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k} \\ & \quad a \mapsto a \end{aligned}$
$\frac{\rho_1 \quad \rho_2}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, A \otimes B} (\otimes)$	$\begin{aligned} & \llbracket \rho_1 \rrbracket \in \llbracket \Gamma_1^\perp \multimap A_1 \rrbracket \quad \llbracket \rho_2 \rrbracket \in \llbracket \Gamma_2^\perp \multimap A_2 \rrbracket \\ & \llbracket \pi \rrbracket : \llbracket \Gamma_1 \rrbracket' \times \llbracket \Gamma_2 \rrbracket' \times (\llbracket A \rrbracket \otimes \llbracket B \rrbracket)' \rightarrow \mathbb{k} \\ & \quad \gamma'_1, \gamma'_2, \phi \mapsto \phi(\llbracket \rho_1 \rrbracket (\gamma'_1), \llbracket \rho_2 \rrbracket (\gamma'_2)) \end{aligned}$
$\frac{\rho}{\vdash \Gamma, ?A^\perp} \text{ (weak)}$	$\begin{aligned} & \llbracket \rho \rrbracket \in \llbracket \Gamma \rrbracket' \\ & \llbracket \pi \rrbracket : \llbracket \Gamma \rrbracket \times \llbracket !A \rrbracket \rightarrow \mathbb{k} \\ & \quad \gamma, d \mapsto \llbracket \rho \rrbracket (\gamma) \mathbb{1}_{d=e_\square} \end{aligned}$
$\frac{\rho}{\vdash \Gamma, ?A^\perp, ?A^\perp} \text{ (contr)}$	$\begin{aligned} & \llbracket \rho \rrbracket \in \llbracket (\Gamma) \otimes \llbracket !A \rrbracket \otimes \llbracket !A \rrbracket' \rrbracket \\ & \llbracket \pi \rrbracket : \llbracket \Gamma \rrbracket' \times \llbracket !A \rrbracket \rightarrow \mathbb{k} \\ & \quad \gamma', d \mapsto \sum_{d_1, d_2} \llbracket \rho \rrbracket (\gamma', d_1, d_2) \mathbb{1}_{d=d_1 \otimes d_2} \end{aligned}$
$\frac{\rho}{\vdash \Gamma, A^\perp} \text{ (der)}$	$\begin{aligned} & \llbracket \rho \rrbracket \in \llbracket \Gamma \rrbracket \otimes_\varepsilon \llbracket A \rrbracket \\ & \llbracket \pi \rrbracket : \llbracket \Gamma \rrbracket' \times \llbracket !A \rrbracket \rightarrow \mathbb{k} \\ & \quad \gamma', X \mapsto \sum_{\# \mu=1} \llbracket \rho \rrbracket (\gamma', X_\mu) \end{aligned}$
$\frac{\rho}{\vdash ?A_1^\perp, \dots, ?A_n^\perp, B} \text{ (prom)}$	$\begin{aligned} & \llbracket \rho \rrbracket \in \text{Pol}_{\mathbb{k}}^n(\llbracket A_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket A_n \rrbracket; \llbracket A \rrbracket) \\ & \llbracket \pi \rrbracket : \text{Pol}_{\mathbb{k}}^n(\llbracket A_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket A_n \rrbracket; \llbracket !A \rrbracket) \\ & \quad x_1, \dots, x_n \mapsto (\llbracket \rho \rrbracket (x_1, \dots, x_n))! \end{aligned}$

FIG. III.3: Interprétation dans LinFin des preuves de MELL + MIX + SUM

III.4.2.a Distributions.

Commençons par remarquer que lorsque le corps $\mathbb{k}$ est infini, on peut extraire la composante homogène de degré n d'un polynôme.

Lemme III.127. *Soient pour tout $i \leq d$, $P_i \in \text{Pol}_{\mathbb{k}}^i(E)$, $P = \sum_{i \leq d} P_i$. Si $P(x) = 0$ alors pour tout $i \leq d$ $P_i(x) = 0$. On en déduit que la décomposition d'un polynôme en somme de polynômes homogènes est unique.*

Démonstration. Pour tout $x \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$, on a

$$P(\lambda x) = \sum_{i \leq d} \lambda^i P_i(x) = 0.$$

Donc $P(\lambda x)$ est un polynôme en λ , nul sur le corps infini $\mathbb{k}$. Donc tous ses coefficients sont nuls. On en déduit que

$$\forall i \leq d, P_i(x) = 0.$$

□

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit l'opérateur de n -linéarisation qui extrait le polynôme homogène de degré n .

$$\begin{aligned} D_0^n : \text{Pol}_{\mathbb{k}}(E) &\rightarrow \text{Pol}_{\mathbb{k}}^n(E) \\ P = \sum_{i \leq d} P_i &\mapsto P_n, \end{aligned}$$

associe, à tout polynôme, un polynôme homogène de degré n tel que

$$\forall x \in E, D_0^n\left(\sum_{i \leq d} P_i\right)(x) = P_n(x).$$

Cet opérateur est bien défini puisque la décomposition d'un polynôme en somme de polynômes homogènes est unique.

Proposition III.128. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'opérateur D_0^n est linéaire continu sur $\text{Pol}_{\mathbb{k}}(E)$.*

Démonstration. Montrons que l'opérateur qui associe $D_0^n : \sum_{i \leq n} P_i \mapsto P_n$ est continu sur $\text{Pol}_{\mathbb{k}}(E)$ dans $\text{Pol}_{\mathbb{k}}^n(E)$.

Un ouvert linéaire de $\text{Pol}_{\mathbb{k}}^n(E)$ est de la forme $\mathcal{W}(K) \cap \text{Pol}_{\mathbb{k}}^n(E)$ où K est un linéairement compact de E et $\mathcal{W}(K)$ l'ensemble des polynômes qui s'annulent sur K . Or, d'après le Lemme III.127 page 167 précédent, $\mathfrak{P}_n(\mathcal{W}(K)) \subseteq \mathcal{W}(K) \cap \text{Pol}_{\mathbb{k}}^n(E)$. □

Comme $\mathbb{k}[n]E$ se plonge dans $\text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$, on peut considérer que D_0^n est à valeurs dans $\text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$.

Étant donné que toute application linéaire continue sur un espace de Lefschetz est uniformément continue, on peut donc prolonger chacun des D_0^n sur le complété $\text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$ de $\text{Pol}_{\mathbb{k}}(E)$.

Définition III.37. Soit E un espace de Lefschetz. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'opérateur

$$D_0^n : \text{Ser}_{\mathbb{k}}(E) \rightarrow \text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$$

est le prolongement de D_0^n à $\text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$.

Rappelons que pour tout $f \in \text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$, pour tout K linéairement compact de E , il existe un polynôme $P_K(f)$ tel que $\forall x \in K, f(x) = P_K(f)(x)$ (voir la Proposition III.123 page 162). On a pour tout $x \in K$,

$$D_0^n f(x) = D_0^n (P_K(f))(x).$$

De plus, si on note d le degré maximal des polynôme homogènes de degré n apparaissant dans P_K , alors $P_K = \sum_{n \leq d} D_0^n P_K$.

On en déduit la formule qui permet de décomposer une série formelle sur tout compact en une somme finie de ses n -linéarisées.

Proposition III.129. Soit E un espace de Lefschetz complet et linéairement bornologique. Soit $f \in \text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$. Pour tout K linéairement compact de E , il existe d_K tel que

$$\forall x \in K, f(x) = \sum_{n \leq d_K} (D_0^n f)(x).$$

On a maintenant tous les outils pour introduire la distribution x^n .

Définition III.38. Soit E un espace de Lefschetz.

Pour tout $x \in E$, on définit la distribution $x^n \in \neg \text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$ comme la composée $x^n = \delta_x \circ D_0^n$, i.e.

$$\begin{aligned} x^n : \text{Ser}_{\mathbb{k}}(E) &\rightarrow \mathbb{k} \\ f &\mapsto D_0^n f(x) \end{aligned}$$

III.4.2.b Dérivées.

Nous allons à présent introduire la notion de dérivée dans les espaces de Lefschetz.

Soient E et F deux espaces de Lefschetz complets et linéairement bornologiques.

Soit $P \in \text{Pol}_{\mathbb{k}}^n(E; F)$ un polynôme homogène de degré n . Par définition, il existe une forme n -linéaire symétrique hypocontinue $h : E \times \dots \times E \rightarrow F$ telle que $P(x) = h(x, \dots, x)$. Pour tous $x, u \in E$, on a

$$P(x + u) - P(x) = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} h(\overbrace{x, \dots, x}^{n-k}, \overbrace{u, \dots, u}^k)$$

On utilise la notation du lambda-calcul pour décrire les fonctions en u .

Pour tout $x \in E$, $\lambda u. (P(x + u) - P(x))$ est un polynôme en u . Pour le voir, il suffit de montrer

que pour tout $k \leq n$, $i \mapsto h(\overbrace{x, \dots, x}^{n-k}, \overbrace{u, \dots, u}^k)$ est continue sur tout produit de linéairement compacts (voir la Proposition III.99 page 143). Soient K un linéairement compact de E et

W un ouvert linéaire de F . Comme h est hypocontinue, $\lambda u.h(x, \dots, x, u, \dots, u)$ est aussi hypocontinue. On en déduit qu'elle est continue sur $K \times \dots \times K$. Il existe donc des ouverts linéaires $V_1, \dots, V_k$ de E tels que

$$h(x \times \dots \times x \times K \cap V_1 \times \dots \times K \cap V_k) \subseteq W.$$

On pose $V = \cap_{i \leq k} V_i$. C'est un ouvert linéaire comme intersection finie d'ouverts. De plus,

$$h(x \times \dots \times x \times K \cap V \times \dots \times K \cap V) \subseteq W.$$

d'où la continuité sur K de $\lambda u.h(x, \dots, x, u, \dots, u)$.

La *dérivée* de P en x dans la direction u est la forme linéaire continue qui correspond au polynôme de degré 1 en u .

$$\begin{aligned} \partial : \text{Pol}_{\mathbb{K}}^n(E ; F) &\rightarrow \text{Pol}_{\mathbb{K}}^{n-1}(E ; \mathcal{L}_c(E ; F)) \\ P &\mapsto x \mapsto D_0^1(\lambda u.P(x + u) - P(x)) \\ &\quad x \mapsto (\lambda u.nh(x \dots, x, u)). \end{aligned}$$

Vérifions que ∂ est bien défini. Soit $x \in E$. Comme h est n -linéaire symétrique hypocontinue, elle est en particulier séparément continue. Donc $\partial(P)(x) \in \mathcal{L}_c(E ; F)$.

Montrons que $\partial(P)$ est un polynôme homogène de degré $n - 1$ en x . On utilise la formule définie au Lemme III.119 page 158. Comme h est n -linéaire, la fonction $\Phi(\partial P)$ associée à $\partial(P)$ est une forme $n - 1$ -linéaire symétrique. Il nous suffit donc de montrer que $\partial(P)$ est continue sur tout linéairement compact de E pour en déduire que ∂P est un polynôme de degré $n - 1$.

Soient K linéairement compact de E et W un ouvert linéaire de $\mathcal{L}_c(E ; F)$. Il existe V ouvert linéaire de F et L linéairement compact de E tels que $\mathcal{W}(L ; V) \subseteq W$. Comme h est hypocontinue, il existe U ouvert linéaire dans E (quitte à prendre une intersection finie d'ouverts linéaires) tel que

$$h(K \cap U, \dots, K \cap U, L) \subseteq V.$$

On en déduit que

$$\partial P(K \cap U) \subseteq \mathcal{W}(L ; V) \subseteq W.$$

Ce qui termine de prouver que ∂P est continu sur tout compact.

On étend ∂ par linéarité à $\text{Pol}_{\mathbb{K}}(E ; F)$. De plus, comme tout polynôme est aussi une série formelle, on a $\text{Pol}_{\mathbb{K}}^{n-1}(E ; \mathcal{L}_c(E ; F)) \subseteq \text{Ser}_{\mathbb{K}}(E ; \mathcal{L}_c(E ; F))$.

Définition III.39. Soient E et F deux espaces de Lefschetz complets et linéairement bornés.

L'opérateur de différentiation ∂ est défini par

$$\begin{aligned} \partial : \text{Pol}_{\mathbb{K}}(E ; F) &\rightarrow \text{Ser}_{\mathbb{K}}(E ; \mathcal{L}_c(E ; F)) \\ P &\mapsto x \mapsto D_0^1(\lambda u.P(x + u) - P(x)) \end{aligned}$$

Proposition III.130. Soient E et F deux espaces de Lefschetz complets et linéairement bornés.

L'opérateur de différentiation $\partial : \text{Pol}_{\mathbb{K}}(E ; F) \rightarrow \text{Ser}_{\mathbb{K}}(E ; \mathcal{L}_c(E ; F))$ est continu. On peut donc le prolonger à $\text{Ser}_{\mathbb{K}}(E) :$

$$\partial : \text{Ser}_{\mathbb{K}}(E) \rightarrow \text{Ser}_{\mathbb{K}}(E ; \mathcal{L}_c(E ; F))$$

Démonstration. Soit W un ouvert de $\text{Ser}_{\mathbb{K}}(E ; \mathcal{L}_c(E ; F))$. Il existe K linéairement compact de E , L linéairement compact de E et V ouvert linéaire de F tels que $\mathcal{W}(K ; \mathcal{W}(L, V)) \subseteq W$.

On vérifie que $\partial(\mathcal{W}(K + L, V)) \subseteq \mathcal{W}(K ; \mathcal{W}(L, V)) \subseteq W$. On en déduit la continuité de ∂ . $\square$

En itérant l'opérateur de différentiation, on construit

$$\partial^n : \text{Ser}_{\mathbb{K}}(E ; F) \rightarrow \text{Ser}_{\mathbb{K}}(E ; \mathcal{L}_c(E ; \mathcal{L}_c(\cdots ; \mathcal{L}_c(E ; F)))).$$

Or, dans le cas des linéairement bornologiques complets (voir la Proposition III.108 page 152), l'associativité du produit tensoriel inductif (voir la Proposition III.107 page 151) implique qu'on peut aussi considérer que cet opérateur (à homéomorphisme linéaire près) est à valeurs dans $\text{Ser}_{\mathbb{K}}(E ; \mathcal{L}_h(E \times \cdots \times E ; F))$.

On en déduit la Proposition suivante qui relie les séries formelles et les fonctions lisses, c'est-à-dire infiniment dérivables.

Proposition III.131. Soient E et F deux espaces de Lefschetz complets et bornologiques. Toute série formelle $f \in \text{Ser}_{\mathbb{K}}(E ; F)$ est infiniment dérivable.

Cette proposition justifie le fait d'appeler distributions [Trè67] les éléments de $\neg \text{Ser}_{\mathbb{K}}(E)$, le dual topologique des fonctionnelles infiniment dérivables.

Il nous reste à faire le lien avec la distribution $x^n \in \text{Ser}_{\mathbb{K}}(E ; F)$ pour $x \in E$.

On note $- \cdot x^{\otimes n}$ la fonction définie par

$$\forall h \in \mathcal{L}_h(\overbrace{E \times \cdots \times E}^n ; F), h \cdot x^{\otimes n} \stackrel{\text{def}}{=} h(x, \dots, x).$$

Proposition III.132. Soient E et F deux espaces de Lefschetz complets et linéairement bornologiques.

Pour tout $f \in \text{Ser}_{\mathbb{K}}(E ; F)$, on a

$$\partial^n f(0) \cdot x^{\otimes n} = n! \langle x^n, f \rangle.$$

Démonstration. Il suffit de montrer cette égalité pour tout $P \in \text{Pol}_{\mathbb{K}}(E ; F)$.

Soit $P \in \text{Pol}_{\mathbb{K}}^n(E ; F)$. Il existe h n -linéaire hypocontinue telle que pour tout $x \in E$, $P(x) = h(x, \dots, x)$.

On montre la formule par récurrence sur n . On a déjà vu que

$$\begin{aligned} \partial^1 P &= x \mapsto \lambda u. n h(x, \dots, x, u) \\ \partial^2 P &= x \mapsto \lambda u_1 \lambda u_2. n(n-1) h(x, \dots, x, u_1, u_2) \\ &\dots \dots \\ \partial^n P &= x \mapsto \lambda u_1 \dots \lambda u_n. n! h(u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\partial^k P(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ (u_1, \dots, u_n) \mapsto n!h(u_1, \dots, u_n) & \text{si } k = n \end{cases}$$

Puis on applique cette fonction n -linéaire hypocontinue à $x^{\otimes n}$ et on obtient

$$\partial^k P(0)(\overbrace{x, \dots, x}^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ n!h(x, \dots, x) = n!\langle x^n, P \rangle & \text{si } k = n \end{cases}$$

On a donc pour tous $k, n \in \mathbb{N}$ et pour tout $P \in \text{Pol}_{\mathbb{k}}^n(E; F)$,

$$\partial^k P(0)(\overbrace{x, \dots, x}^n) = \langle x^k, P \rangle.$$

Comme les deux applications sont linéaires on en déduit l'égalité pour tout polynôme $P \in \text{Pol}_{\mathbb{k}}(E; F)$. Puis on prolonge par continuité à $\text{Ser}_{\mathbb{k}}(E; F)$ qui est le complété de $\text{Pol}_{\mathbb{k}}(E; F)$. $\square$

III.4.2.c Formule de Taylor.

Rappelons les notations introduites jusqu'à maintenant.

Notation III.40. Soit E un espace de Lefschetz linéairement bornologique et complet Soient $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathcal{L}_h(E \times \dots \times E; \mathbb{k})$ une forme n -linéaire hypocontinue et $f \in \text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$ une série formelle.

$$\begin{aligned} h \cdot x^{\otimes n} &= h(x, \dots, x) \\ \langle \delta(x), f \rangle &= f(x) \\ \langle x^n, f \rangle &= D_0^n f(x) \end{aligned}$$

où D_0^n extrait le polynôme homogène de degré n de f .

Pour tout $x \in E$, $x^n \in \neg \text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$ et $\delta(x) \in \neg \text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$ sont des distributions.

Lemme III.133. Soient E un espace de Lefschetz linéairement bornologique et complet.

La série de terme général (x^n) est convergente dans $\neg \text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$ de somme δ_x .

Démonstration. Rappelons que $\text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$ est complet, les linéairement bornés fermés coïncident donc avec les linéairement compacts.

Soit W un ouvert de $\neg \text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$. Il existe B linéairement borné de $\text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$ tel que $B^\perp \subseteq W$.

Comme $\mathbb{k} \cdot x$ est linéairement compact dans E , $\mathcal{W}(\mathbb{k} \cdot x)$ est un ouvert linéaire de $\text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$. On en déduit l'existence de $f_1, \dots, f_n \in \text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$ tels que

$$B = (\mathbb{k} \cdot f_1 + \dots + \mathbb{k} \cdot f_n) \oplus (B \cap \mathcal{W}(\mathbb{k} \cdot x)).$$

Remarquons tout d'abord que pour tout $i \leq n$, $\langle x^n, f_i \rangle = 0$. De plus, s'il existe $P_i \in \text{Pol}_{\mathbb{k}}(E)$, tel que $f_i(x) = P_i(x)$, on note d_i le degré maximum de P_i . On note d le maximum des d_i .

Soit $f \in B$, il existe $g \in B \cap \mathcal{W}(\mathbb{k} \cdot x)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$f = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n + g.$$

Or pour tout $x \in \mathbb{k} \cdot x$, $g(x) = 0$, d'où

$$\begin{aligned} \langle \delta_x, f \rangle &= f(x) = \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) \\ &= \lambda_1 P_1(x) + \dots + \lambda_n P_n(x) \\ &= \left\langle \sum_{i \leq d} x^i, \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i \leq d} x^i, \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i \leq d} x^i, f \right\rangle. \end{aligned}$$

On a donc montré que δ_x coïncide avec $\sum_{n \leq d} x^n$ sur B .

Résumons ce que nous avons démontré. Pour W un ouvert linéaire de $\neg \text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$, on a trouvé $d \in \mathbb{N}$ tel que

$$\delta_x - \sum_{n \leq d} x^n \in B^\perp \subseteq W.$$

On a donc montré que $\sum x^n$ est une série convergente dans $\neg \text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$ et que sa somme est δ_x . $\square$

Théorème III.10. Soient E et F deux espaces de Lefschetz complets et linéairement bornologiques. Toute série formelle $f \in \text{Ser}_{\mathbb{k}}(E, F)$, vérifie la formule de Taylor

$$\forall x \in E, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \partial^n f(0) \cdot x^{\otimes n}.$$

Démonstration. Pour tout $x \in E$, on a $\delta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Or $\langle \delta(x), f \rangle = f(x)$. Or l'évaluation est séparément continue (elle est en effet hypocontinue, voir le contre-exemple III.19 page 144). On a $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x^n, f \rangle$. On conclut en appliquant la Proposition III.132 page 170 qui relie x^n et la dérivée n -ième. $\square$

Deuxième partie

Syntaxe

INTRODUCTION

Dans la première partie, nous avons introduit la sémantique des *espaces de Lefschetz finitaires*. Dans ce modèle de la logique linéaire, l'interprétation des programmes satisfait la *formule de Taylor*. De plus, cette formule résulte d'une *structure différentielle*.

Dans cette seconde partie, nous allons voir comment on peut transposer dans la syntaxe la structure différentielle et la formule de Taylor. Nous allons aussi étudier les problèmes et propriétés logiques qui en découlent.

Commençons par la structure différentielle.

En mathématiques, l'opérateur différentiel permet de calculer la meilleure approximation linéaire d'une fonction. En informatique, il permet de linéariser les termes. Ainsi, l'application de la différentielle d'une abstraction à un terme revient à choisir une occurrence d'une variable et à la substituer par ce terme. Un opérateur *somme* est nécessaire afin de rassembler les différents choix possibles de l'occurrence de la variable à substituer. Cet opérateur introduit donc du non-déterminisme.

L'extension du λ -calcul avec un opérateur *somme* et des coefficients, appelée *λ -calcul algébrique* [Vau09], est déjà intéressante en elle-même. Elle permet par exemple d'exprimer des programmes parallèles comme le ou-parallèle ou la fonction de Gustave (voir l'Exemple IV.3 page 198). Ces fonctions, traditionnellement rejetées car elles ne sont pas séquentielles [AC98], nous intéressent ici exactement pour cette raison.

Cependant, l'élément neutre de la somme, appelé *zéro*, pose un problème logique. Ce zéro apparaît également dans le λ -calcul différentiel comme étant la dérivée des programmes n'utilisant pas leur argument. Plus précisément, afin de typer le λ -calcul algébrique, le système de type du λ -calcul simplement typé

$$\frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A} \text{ (var)} \quad \frac{\Gamma, x : A \vdash s : B}{\Gamma \vdash \lambda x. s : A \Rightarrow B} \text{ (abs)} \quad \frac{\Gamma \vdash s : A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash r : A}{\Gamma \vdash (s)r : B} \text{ (app)}$$

doit être étendu par trois nouvelles règles

$$\frac{}{\vdash 0 : A} \text{ (0)} \quad \frac{\Gamma \vdash s_1 : A \quad \Gamma \vdash s_2 : A}{\Gamma \vdash s_1 + s_2 : A} \text{ (sum)} \quad \frac{\Gamma \vdash s : A \quad a \in \mathbb{k}}{\Gamma \vdash as : A} \text{ (scal)}.$$

Remarquons que toute formule peut être prouvée grâce au terme zéro. Ainsi, dans ce système, toute formule est prouvable. Ceci n'est pas satisfaisant d'un point de vue logique. L'opérateur somme s'interprète comme un choix non-déterministe entre plusieurs résultats. On peut donc interpréter son élément neutre par une absence de résultat. Or, il y a deux raisons pour lesquelles un programme peut ne pas produire un résultat : soit il boucle, soit il produit une erreur. Or, la sémantique finitaire exclut l'opérateur de point fixe. On privilégiera donc l'interprétation du zéro comme un terme qui produit une erreur.

Dans le Chapitre IV de cette deuxième partie, nous nous intéressons aux termes *totaux* (c'est-à-dire qui ne produisent pas d'erreurs). Nous cherchons à les caractériser d'un point de vue sémantique. Nous allons pour cela introduire une sémantique totale, puis une syntaxe de termes totaux (appelée *λ -calcul barycentrique*) et enfin prouver un théorème de complétude pour les types booléens du premier ordre.

Théorème A (voir la Proposition IV.3 page 196). *Tout élément de la sémantique totale du type $\mathcal{B}^n \Rightarrow \mathcal{B}$ est l'interprétation d'un terme barycentrique.*

Concentrons nous à présent sur la formule de Taylor.

Dans les espaces de Lefschetz finitaires, elle permet de transformer l'interprétation F d'un programme de type $A \Rightarrow B$ en une série de fonctions polynomiales P_n homogènes de degré n .

$$\forall x \in A, F(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P_n(x).$$

Dans la syntaxe, on la traduit par la décomposition de tout programme P en une superposition de programmes partiels P_n appelant exactement n fois leur argument

$$P = \sum_{n \in \mathbb{N}} P_n.$$

Cette interprétation renforce l'analogie entre la linéarité au sens mathématique et la linéarité au sens informatique.

La formule de Taylor syntaxique a été décrite plus précisément dans le cadre du λ -calcul [ER08] et d'une variante du λ -calcul avec ressources introduit par Boudol [Bou93]. Dans ce calcul, l'application $(-)$ a été remplacée par une famille d'applications multi-linéaires notées $\langle - \rangle$ qui prennent en argument un terme n -linéaire¹⁰ et un ensemble de n termes. Les règles de réduction des applications multi-linéaires sont

$$\begin{aligned} \langle \lambda x.s \rangle [t_1, \dots, t_n] &\rightarrow \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} s[t_{\sigma(i)}/x_i ; 1 \leq i \leq n] \\ &\text{si } \lambda x.s \text{ est } n\text{-linéaire et } x_i \text{ est la } i\text{-ème oc-} \\ &\text{currence de } x \text{ pour } i \leq n \text{ et } \mathfrak{S}_n \text{ désigne les} \\ &\text{permutations de } \{1, \dots, n\}. \\ &\rightarrow 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

¹⁰Une abstraction $\lambda x.s$ est dite linéaire lorsque la variable liée x n'apparaît qu'une seule fois dans le terme s . Autrement dit, le programme correspondant n'utilise qu'une seule fois son argument. De même une abstraction est n -linéaire si la variable liée apparaît n fois.

Dans ce cadre, la formule de Taylor permet de traduire les λ -termes usuels par une somme formelle de λ -termes avec ressources.

$$(s)t = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} \langle s \rangle [\overbrace{t, \dots, t}^n].$$

Ehrhard et Regnier [ER08] ont étudié cette formule et caractérisé les termes avec ressources qui apparaissent dans le développement de Taylor d'un λ -terme. Cette caractérisation se traduit par une propriété d'*uniformité* des termes issus d'un même développement de Taylor.

Cette relation d'uniformité peut paraître étrange au vu de la formule de Taylor sémantique. En effet, cette formule décompose une série formelle en une somme de polynômes homogènes deux à deux indépendants. Au contraire l'uniformité montre une certaine cohérence entre les termes apparaissant dans le développement de Taylor syntaxique d'un même λ -terme. On peut le comprendre d'un point de vue informatique puisque les termes du développement de Taylor sont des programmes partiels permettant de coder les différentes exécutions possibles d'un même programme.

Remarquons que la formule de Taylor peut aussi être exprimée à partir du λ -calcul différentiel. En effet, le λ -calcul avec ressources que l'on considère ici est une sous-classe du λ -calcul différentiel dans laquelle seule l'application (multi-)linéarisée existe. L'intérêt de se placer dans le cadre du λ -calcul avec ressources est de ne pas faire cohabiter deux types d'applications (usuelle et linéarisée). Ainsi, on sépare le monde des termes totaux (λ -calcul) de celui des termes partiels (λ -termes avec ressources).

Par ailleurs, le λ -calcul avec ressources initialement introduit par Boudol résulte de considérations dans le domaine de la concurrence et du π -calcul. Ainsi, l'opérateur de différentiation permet de relier le monde de la logique linéaire avec celui de la concurrence.

Le Chapitre V de cette deuxième partie B traite de la formule de Taylor dans le cadre des réseaux différentiels. Ces derniers, introduits par Ehrhard et Regnier [ER06] sont aux réseaux de la logique linéaire ce que le λ -calcul avec ressources est au λ -calcul. En particulier, avec Pagani, nous avons donné un *algorithme de fusion* non-déterministe qui permet de dire si un ensemble fini de réseaux provient du développement de Taylor d'un réseau de la logique linéaire.

Théorème B (voir les Théorèmes V.3 page 237 et V.4 page 241). *Un ensemble fini de réseaux différentiels provient du développement en série de Taylor d'un même réseau de la logique linéaire si et seulement si il existe une routine de l'algorithme de fusion qui se termine par un succès.*

Ce théorème nous permet de décrire, à l'intérieur des réseaux différentiels, les réseaux qui apparaissent dans le développement d'un réseau de la logique linéaire.

En résumé, l'introduction d'un opérateur différentiel dans la logique linéaire permet d'introduire du non-déterminisme de par la structure additive qui en découle. Mais cette structure pose des problèmes logiques. Nous avons essayé de comprendre le contenu logique des syntaxes différentielles de deux façons différentes. Le premier point d'attaque est sémantique et syntaxique : nous avons cherché à déterminer un ensemble de termes totaux en nous appuyant sur des propriétés sémantiques vérifiées par les preuves de la logique linéaire. La seconde approche

utilise des outils des réseaux d'interaction et la formule de Taylor syntaxique. Elle permet de déterminer une classe de réseaux différentiels dont le contenu logique est compréhensible puisqu'ils sont issus de réseaux de la logique linéaire.

IV - TOTALITÉ DANS LES ESPACES DE FINITUDE

Plan du chapitre

IV.1	Rappels sur les espaces de finitude	180
IV.2	Extensions du λ-calcul	182
IV.2.1	λ -calcul	182
IV.2.2	λ -calcul algébrique	183
IV.2.3	λ -calcul différentiel	185
IV.3	Étude sémantique de la totalité	186
IV.3.1	Une propriété sémantique des λ -termes bruts	187
IV.3.2	Totalité dans les espaces de finitude	187
IV.3.3	Un modèle de la logique linéaire	189
IV.4	λ-calcul barycentrique	193
IV.4.1	λ -calcul et extensions algébriques	193
IV.4.2	λ -calcul barycentrique simplement typé	194
IV.4.3	Une complétude partielle ?	196

Dans ce chapitre, nous cherchons à caractériser d'un point de vue sémantique les termes du λ -calcul différentiel qui sont *totaux*, c'est-à-dire les termes qui ne vont pas produire d'erreur. La sémantique des espaces de Lefschetz finitaire est un modèle du λ -calcul différentiel. Nous allons en construire un raffinement qui capture la notion de *totalité*.

Commençons par remarquer que les preuves de la logique linéaire n'utilisent pas le *zéro* et ne produisent donc pas d'erreur. Nous allons donc partir d'une de leurs propriétés sémantiques pour construire une *relation de polarité totale*.

Les interprétations des preuves $\pi : A$ et $\pi' : A^\perp$ de LL sont données respectivement par un vecteur $\llbracket \pi \rrbracket$ de l'espace vectoriel $\llbracket A \rrbracket$ associé à la formule A et une forme¹ linéaire continue $\llbracket \pi' \rrbracket : \llbracket A \rrbracket \rightarrow \mathbb{k}$ sur $\llbracket A \rrbracket$ dont l'évaluation est toujours égale à 1, i.e.

$$\langle \llbracket \pi' \rrbracket, \llbracket \pi \rrbracket \rangle = 1.$$

Nous allons généraliser cette relation à tous les vecteurs et formes linéaires continues de $\llbracket A \rrbracket$. La construction par bi-orthogonal (voir la Section 1.3) va accoler aux espaces de Lefschetz

¹Rappelons que puisque nous admettons la règle (Mix), nous avons les équivalences logiques $\perp \equiv 1$ et donc $A^\perp \equiv A \multimap 1$ (voir le Paragraphe 1.1.2 page 10).

finitaires, des parties stables par bi-polarité, appelées *candidats de totalité*. Grâce à la structure algébrique du modèle des espaces de Lefschetz finitaires, on peut donner une description simple des candidats de totalité. Ce sont les sous-espaces affines fermés qui ne contiennent pas 0. Remarquons que dans les espaces cohérents, une telle description n'était pas possible.

Le modèle de la logique linéaire ainsi obtenu nous permet de différencier les termes totaux, ce sont les termes dont l'interprétation est dans le candidat de totalité des termes différentiels qui produisent des erreurs.

De plus, la relation d'orthogonalité totale peut aussi s'interpréter en termes de cohérence. En effet, on aurait pu définir l'orthogonalité par la formule $\langle \llbracket \pi' \rrbracket, \llbracket \pi \rrbracket \rangle \neq 0$, on aurait alors évincé les termes partiels de la sémantique. Le fait de prendre pour relation d'orthogonalité $\langle \llbracket \pi' \rrbracket, \llbracket \pi \rrbracket \rangle = 1$ permet de généraliser aux autres éléments de la sémantique la cohérence des preuves de la logique linéaire.

Une fois la sémantique totale introduite, nous allons définir une syntaxe totale, le λ -calcul barycentrique. C'est un sous-calcul du λ -calcul algébrique dans lequel seules les sommes barycentriques de termes sont autorisées. Ce calcul reflète les propriétés de la sémantique totale. De plus, pour les types booléens du premier ordre, nous verrons que la sémantique totale est complète vis-à-vis du λ -calcul barycentrique (voir le Théorème IV.3 page 196). Nous verrons cependant qu'il existe des types pour lesquels certains points de la sémantique n'interprètent aucun terme.

Ce chapitre débute par un rappel sur la sémantique des espaces de Lefschetz finitaires (Section IV.1). Puis, nous présentons les extensions algébrique et différentielle du λ -calcul (Section IV.2). Nous introduisons ensuite la sémantique totale et étudions ses propriétés (Section IV.3). Enfin, nous présentons le λ -calcul barycentrique (Section IV.4) et démontrons le Théorème IV.3 page 196 de complétude pour la hiérarchie booléenne du premier ordre.

IV.1 Rappels sur les espaces de finitude

Cette section rassemble les résultats obtenus à la Section III et qui nous seront utiles dans ce chapitre.

Soit $\mathbb{k}$ un corps infini², dénombrable³ et muni de la topologie discrète.

Tout espace de finitude relationnel A engendre un espace de Lefschetz E_A qui est un sous-espace de l'espace des suites $\mathbb{k}^{|A|}$.

Le **support** d'une suite $x \in \mathbb{k}^{|A|}$ est $|x| = \{a \in |A| ; x_a \neq 0\}$.

Définition III.4. [page 74] Soit $A = (|A|, \mathcal{F}(A)) \in \mathbf{RelFin}$. L'espace de Lefschetz finitaire associé à A est

$$E_A = \{x \in \mathbb{k}^{|A|} ; |x| \in \mathcal{F}(A)\}.$$

Un espace de Lefschetz est dit finitaire lorsqu'il existe un espace de finitude relationnel A et un homéomorphisme linéaire $\phi : E \rightarrow E_A$. On dit que le triplet (E, ϕ, A) est une **carte** de E .

Dans la catégorie $\mathbf{LinFin}$ des espaces de Lefschetz finitaires, les morphismes sont des fonctions linéaires continues.

²Cette hypothèse sera utile pour démontrer le théorème de complétude IV.3 page 196.

³Cette hypothèse sera utile pour démontrer la non-complétude pour le type entier

Proposition III.70. [page 122] Soit E un espace de Lefschetz finitaire. L'espace de Lefschetz $\neg E$ formé des formes linéaires continues sur E et muni de la topologie de la convergence sur les linéairement compacts est un espace de Lefschetz finitaire. De plus pour toute fonction linéaire continue $f : E \rightarrow F$ entre deux espace de Lefschetz finitaire, $\neg f$ est une fonction linéaire continue définie par

$$\begin{aligned} \neg f : \neg F &\rightarrow \neg E \\ y' &\mapsto y' \circ f. \end{aligned}$$

Enfin, pour tout $A = (|A|, \mathcal{F}(A)) \in \mathbf{RelFin}$, il existe un homéomorphisme linéaire entre $E_{A^\perp}$ et $\neg E_A$.

Pour $x' \in \neg E$ et $x \in E$, on note $\langle x', x \rangle = x'(x)$ l'image du vecteur x par la forme linéaire x' .

Proposition III.25. [page 90] Tout espace de Lefschetz finitaire est complet

Proposition III.3. [page 128] Tout espace de Lefschetz finitaire E est réflexif, c'est-à-dire homéomorphe à son bi-dual $\neg\neg E$.

Nous aurons souvent besoin de la propriété de séparation suivante.

Proposition III.17. [page 84] Soit E un espace de Lefschetz finitaire. Pour tout sous-espace vectoriel fermé D de E et pour tout $x \notin D$, il existe une forme linéaire continue $x' \in \neg E$ telle que $\langle x', x \rangle = 1$ et $\forall d \in D, \langle x', d \rangle = 0$.

Définition III.36. [page 164] Soit E un espace de Lefschetz finitaire. L'espace de Lefschetz finitaire $\text{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$ est le complété de l'espace des fonctions polynomiales par rapport à la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts.

On note

$$?E = \text{Ser}_{\mathbb{k}}(\neg E) \quad \text{et} \quad !E = \neg \text{Ser}_{\mathbb{k}}(\neg E).$$

Proposition III.126. [page 164] Pour tout espace de finitude relationnel A , on a les homéomorphismes linéaires suivants

$$!E_A \simeq E_{!A} \quad \text{et} \quad ?E_A \simeq E_{?A}$$

Enfin, à tout $x \in E$, on associe la masse de Dirac $x^! \in !E$ (aussi noté δ_x) défini par

$$\begin{aligned} x^! : \text{Ser}_{\mathbb{k}}(E) &\rightarrow \mathbb{k} \\ F &\mapsto F(x). \end{aligned}$$

La formule de Taylor satisfaite par les morphismes de la co-Kleisli de $\mathbf{LinFin}$ est l'une des propriétés principales du modèle des espaces de finitude.

Théorème III.10. [page 172] Soient E et F deux espaces de Lefschetz finitaires. Tout morphisme $f : E \Rightarrow F$ de la co-Kleisli, i.e. fonction linéaire continue $F : !E \rightarrow F$, vérifie la formule de Taylor

$$\forall x \in E, f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} \partial^n f(0) \cdot x^{\otimes n}.$$

Enfin, les espaces de Lefschetz finitaires forment un modèle dénotationnel de la logique linéaire, i.e. l'interprétation des preuves est un invariant de l'élimination des coupures.

Théorème III.9. [page 164] *La catégorie $\mathbf{LinFin}$ est une catégorie de Seely *-autonome.*

L'interprétation de LL dans $\mathbf{LinFin}$ est présentée dans Figure III.2 page 164 pour les formules et dans la Figure III.3 page 166 pour les preuves.

IV.2 Extensions du λ -calcul

Dans cette partie, $\mathcal{V}$ désigne un ensemble dénombrable, ses éléments sont appelés des variables.

IV.2.1 λ -calcul

Avant d'étudier ses extensions, commençons par rappeler la définition du λ -calcul simplement typé déjà décrit au Paragraphe I.2.1 page 12.

Syntaxe. On utilise la notation de Krivine [Kri90] pour l'application. On note Λ l'ensemble des termes du λ -calcul défini par la syntaxe suivante

$$s, t \in \Lambda \stackrel{\text{def}}{=} x \in \mathcal{V} \mid \lambda x.s \mid (s)t$$

et quotienté par la relation d' α -équivalence.

Typage. Le λ -calcul simplement typé est défini par le système de types suivant.

$$\frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A} (\text{var}) \quad \frac{\Gamma, x : A \vdash s : B}{\Gamma \vdash \lambda x.s : A \Rightarrow B} (\text{abs}) \quad \frac{\Gamma \vdash s : A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash r : A}{\Gamma \vdash (s)r : B} (\text{app})$$

Réduction. La β -réduction est la règle de calcul suivante

$$(\lambda x.t)s \rightarrow t[s/x]$$

où la substitution de x par s dans t est réalisée en évitant la capture des variables liées (voir [Kri90] pour plus de précisions).

Sémantique. Le codage habituel [Gir87] de l'implication intuitionniste dans la logique linéaire, i.e.

$$A \Rightarrow B \stackrel{\text{def}}{=} !A \multimap B$$

permet de déduire que les espaces de Lefschetz finitaires qui forment un modèle de LL engendrent un modèle du lambda-calcul simplement typé (voir la Section 1.2).

Proposition IV.1. *La catégorie de co-Kleisli de la comonade exponentielle sur **LinFin** est une catégorie cartésienne fermée.*

L'interprétation des termes est déterminée par une fonction de contexte

$$\begin{aligned} \Gamma : \quad \mathcal{V} &\rightarrow E_A \\ x : A &\mapsto \Gamma(x) \end{aligned}$$

et donnée par

$$\begin{aligned} \llbracket x \rrbracket^\Gamma &= \Gamma(x) \\ \llbracket \lambda x. s \rrbracket^\Gamma &: \begin{cases} E_A \rightarrow E_B \\ \bar{x} \mapsto \llbracket s \rrbracket^{\Gamma, x \mapsto \bar{x}} \end{cases} \\ \llbracket (s) t \rrbracket^\Gamma &= \llbracket s \rrbracket^\Gamma \circ \llbracket t \rrbracket^\Gamma. \end{aligned}$$

Le lecteur intéressé pourra consulter [AC98] pour plus de détails.

IV.2.2 λ -calcul algébrique

Les espaces de Lefschetz étant des espaces vectoriels, on peut ajouter au λ -calcul un opérateur *somme* et des coefficients variant dans un corps $\mathbb{k}$ qui seront interprétés respectivement par la somme et les scalaires dans **LinFin**. On obtient ainsi le λ -calcul algébrique Λ_+ [Vau09].

L'opérateur somme a une signification calculatoire : il représente un choix non-déterministe qui ne sera fait qu'une fois le calcul terminé. Lors de la réduction, toutes les possibilités sont envisagées, collectées par cet opérateur et évaluées en parallèle. Les coefficients représentent intuitivement le nombre de façons d'obtenir un résultat.

Le choix d'un corps $\mathbb{k}$ pour la structure algébrique est de ce point de vue discutable. On peut en effet se demander quelle est la signification d'un coefficient négatif ou même rationnel. Nous nous contenterons d'admettre comme postulat la sémantique des espaces de Lefschetz finitaires et d'essayer de comprendre son contenu logique et informatique, ainsi que ses limites.

Syntaxe. En mathématiques comme en λ -calcul, l'application

$$(\mathbf{f}, \mathbf{x}) \mapsto (\mathbf{f}) \mathbf{x}$$

est linéaire en la fonction $\mathbf{f}$, mais pas en l'argument $\mathbf{x}$. En effet, en mathématiques, la somme de deux fonctions est définie point à point

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g}) \mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{f}) \mathbf{x} + (\mathbf{g}) \mathbf{x}.$$

Cette égalité est aussi valable d'un point de vue informatique : pour substituer une variable dans la superposition non-déterministe de deux programmes, on va superposer la substitution dans chacun d'eux. Par contre, à moins que la fonction ne soit linéaire, on a

$$(f)(x + y) \neq (f)x + (f)y.$$

D'un point de vue informatique, on n'a pas non plus l'égalité car la variable à substituer peut apparaître plusieurs fois dans le terme et pour chacune de ses occurrences, on doit choisir ou bien x ou bien y .

Plutôt que quotienter l'ensemble des termes par cette relation de linéarité, nous introduisons deux sortes de termes : les *termes atomiques* qui ne contiennent pas de sommes sauf peut-être dans les arguments des applications et les *termes* qui sont des combinaisons algébriques de termes atomiques.

On note Λ_+ l'ensemble des termes S du λ -calcul algébrique défini par la syntaxe suivante.

$$\begin{aligned} S \in \Lambda_+ &::= \sum_{i=1}^n a_i s_i \quad \text{où} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i \in \mathbb{k}, s_i \in \Lambda_{\text{at}} \\ s \in \Lambda_{\text{at}} &::= x \in \mathcal{V} \mid \lambda x.s \mid (s)S. \end{aligned}$$

Nous quotientons les termes par la relation d' α -équivalence, l'associativité et la commutativité de la somme.

Typage. La version simplement typée du λ -calcul algébrique est une extension du système de types du λ -calcul présenté ci-dessus avec des règles permettant d'introduire la somme et la multiplication scalaire des termes.

$$\begin{aligned} &\frac{}{\vdash 0 : A}^{(0)} \\ &\frac{\Gamma \vdash s_1 : A \quad \Gamma \vdash s_2 : A}{\Gamma \vdash s_1 + s_2 : A} \text{ (sum)} \quad \frac{\Gamma \vdash s : A \quad a \in \mathbb{k}}{\Gamma \vdash as : A} \text{ (scal)}. \end{aligned}$$

Réduction. Dans le λ -calcul non-déterministe [DP95], une des règles de réduction de la somme $s + t \rightarrow s$ correspond au choix non-déterministe. Dans le λ -calcul algébrique, on ne considère pas cette réduction. Au contraire, on va collecter toutes les possibilités et reporter ce choix. Ainsi, en plus de la β -réduction, le λ -calcul algébrique possède la réduction algébrique

$$\forall a \neq 0, s \rightarrow S' \Rightarrow as + T \rightarrow aS' + T.$$

Le lecteur intéressé trouvera une définition formelle de cette réduction dans [Vau09].

Selon le corps $\mathbb{k}$ dans lequel les coefficients peuvent varier, cette réduction soulève des problèmes de normalisation et de confluence. En effet, comme $\mathbb{k}$ possède un élément 1 et son opposé, on peut montrer que pour tous termes algébriques s et t , $s \rightarrow t \rightarrow s$ [Vau09]. Par ailleurs, en choisissant par exemple les rationnels pour $\mathbb{k}$, on rencontre un problème de normalisation. Supposons que $s \rightarrow S'$, on aura alors une réduction infinie :

$$s \rightarrow \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}S' \rightarrow \frac{1}{4}s + \frac{3}{4}S' \rightarrow \dots$$

Pour dépasser ces difficultés, on doit abandonner le corps $\mathbb{k}$ pour une autre structure. On dit qu'un semi-anneau $\mathbb{A}$ possède la propriété de séparation finie, lorsque la fonction $w : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{N}$

$$w(a) = \max \left\{ n \in \mathbb{N} ; \exists (a_i)_{i \leq n} \in \mathbb{k}^n ; a = \sum_{i \leq n} a_i \right\}$$

est bien définie et commute à la somme et à la multiplication scalaire.

Proposition IV.2. [Vau09] Si $\mathbb{A}$ possède la propriété de séparation finie, alors tous les termes typables normalisent fortement et le calcul est confluant.

Malgré tout, nous allons poursuivre ce chapitre dans le cadre des espaces vectoriels sur un corps, quitte à restreindre ensuite l'ensemble des scalaires à un semi-anneau possédant la propriété de séparation finie.

Sémantique. La sémantique de la combinaison linéaire de termes est évidemment la combinaison linéaire des sémantiques des termes.

$$\left[\sum_{i \leq n} a_i s_i \right] = \sum_{i \leq n} a_i [s_i].$$

IV.2.3 λ -calcul différentiel

Comme nous l'avons vu au Chapitre III, les espaces de Lefschetz finitaires admettent un opérateur différentiel. Nous présentons ici l'extension du λ -calcul avec un opérateur différentiel syntaxique [ER03] qui s'interprète sans surprise par son homologue sémantique.

Syntaxe. Nous présentons le λ -calcul différentiel comme une extension du λ -calcul algébrique.

On note $\Lambda_{\mathcal{D}}$ l'ensemble des termes du λ -calcul différentiel défini par la syntaxe suivante.

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \in \Lambda_{\mathcal{D}} &::= \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{s}_i \quad \text{où} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i \in \mathbb{k}, \mathbf{s}_i \in \Lambda_{\mathcal{D}\text{at}} \\ \mathbf{s} \in \Lambda_{\mathcal{D}\text{at}} &::= x \in \mathcal{V} \mid \lambda x. \mathbf{s} \mid (\mathbf{s})\mathbf{S} \mid D\mathbf{s} \cdot \mathbf{t}. \end{aligned}$$

Nous quotientons les termes par les relations d' α -équivalence, l'associativité et la commutativité de la somme.

L'opérateur différentiel permet de linéariser l'application (app) du λ -calcul. On doit lire le terme $D\mathbf{s} \cdot \mathbf{t}$ de la façon suivante «le terme $\mathbf{s}$ linéairement appliqué au terme $\mathbf{t}$ ».

Typage. La version simplement typée du λ -calcul différentiel est une extension du système de types du λ -calcul algébrique avec une règle permettant d'introduire l'opérateur de dérivation des termes.

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{s} : A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash \mathbf{t} : A}{\Gamma \vdash D\mathbf{s} \cdot \mathbf{t} : A \Rightarrow B} (\text{appL}).$$

Réduction. Lors de l'évaluation d'une application linéaire, une seule occurrence linéaire de la variable liée sera substituée. Cette substitution est une généralisation de la substitution linéaire de tête [DB87], i.e. au lieu de la variable linéaire de tête, on choisit n'importe quelle occurrence de cette variable dont on extrait une occurrence linéaire.

L'application linéarisée se réduit en une substitution linéarisée

$$D((\lambda x.s)) \cdot t \rightarrow \lambda x. \left(\frac{\partial s}{\partial x} \cdot t \right),$$

où $\frac{\partial s}{\partial x} \cdot t$ désigne la substitution non-déterministe d'exactlyement une occurrence de la variable x par t dans s . Cette substitution [ER03] est définie par

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial x} \cdot t &\stackrel{\text{def}}{=} t, \\ \frac{\partial y}{\partial x} \cdot t &\stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad \text{si } y \neq x, \\ \frac{\partial(r)s}{\partial x} \cdot t &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \cdot t \right) s + \left(Dr \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial x} \cdot t \right) \right) s, \\ \frac{\partial Dr \cdot s}{\partial x} \cdot t &\stackrel{\text{def}}{=} D \left(\frac{\partial r}{\partial x} \cdot t \right) \cdot s + Dr \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial x} \cdot t \right), \\ \frac{\partial ar + bs}{\partial x} \cdot t &\stackrel{\text{def}}{=} a \frac{\partial r}{\partial x} \cdot t + b \frac{\partial s}{\partial x} \cdot t. \end{aligned}$$

Comme pour le λ -calcul algébrique, lorsque l'on remplace le corps $\mathbb{k}$ par un semi-anneau qui possède la propriété de séparation finie (voir la Proposition IV.2 page 185), le λ -calcul différentiel est confluent et les termes simplement typés normalisent fortement [ER03].

Sémantique. L'opérateur différentiel est interprété par l'opération de différentiation qui existe dans les espaces de Lefschetz finitaires (voir Définition III.39 page 169). Si $s : A \Rightarrow B$ et $t : A$, alors

$$\begin{aligned} \llbracket Ds \cdot t \rrbracket &: E_A \rightarrow E_B \\ x &\mapsto D_x \llbracket s \rrbracket (\llbracket t \rrbracket). \end{aligned}$$

Proposition IV.3. [ER03, Appendix A] Les espaces de Lefschetz finitaires engendrent un modèle du λ -calcul différentiel simplement typé.

IV.3 Étude sémantique de la totalité

Comme expliqué dans l'introduction de cette Partie B, l'opérateur différentiel nécessite l'introduction d'un terme zéro qui est l'élément neutre de l'opérateur *somme* et qui peut provenir de la dérivation d'un λ -terme constant. L'existence de ce terme et de la preuve qui lui correspond n'est pas très satisfaisante d'un point de vue logique. En effet, elle permet de prouver n'importe quelle formule.

Afin de comprendre le non-déterminisme du *lambda*-calcul algébrique et la différentiation d'un point de vue logique, il est nécessaire de distinguer les termes totaux de ceux construits à partir du terme zéro. Pour cela, nous allons mener une étude sémantique qui va nous conduire à l'introduction d'une autre extension algébrique du λ -calcul, cette fois formée de termes totaux, le *λ -calcul barycentrique*.

IV.3.1 Une propriété sémantique des λ -termes bruts

Afin de caractériser de façon sémantique la totalité nous allons partir d'une propriété vérifiée par les preuves de la logique linéaire qui sont totales puisqu'elles ne sont pas construites avec le séquent zéro.

Proposition IV.4. *Pour toute formule A de la logique linéaire et toutes preuves $\pi \vdash A$ et $\pi' \vdash A \multimap 1$, les interprétations de ces preuves⁴ dans le modèle des espaces de Lefschetz finitaires vérifient*

$$\langle \llbracket \pi' \rrbracket, \llbracket \pi \rrbracket \rangle = 1. \quad (\text{IV.1})$$

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur le nombre de connecteurs de la formule A . Comme l'interprétation d'une preuve dans **LinFin** est stable par élimination des coupures, on peut supposer que π et π' sont sans coupures. On note Π leur coupure qui est une preuve de 1 et dont l'interprétation est donc un scalaire, i.e. $\llbracket \Pi \rrbracket \in \mathbb{k}$.

Comme la sémantique est stable par élimination des coupures et qu'il n'existe qu'une seule preuve sans coupure de 1, on en déduit

$$\langle \llbracket \pi' \rrbracket, \llbracket \pi \rrbracket \rangle = \llbracket \Pi \rrbracket = 1.$$

□

IV.3.2 Totalité dans les espaces de finitude

La propriété (IV.1) vérifiée par les preuves de la logique linéaire suggère d'introduire une relation de polarité (voir la Définition I.9 page 28) sur tout espace de Lefschetz finitaire E .

$$\forall x \in E, x' \in \neg E, x \perp^\bullet x' \iff \langle x', x \rangle = 1. \quad (\text{IV.2})$$

Grâce à cette relation, nous allons raffiner la sémantique des espaces de Lefschetz. À la Section IV.4 suivante, nous construirons un calcul simplement typé dont la sémantique des termes vérifient la relation de polarité (IV.2) ci-dessus.

Définition IV.1. La *polaire* d'une partie $\mathcal{T}$ de E est définie par

$$\mathcal{T}^\bullet = \{x' \in \neg E ; \forall x \in \mathcal{T}, \langle x', x \rangle = 1\}.$$

C'est un sous-espace affine du dual $\neg E$ qui est de plus fermé car $(x, x') \mapsto \langle x', x \rangle$ est une forme linéaire séparément continue sur $E \times \neg E$.

⁴Rappelons qu'en présence de (Mix), on a les équivalences logiques $\perp \equiv 1$ et $A^\perp \equiv A \multimap 1$ (voir le Paragraphe I.1.2 page 10).

Démonstration. En effet, soit $(x, x') \in E \times \neg E$. Comme $\mathbb{k} \cdot x$ est linéairement compact, $\text{ann}_E(x)$ est ouvert dans $\neg E$, donc ev_x est continue. De plus, comme x' est une forme linéaire continue, son noyau $\ker(x')$ est ouvert dans E et $\text{ev}_{x'} : x \rightarrow \langle x', x \rangle$ est continue. $\square$

Remarque. Modulo l'homéomorphisme linéaire entre E et son bi-dual $\neg\neg E$ (voir la Proposition III.3 page 128), si T' est une partie de $\neg E$, alors $T'^{\bullet}$ est identifiée avec $\{x \in E ; \forall x' \in T', \langle x', x \rangle = 1\}$.

Définition IV.2. Soit E un espace de Lefschetz finitaire. Un **candidat de totalité** est un sous-espace affine $\mathcal{T}$ de E qui est *clos par bi-polarité*, i.e. tel que $T^{\bullet\bullet} = \mathcal{T}$.

Nous allons voir que les candidats de totalité sont caractérisés par le fait d'être affine fermé. Mais remarquons tout d'abord que si jamais $\mathcal{T}$ contient le vecteur 0, alors sa polaire est la partie vide et sa bi-polaire est l'espace tout entier.

Introduisons quelques notations. Si $\mathcal{T}$ est un sous-espace affine d'un espace de Lefschetz finitaire E , on notera $\text{dir } \mathcal{T} = \{x - y ; x, y \in \mathcal{T}\}$ sa **direction**. Rappelons qu'un espace affine est entièrement défini par un point et par sa direction

$$\forall x \in \mathcal{T}, \mathcal{T} = x + \text{dir } \mathcal{T} = \{x + d ; d \in \text{dir } \mathcal{T}\}.$$

On note $\text{aff}(\mathcal{T}) = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i t_i ; \sum \lambda_i = 1, t_i \in \mathcal{T}\}$ l'espace affine engendré par une partie $\mathcal{T}$ et $\overline{\text{aff}}(\mathcal{T})$ sa fermeture topologique, c'est-à-dire la plus petite partie affine fermée qui contient $\mathcal{T}$.

Il existe une caractérisation simple des candidats de totalité.

Proposition IV.5 (Caractérisation). *Soit E un espace de Lefschetz finitaire. Une partie $\mathcal{T}$ de E est un candidat de totalité si et seulement si $\mathcal{T}$ vérifie l'une des trois conditions*

- *c'est la partie vide, i.e. $\mathcal{T} = \emptyset$, ou bien*
- *c'est l'espace tout entier $\mathcal{T} = E$, ou bien*
- *c'est un sous-espace affine fermé qui ne contient pas 0, i.e. $\mathcal{T} = \overline{\text{aff}}(\mathcal{T})$ et $0 \notin \mathcal{T}$.*

Démonstration. La partie vide et l'espace de finitude tout entier sont des candidats de totalité polaires l'un de l'autre.

Supposons que $\mathcal{T}$ est affine fermé et ne contient pas 0 et montrons que $T^{\bullet\bullet} \subseteq \mathcal{T}$ (l'inclusion réciproque est automatique). Nous allons montrer la contraposée.

Soit $x_0 \notin \mathcal{T}$. Décrivons l'espace affine $\mathcal{T}$ par un point $z_0 \in \mathcal{T}$ et sa direction $D = \text{dir}(\mathcal{T})$. On a alors

$$\mathcal{T} = z_0 + D, \quad x_0 \neq z_0 \quad \text{et} \quad x_0 - z_0 \notin D.$$

Par la Proposition III.17 page 84 de séparation, il existe $x'_0 \in \neg E$ tel que

$$\langle x'_0, x_0 - z_0 \rangle = 1 \quad \text{et} \quad \forall d \in D, \langle x'_0, d \rangle = 0.$$

D'une part, si $\lambda = \langle x'_0, z_0 \rangle \neq 0$, on pose $y'_0 = \frac{1}{\lambda} x'_0$. On a alors

$$\langle y'_0, z_0 \rangle = 1 \quad \text{et} \quad \forall d \in D, \langle y'_0, d \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle x'_0, d \rangle = 0,$$

d'où on déduit que $y'_0 \in \mathcal{T}^\bullet$. Comme de plus,

$$\langle y'_0, x_0 \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle x'_0, x_0 \rangle = 1 + \langle x'_0, z_0 \rangle = \frac{1 + \lambda}{\lambda} \neq 1,$$

on conclut que $x_0 \notin \mathcal{T}^{\bullet\bullet}$.

D'autre part, si $\langle x'_0, z_0 \rangle = 0$, alors $\langle x'_0, x_0 \rangle = 1$. Comme on a supposé que $0 \notin \mathcal{T}$, la Proposition III.17 page 84 de séparation implique l'existence de $x'_1 \in \neg E$ tel que

$$\langle x'_1, z_0 \rangle = 1 \quad \text{et} \quad \forall d \in D, \langle x'_1, d \rangle = 0,$$

d'où $x'_1 \in \mathcal{T}^\bullet$. Si $\langle x'_1, x_0 \rangle = 0$ alors $x_0 \notin \mathcal{T}^{\bullet\bullet}$. On suppose maintenant que $\langle x'_1, x_0 \rangle \neq 0$. Or, $\langle x'_1 + x'_0, z_0 \rangle = 1$ et $\forall d \in D, \langle x'_1 + x'_0, d \rangle = 0$, donc $x'_1 + x'_0 \in \mathcal{T}^\bullet$. Or, $\langle x'_0 + x'_1, x_0 \rangle = \langle x'_0, x_0 \rangle + \langle x'_1, x_0 \rangle = 1 + \langle x'_1, x_0 \rangle \neq 1$, donc $x_0 \notin \mathcal{T}^{\bullet\bullet}$. $\square$

De cette caractérisation, on déduit que la bi-polaire est un opérateur de clôture.

Proposition IV.6. Soit E un espace de Lefschetz finitaire. La bi-polaire d'une partie de E qui ne contient pas 0 est sa clôture affine fermée, i.e. $\mathcal{T}^\bullet \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{T}^{\bullet\bullet} = \overline{\text{aff}}(\mathcal{T})$.

Démonstration. Comme $\mathcal{T}^{\bullet\bullet}$ est un espace affine clos contenant $\mathcal{T}$, on a $\mathcal{T} \subseteq \overline{\text{aff}}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}^{\bullet\bullet}$. Par conséquent $\mathcal{T}^\bullet = (\mathcal{T}^{\bullet\bullet})^\bullet \subseteq [\overline{\text{aff}}(\mathcal{T})]^\bullet \subseteq \mathcal{T}^\bullet$, d'où $[\overline{\text{aff}}(\mathcal{T})]^{\bullet\bullet} = \mathcal{T}^{\bullet\bullet}$.

De plus, si $\mathcal{T}^\bullet \neq \emptyset$ alors il existe $x' \in \neg E$ tel que pour tout $x \in \mathcal{T}$, $\langle x', x \rangle = 1$ et donc pour tout $x \in \overline{\text{aff}}(\mathcal{T})$, $\langle x', x \rangle = 1$.

Nous en déduisons que $0 \notin \overline{\text{aff}}(\mathcal{T})$. Grâce à la Proposition IV.5 de caractérisation ci-dessus, $[\overline{\text{aff}}(\mathcal{T})]^{\bullet\bullet} = \overline{\text{aff}}(\mathcal{T})$. On en déduit finalement que $\overline{\text{aff}}(\mathcal{T}) = \mathcal{T}^{\bullet\bullet}$. $\square$

Définition IV.3. Un **espace de totalité** est un couple $(E, \mathcal{T})$ constitué d'un espace de Lefschetz finitaire E et d'un *candidat de totalité* $\mathcal{T}$, i.e. un sous-espace affine de E tel que $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\bullet\bullet}$.

On note **TotFin** la catégorie dont les objets sont des espaces de totalité et dont les morphismes sont des fonctions linéaires continues qui préservent les candidats de totalité.

IV.3.3 Un modèle de la logique linéaire

Afin de montrer que les espaces de totalité forment un modèle de la logique linéaire classique, nous allons montrer que la catégorie **TotFin** est une *catégorie d'orthogonalité* de **LinFin** (voir la Partie I.3.3 pour la formalisation de l'orthogonalité par bi-recollement).

Considérons $\mathcal{G}(\mathbf{LF})$ la catégorie bi-recollée de **LinFin** le long du foncteur **LinFin** $(-, -)$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (E, U, U') & & \\
 & & \mathcal{G}(\mathbf{LF}) & & \\
 \mathcal{U}_1 \swarrow & & \downarrow \mathcal{U}_E & & \searrow \mathcal{U}_2 \\
 \mathbf{Set} & \xleftarrow{\mathbf{LinFin}(\mathbb{k}, \cdot)} & \mathbf{LinFin} & \xrightarrow{\mathbf{LinFin}(\cdot, \mathbb{k})} & \mathbf{Set} \\
 U \subseteq E & & E & & U' \subseteq \neg E
 \end{array}$$

Les objets de $\mathcal{G}(\mathbf{LF})$ sont les triplets $[E, U, U']$ où U et U' sont respectivement des parties de E et de $\neg E$. Un morphisme entre deux objets $[E, U, U']$ et $[F, V, V']$ est une fonction linéaire continue $f : E \rightarrow F$ telle que $f(U) \subseteq V$ et $\neg f(V') \subseteq U'$, où $\neg f : y' \mapsto [x \mapsto \langle y', f(x) \rangle]$.

Proposition IV.7. *La catégorie $\mathcal{G}(\mathbf{LF})$ bi-recollée le long du foncteur $\mathbf{LinFin}(\cdot, \cdot)$ est une catégorie $*$ -autonome.*

Démonstration. Nous savons déjà que $\mathbf{LinFin}$ est une catégorie $*$ -autonome de Seely (voir le Théorème III.9 page 164). D'après la Proposition I.12 page 33, il nous suffit donc de montrer que la transformation naturelle $\kappa : !_{\mathbf{Set}} \mathbf{LinFin}(1, -) \rightarrow \mathbf{LinFin}(1, !-)$ est une distribution linéaire (voir la Définition I.6 page 24). Remarquons que l'on peut identifier $\mathbf{LinFin}(1, -)$ avec le foncteur d'oubli $\mathcal{U} : \mathbf{LinFin} \rightarrow \mathbf{Set}$ qui oublie la structure d'espace vectoriel topologique. Remarquons de plus que ce foncteur est monoïdal de $(\mathbf{LinFin}, \otimes, \mathbb{k})$ dans $(\mathbf{Set}, \times, \{*\})$.

La distribution linéaire est définie sur chaque composante par la fonction

$$\begin{aligned} \kappa_E : E &\rightarrow !E \\ x &\mapsto x^! \end{aligned}$$

dans $\mathbf{Set}$ (modulo l'homéomorphisme linéaire entre $\mathbf{LinFin}(1, E)$ et E). Elle est compatible avec la structure de comonoïde, i.e. les deux diagrammes suivants commutent.

$$\begin{array}{ccc} * & \{*\} & \xleftarrow{e_{\mathcal{U}(E)}} E \\ & \downarrow m & \downarrow \kappa_E \\ 1 & \mathbb{k} & \xleftarrow{\mathcal{U}(e_E)} !E_E \end{array} \quad \begin{array}{ccc} x & E & \xrightarrow{d_{\mathcal{U}(E)}} E \times E \\ & \downarrow \kappa_E & \downarrow \kappa_E \times \kappa_E \\ & E_{!E} & \xrightarrow{d_E} E_{!E} \otimes E_{!E} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & (x, x) \\ & & \downarrow \\ & & !E \times !E \\ & & \downarrow m_{!E, !E} \\ & & !E \otimes !E \\ & & \downarrow \\ & & x^! \otimes x^! \end{array}$$

□

La catégorie $\mathbf{TotFin}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{G}(\mathbf{LF})$ (si l'on considère que les objets de $\mathbf{TotFin}$ sont les triplets $[E, \mathcal{T}, \mathcal{T}^\bullet]$). Plus précisément, c'est une *catégorie d'orthogonalité stricte* par rapport à l'orthogonalité polaire (voir le Paragraphe I.3.3).

Proposition IV.8. *La catégorie d'orthogonalité stricte $\mathbf{TotFin}$ est un modèle de LL. De plus le foncteur d'oubli $\mathcal{U} : (E, \mathcal{T}, \mathcal{T}^\bullet) \rightarrow E$ préserve les structures.*

Démonstration. On applique la Proposition I.13 page 35.

Soient E et F des espaces de Lefschetz finitaires. Pour tous $U \subseteq E$, $V \subseteq F$ et $V' \subseteq \neg F$, on pose $U \otimes V = \{x \otimes y ; x \in U, y \in V\}$ et $U \multimap V' = \{x \multimap y' : f \in E \multimap F \rightarrow \langle f(x), y' \rangle\}$.

L'orthogonalité $\perp^\bullet$ est *stable*. Comme le produit tensoriel est symétrique, il suffit de vérifier que $(U^{\bullet\bullet} \otimes V^{\bullet\bullet})^\bullet = (U^{\bullet\bullet} \otimes V)^\bullet$. Si $0 \in V$ alors de part et d'autre de l'égalité on a l'ensemble vide. Sinon, $V^{\bullet\bullet}$ est la fermeture affine fermée de V (voir la Proposition IV.5 page 188). Comme $V \subseteq V^{\bullet\bullet}$, on a $U^{\bullet\bullet} \otimes V^\bullet \supseteq (U^{\bullet\bullet} \otimes V^{\bullet\bullet})^\bullet$. Pour l'inclusion inverse, on utilise la propriété universelle du tenseur (III.9) page 137 : toute forme linéaire continue sur $E \otimes F$ correspond

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}(A^\perp) &= \mathcal{T}(A)^\bullet, \\
 \mathcal{T}(1) &= \mathcal{T}(\perp) = \{1\}, \\
 \mathcal{T}(0) &= \mathcal{T}(\top) = \{0\}, \\
 \mathcal{T}(A \otimes B) &= [\mathcal{T}(A) \otimes \mathcal{T}(B)]^{\bullet\bullet}, \\
 \mathcal{T}(A \& B) &= \mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(B), \\
 \mathcal{T}(A \multimap B) &= [\mathcal{T}(A) \otimes \mathcal{T}(B)^\bullet]^\bullet, \\
 \mathcal{T}(A \oplus B) &= [\mathcal{T}(A)^\bullet \times \mathcal{T}(B)^\bullet]^\bullet, \\
 \mathcal{T}(!A) &= [\kappa(\mathcal{T}(A))]^{\bullet\bullet} = \left\{ x^! ; x \in \mathcal{T}(A) \right\}^{\bullet\bullet}.
 \end{aligned}$$

 FIG. IV.1: Interprétation dans **TotFin** des formules de LL

à une forme bilinéaire séparément continue sur $E \times F$. Si pour tous $x \in U^{\bullet\bullet}$ et $y \in V$ on a $\phi(x, y) = 1$, alors cette propriété est toujours vraie sur l'enveloppe affine fermée $V^{\bullet\bullet}$ de V .

Vérifions à présent que $(U^{\bullet\bullet} \multimap V^{\bullet\bullet})^\bullet = (U \multimap V^{\bullet\bullet})^\bullet = U^{\bullet\bullet} \multimap V^\bullet$. Si $0 \in V$ ou $0 \in U$, alors les trois parties de cette équation sont réduites à l'ensemble vide. Sinon, on utilise que $x, x' \rightarrow \langle f(x), x' \rangle$ est séparément continue et que l'égalité $\langle f(x), x' \rangle$ est stable par combinaisons affines en x ou en x' .

Les autres égalités de la Proposition I.13 page 35 sont vérifiées car l'orthogonalité est *polarisée* par rapport à la polaire $\{1\}$:

$$x \perp^\bullet x' \iff \langle x', x \rangle = 1 \iff x'(x) = 1.$$

Comme **LinFin** est un modèle de la logique linéaire classique, **TotFin** est aussi un modèle de la logique linéaire classique (voir la Proposition I.13 page 35 issue de [HS03, Théorème 5.14]). $\square$

Toute formule de la logique linéaire A est interprétée dans **LinFin** par l'espace de Lefschetz finitaire E_A (voir la Figure III.2 page 164 pour les détails de la construction). L'interprétation de A dans la catégorie **TotFin** est la donnée de E_A et d'un candidat de totalité $\mathcal{T}(A)$ de E_A . Sa construction, héritée de **LinFin** par double orthogonalité (voir Figure I.6 page 36) est décrite à la Figure IV.1 page 191. Comme le foncteur $\mathcal{U}$ qui oublie la structure de totalité préserve les structures de la logique linéaire, on en déduit que l'interprétation des preuves est dans **TotFin** est le même vecteur que dans **LinFin** (on se référera à la Figure III.3 page 166 pour une description de l'interprétation des preuves dans **LinFin**).

L'une des particularités de ce modèle, par rapport notamment au modèle des espaces cohérents totaux [Loa94] est la description algébrique des candidats de totalité du modèle, donnée à la proposition suivante. Ceci est possible grâce à la Proposition IV.5 page 188 qui donne une construction directe de la bi-polaire par clôture affine fermée.

Proposition IV.9. Soient A et B deux formules de LL. On a les propriétés suivantes :

$$\mathcal{T}(A \otimes B) = \overline{\text{aff}}(\mathcal{T}(A) \otimes \mathcal{T}(B)). \quad (\text{IV.3})$$

$$\mathcal{T}(A \multimap B) = \{f \in \mathcal{L}_c(E_A, E_B) ; f(\mathcal{T}(A)) \subseteq \mathcal{T}(B)\}. \quad (\text{IV.4})$$

$$\mathcal{T}(A \oplus B) = \overline{\text{aff}}(\mathcal{T}(A) \times \ker(\mathcal{T}(B)^\bullet) \cup \ker(\mathcal{T}(A)^\bullet) \times \mathcal{T}(B)). \quad (\text{IV.5})$$

$$\mathcal{T}(!A) = \overline{\text{aff}}(x^! ; x \in \mathcal{T}(A)). \quad (\text{IV.6})$$

$$\mathcal{T}(!A \multimap B) = \left\{ F \in \widetilde{\text{Pol}}_{\mathbb{K}}(E_A, E_B) ; \forall x \in \mathcal{T}(A), F(x) \in \mathcal{T}(B) \right\}. \quad (\text{IV.7})$$

$$\mathcal{T}(?A) = \left\{ F \in \widetilde{\text{Pol}}_{\mathbb{K}}(E_A) ; \forall x \in \mathcal{T}(A), F(x) = 1 \right\}, \quad (\text{IV.8})$$

Démonstration. Propriété (IV.3). C'est une conséquence directe de la Proposition IV.5 page 188 de caractérisation. $\square$

(IV.4).

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{T}(A \multimap B) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{T}(A), f(x) \in \mathcal{T}(B) \\ &\Leftrightarrow \forall y' \in \mathcal{T}(B), \langle y', f(x) \rangle = 1. \end{aligned}$$

$\square$

(IV.5). Par construction,

$$\mathcal{T}(A \oplus B) = \{(x, y) \mid \forall u' \in \mathcal{T}(A)^\bullet, v' \in \mathcal{T}(B)^\bullet, \langle u', x \rangle + \langle v', y \rangle = 1\}.$$

On a immédiatement que $\overline{\text{aff}}(\mathcal{T}(A) \times \ker(\mathcal{T}(B)^\bullet) \cup \ker(\mathcal{T}(A)^\bullet) \times \mathcal{T}(B)) \subseteq \mathcal{T}(A \oplus B)$. Réciproquement, soient $z = (x, y) \in \mathcal{T}(A \oplus B)$, $u'_0 \in \mathcal{T}(A)^\bullet$ et $v'_0 \in \mathcal{T}(B)^\bullet$. Rappelons que

$$\mathcal{T}(A)^\bullet = u'_0 + \text{dir}(\mathcal{T}(A)^\bullet), \quad \mathcal{T}(B)^\bullet = v'_0 + \text{dir}(\mathcal{T}(B)^\bullet).$$

Pour tous $d'_A \in \text{dir}(\mathcal{T}(A)^\bullet)$ et $d'_B \in \text{dir}(\mathcal{T}(B)^\bullet)$, $\langle u'_0 + d'_A, x \rangle + \langle v'_0 + d'_B, y \rangle = 1$. On en déduit que $\langle u'_0, x \rangle + \langle v'_0, y \rangle = 1$ et $\langle d'_A, x \rangle = 0$ et $\langle d'_B, y \rangle = 0$. Deux cas se présentent : $\langle u'_0, x \rangle$ et $\langle v'_0, y \rangle$ sont non nuls, ou bien l'un des deux est nul. Dans le premier cas, on peut écrire z sous la forme

$$z = \langle u'_0, x \rangle \left(\frac{x}{\langle u'_0, x \rangle}, 0 \right) + \langle v'_0, y \rangle \left(0, \frac{y}{\langle v'_0, y \rangle} \right),$$

sous laquelle on voit que $z = (x, y) \in \overline{\text{aff}}(\mathcal{T}(A) \times \ker(\mathcal{T}(B)^\bullet) \cup \ker(\mathcal{T}(A)^\bullet) \times \mathcal{T}(B))$. Dans le deuxième cas, supposons par exemple que $\langle v'_0, y \rangle = 0$, alors $y \in \ker(\text{dir}(\mathcal{T}(B)^\bullet))$ et $x \in \mathcal{T}(A)$, donc $z = (x, y) \in \mathcal{T}(A) \times \ker(\mathcal{T}(A)^\bullet)$. $\square$

(IV.6). Notons $\mathbf{1} \in \text{Pol}_{\mathbb{K}}(E_A)$ la fonction constante, i.e. $\forall x \in E_A, \langle x^!, \mathbf{1} \rangle = 1$. L'ensemble $\{x^! ; x \in \mathcal{T}(A)\}^\bullet$ n'est pas vide car il contient $\mathbf{1}$. La Proposition IV.6 page 189 assure que $\{x^! ; x \in \mathcal{T}(A)\}^\bullet = \overline{\text{aff}}(x^! ; x \in \mathcal{T}(A))$. $\square$

(IV.7). En combinant (IV.4) et (IV.6), nous avons (IV.7). L'égalité (IV.8) vient de l'équivalence de la logique linéaire $?A \equiv !(A^\perp) \multimap 1$. $\square$

(IV.8). On utilise le fait que $\llbracket \perp \rrbracket = \llbracket 1 \rrbracket$. $\square$

$\square$

IV.4 λ -calcul barycentrique

D'après le paragraphe précédent, les espaces de totalité forment un modèle du λ -calcul. Nous allons maintenant voir que les candidats de totalité permettent de séparer les termes totaux des termes qui produisent des erreurs dans les λ -calculs algébrique et différentiel.

Nous allons introduire un calcul de termes totaux en s'inspirant de la sémantique. Au lieu d'autoriser toutes les combinaisons linéaires comme dans le λ -calcul algébrique, nous allons nous restreindre aux combinaisons barycentriques

$$\sum_{i \leq n} a_i s_i, \text{ où } \sum_{i \leq n} a_i = 1, n \in \mathbb{N}.$$

Nous appellerons ce calcul le λ -calcul barycentrique.

Nous verrons que le calcul ainsi obtenu capture une partie du non-déterminisme inhérent aux calculs algébrique et différentiel. Il permet en particulier de coder des fonctions non séquentielles célèbres comme le `P0r` et la fonction de Gustave et notée `Gus` [AC98].

Nous étudierons enfin la distance entre la sémantique et la syntaxe totales en démontrant la complétude ou l'incomplétude de la première par rapport à la seconde.

IV.4.1 λ -calcul et extensions algébriques

λ -calcul. Comme la catégorie **TotFin** est un modèle de LL, elle engendre un modèle du λ -calcul simplement typé.

Proposition IV.10. *La catégorie de co-Kleisli de la co-monade exponentielle de **TotFin** est une catégorie cartésienne fermée.*

De plus, tout terme typé $s : A \Rightarrow B$ est interprété par une fonction analytique $\llbracket s \rrbracket : E_A \rightarrow E_B$ telle que

$$\forall x \in \mathcal{T}(A), \llbracket s \rrbracket(x) \in \mathcal{T}(B). \quad (\text{IV.9})$$

Même si on a défini $\mathcal{T}$ en passant par la logique linéaire, on retrouve la totalité définie par Girard [Gir86] par les relations logiques : la totalité est définie sur les types de base et est étendue à tous les types par la relation (IV.9). Ainsi une fonction est totale si et seulement si elle est extensionnellement totale, i.e. si son évaluation sur chaque élément total est totale. Il suffit donc de tester la totalité d'un programme sur ses *réalisateurs* (les éléments totaux) et non pas sur tout le domaine de définition de la fonction.

λ -calcul algébrique. Les candidats de totalité permettent d'exclure les λ -termes algébriques qui seraient construits avec le zéro. De plus, si $x, y \in \mathcal{T}(A)$ la somme $x + y$ n'est pas dans l'espace affine $\mathcal{T}(A)$. Il existe donc des termes typables dont l'interprétation n'est pas totale.

λ -calcul différentiel. Il existe des termes typables du λ -calcul différentiel qui ne sont pas totaux. Prenons par exemple un λ -terme sous la forme d'une abstraction $\lambda x.s$ où s ne dépend pas de la variable liée x . Dans ce cas, on peut montrer par induction sur s que pour tout terme t , $D(\lambda x.s).t \rightarrow 0$.

IV.4.2 λ -calcul barycentrique simplement typé

Nous proposons un λ -calcul dans le style du λ -calcul algébrique [Vau09] qui admet **TotFin** comme modèle. Dans le λ -calcul barycentrique, seules les combinaisons linéaires *barycentriques* de termes sont autorisées.

Syntaxe. Soit $\mathcal{V}$ un ensemble dénombrable de variables. L'ensemble des termes atomiques s et celui des termes barycentriques $\mathbf{T}$ sont définis par induction par

$$\begin{aligned} \mathbf{R}, \mathbf{S} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^m a_i s_i \quad \text{où} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, a_i \in \mathbb{k}, \sum_{i=1}^m a_i = 1, \\ s, s_i &\stackrel{\text{def}}{=} x \mid \lambda x. s \mid (s) \mathbf{S}, \quad \text{où} \quad x \in \mathcal{V} \end{aligned}$$

Nous quotientons les termes par les relations d' α -équivalence, l'associativité et la commutativité de la somme.

Types et sémantiques. Le typage et la sémantique sont hérités de ceux du λ -calcul algébrique. Ceci est possible car le λ -calcul barycentrique est un sous-calcul du λ -calcul algébrique.

Théorème IV.1. *La catégorie **TotFin** engendre un modèle dénotationnel du λ -calcul barycentrique.*

Démonstration. Nous savons déjà que **TotFin** engendre un modèle dénotationnel du λ -calcul. Il suffit de vérifier que cette sémantique est stable par combinaison barycentrique. Ceci est assuré car tous les candidats de totalité sont des sous-espaces affines. $\square$

Un peu plus d'expressivité Les types de base booléen et entier peuvent être ajoutés sans perdre le caractère total du calcul. On passe pour cela par un codage via la logique linéaire.

Ainsi, le type booléen est représenté par $\mathcal{B} = 1 \oplus 1$. Il est interprété par le couple formé du plan $\mathbb{k}^2$ et de la droite $x + y = 1$. Les termes booléens atomiques sont $\mathbf{T}$, $\mathbf{F}$ et $\text{if } s \text{ then } \mathbf{R} \text{ else } \mathbf{S}$ avec s atomique et $\mathbf{S}, \mathbf{R}$ barycentriques.

$$\begin{array}{c} \frac{}{\Gamma \vdash \mathbf{T} : \mathcal{B}} \quad (\text{true}) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathbf{F} : \mathcal{B}} \quad (\text{false}) \\ \frac{\Gamma \vdash s : \mathcal{B} \quad \Gamma \vdash \mathbf{R} : A \quad \Gamma \vdash \mathbf{S} : A}{\Gamma \vdash \text{if } s \text{ then } \mathbf{R} \text{ else } \mathbf{S} : A} \quad (\text{cond}) \end{array}$$

$$\llbracket \mathbf{T} \rrbracket^\Gamma = (1, 0), \qquad \llbracket \mathbf{F} \rrbracket^\Gamma = (0, 1),$$

$$\llbracket \text{if } s \text{ then } \mathbf{R} \text{ else } \mathbf{S} \rrbracket^\Gamma = (\llbracket s \rrbracket_t^\Gamma \llbracket \mathbf{R} \rrbracket_t^\Gamma + \llbracket s \rrbracket_f^\Gamma \llbracket \mathbf{S} \rrbracket_t^\Gamma, \llbracket s \rrbracket_t^\Gamma \llbracket \mathbf{R} \rrbracket_f^\Gamma + \llbracket s \rrbracket_f^\Gamma \llbracket \mathbf{S} \rrbracket_f^\Gamma).$$

comme $\llbracket \mathcal{B} \rrbracket = E_{\mathcal{B}} = \mathbb{k}^2$, la sémantique de chacun des termes s de type $\mathcal{B}$ est donnée par ses deux composantes VRAI et FAUX $\llbracket s \rrbracket = (\llbracket s \rrbracket_t, \llbracket s \rrbracket_f)$.

Exemple IV.1 (Hiérarchie des types booléens).

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathcal{B}) &= \{(x_t, x_f) \in \mathbb{k}^2 ; x_t + x_f = 1\}, \\ \mathcal{T}(\mathcal{B}^\perp) &= \{(1, 1)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}(\mathcal{B}^\perp) &= \{\mathbb{P} \in \mathbb{k}[X_t, X_f] ; x_t + x_f = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(x_t, x_f) = 1\}, \\
 \mathcal{T}(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}) &= \left\{ (\mathbb{P}_t, \mathbb{P}_f) \in \mathbb{k}[X_t, X_f]^2 ; x_t + x_f = 1 \Rightarrow \mathbb{P}_t(x_t, x_f) + \mathbb{P}_f(x_t, x_f) = 1 \right\}, \\
 \mathcal{T}(\mathcal{A}^n \mathcal{B}^\perp) &= \{\mathbb{P} \in \mathbb{k}[X_1, \dots, X_{2n}] ; \\
 &\quad \forall 1 \leq i \leq n, x_{2i-1} + x_{2i} = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(x_1, y_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}) = 1\}, \\
 \mathcal{T}(\mathcal{B}^n \Rightarrow \mathcal{B}) &= \left\{ (\mathbb{P}_t, \mathbb{P}_f) \in \mathbb{k}[X_1, \dots, X_{2n}]^2 ; \mathbb{P}_t + \mathbb{P}_f \in \mathcal{T}(\mathcal{A}^n \mathcal{B}^\perp) \right\}.
 \end{aligned}$$

Le type des entiers est représenté par $\mathcal{Nat} = \oplus_{n \in \mathbb{N}} 1$. Il est interprété par l'espace des suites finies $\mathbb{k}^{(\mathbb{N})}$ et le candidat de totalité formé des suites finies dont la somme des coefficients est égale à 1. Les termes entiers atomiques sont 1, le successeur.

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathbf{0} : \mathcal{Nat}} \quad (\text{Zero}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{n} : \mathcal{Nat}}{\Gamma \vdash \text{succ } n : \mathcal{Nat}} \quad (\text{succ})$$

La sémantique de 0 est la suite dont seul le premier coefficient est non-nul, le successeur est interprété par une fonction de décalage de la suite

$$\llbracket \mathbf{0} \rrbracket^\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} 0 \mapsto 1 \\ i \neq 0 \mapsto 0 \end{array} \right\}, \qquad \llbracket \text{succ } x \rrbracket^\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} 0 \mapsto 0, \\ i \neq 0 \mapsto x_{i-1} \end{array} \right\}$$

Mentionnons que comme l'a montré Ehrhard [Ehr05], il existe un récursur dans les espaces de finitude relationnels. Ce récursur peut se généraliser aux espaces de Lefschetz finitaires (puisque tout morphisme de **RelFin** induit un morphisme dans **LinFin**). De plus, son interprétation est totale.

Exemple IV.2 (Hiérarchie des types entiers).

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}(\mathcal{Nat}) &= \left\{ x \in \mathbb{k}^{(\mathbb{N})} ; \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = 1 \right\}, \\
 \mathcal{T}(\mathcal{Nat}^\perp) &= \{x \in \mathbb{k}^\mathbb{N} ; \forall n \in \mathbb{N}, x_n = 1\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}(\mathcal{Nat} \Rightarrow 1) &= \left\{ f : \mathbb{k}^{(\mathbb{N})} \rightarrow \mathbb{k} ; \forall n \in \mathbb{N}, f(e_n) = 1 \right\}, \\
 \mathcal{T}(\mathcal{Nat} \Rightarrow \mathbb{N}) &= \left\{ \begin{array}{l} (f_n)_{n \in \mathbb{N}} ; \forall n \in \mathbb{N}, f_n : \mathbb{k}^{(\mathbb{N})} \rightarrow \mathbb{k}, \\ \forall m \in \mathbb{N}, (f_n(e_m))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{k}^{(\mathbb{N})}, \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(e_m) = 1 \end{array} \right\}.
 \end{aligned}$$

Par la suite, on notera $\Lambda_{\mathcal{B}}$ l'extension du λ -calcul barycentrique avec les constructions booléennes et les entiers. Comme **TotFin** est un modèle de la logique linéaire et de $\Lambda_{\mathcal{B}}$, c'est aussi un modèle de l'extension de $\Lambda_{\mathcal{B}}$ avec les constructions booléennes et entières.

Corollaire IV.2. *La catégorie **TotFin** engendre un modèle dénotationnel du λ -calcul barycentrique étendu avec les constructions booléennes et entières.*

IV.4.3 Une complétude partielle ?

Les sémantiques totales sont assez fidèles à la syntaxe pour pouvoir montrer le théorème de complétude pour la hiérarchie booléenne du premier ordre. Par contre, pour l'ordre supérieur, nous ne connaissons pas la réponse. Pour les types dénombrables comme les entiers, le théorème de complétude n'est plus vrai comme nous le verrons dans un deuxième temps.

Complétude pour la hiérarchie booléenne Concentrons-nous sur les termes du type $\mathcal{B}^n \Rightarrow \mathcal{B}$. Comme vu dans l'Exemple IV.1 page 194, les termes de ce type sont interprétés par des couples de polynômes $\mathbb{P} = (\mathbb{P}_t, \mathbb{P}_f) \in \mathbb{k}[X_1, \dots, X_{2n}]^2$ tels que pour tout $(x_i) \in \mathbb{k}^{2n}$ satisfaisant $x_{2i-1} + x_{2i} = 1$, $\mathbb{P}_t(x_1, \dots, x_{2n}) + \mathbb{P}_f(x_1, \dots, x_{2n}) = 1$. La réciproque de cette propriété est aussi vraie.

Théorème IV.3 (Complétude). *Toute fonction totale $\mathcal{T}(\mathcal{B}^n \Rightarrow \mathcal{B})$ est l'interprétation d'un terme du λ -calcul barycentrique booléen, i.e. $\forall \mathbb{P} = (\mathbb{P}_t, \mathbb{P}_f) \in \mathcal{T}(\mathcal{B}^n \Rightarrow \mathcal{B})$,*

$$\exists s \in \Lambda_{\mathcal{B}} ; \llbracket s \rrbracket = (\mathbb{P}_t, \mathbb{P}_f).$$

Remarque. Nous présentons une preuve qui repose sur des considérations algébriques comme la division euclidienne dans les anneaux de polynômes à une variable. Il existe une autre preuve due à Hyvernat [Hyv08a] et qui repose sur des considérations combinatoires et des calculs de dimension.

Commençons par introduire quelques notations et résultats intermédiaires.

$$\begin{array}{ll} \neg \mathbf{S} &= \text{if } \mathbf{S} \text{ then } F \text{ else } T, & \llbracket \neg \mathbf{S} \rrbracket &= (\llbracket \mathbf{S} \rrbracket_f, \llbracket \mathbf{S} \rrbracket_t), \\ \mathbf{S}^+ &= \text{if } \mathbf{S} \text{ then } T \text{ else } T, & \llbracket \mathbf{S}^+ \rrbracket &= (\llbracket \mathbf{S} \rrbracket_t + \llbracket \mathbf{S} \rrbracket_f, 0), \\ \mathbf{S}^- &= \text{if } \mathbf{S} \text{ then } F \text{ else } F, & \llbracket \mathbf{S}^- \rrbracket &= (0, \llbracket \mathbf{S} \rrbracket_t + \llbracket \mathbf{S} \rrbracket_f), \\ \Pi_i &= \lambda \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n. \mathbf{x}_i, & \llbracket \Pi_i \rrbracket &= (X_{2i-1}, X_{2i}). \end{array}$$

Les couples de polynômes ci-dessous sont tous des interprétations de termes barycentriques.

$$(X_{2i}, X_{2i-1}) = X_{2i} \cdot (1, 0) + X_{2i-1} \cdot (0, 1) = \llbracket \neg \Pi_i \rrbracket, \quad (\text{IV.10})$$

$$(X_{2i-1} + X_{2i}, 0) = X_{2i} \cdot (1, 0) + X_{2i-1} \cdot (1, 0) = \llbracket \Pi_i^+ \rrbracket, \quad (\text{IV.11})$$

$$\begin{aligned} (1 - X_{2i}, X_{2i}) &= (1, 0) + (X_{2i-1}, X_{2i}) - (X_{2i-1} + X_{2i}, 0) = \llbracket T + \Pi_i - \Pi_i^+ \rrbracket, \\ (1 - X_{2i-1}, X_{2i-1}) &= \llbracket T + \neg \Pi_i - \Pi_i^+ \rrbracket. \end{aligned}$$

Le lemme suivant est une forme faible du théorème de complétude dans lequel on suppose une hypothèse plus forte sur $(\mathbb{P}_t, \mathbb{P}_f)$: $\mathbb{P}_t + \mathbb{P}_f - 1$ est la fonction nulle (dans le théorème on suppose seulement qu'elle s'annule sur les booléens).

Lemme IV.11 (Couples affines). *Pour tout polynôme $P \in \mathbb{k}[X_1, \dots, X_n]$, le couple de polynômes $(1 - P, P)$ est l'interprétation d'un terme.*

Démonstration. Faisons une récurrence sur le degré d de P . Si $d = 0$, il existe $a \in \mathbb{k}$ tel que $P = a$, d'où $(1 - P, P) = \llbracket (1 - a) T + a F \rrbracket$.

Dans le cas où $d > 0$, commençons par étudier le cas des monômes, i.e. $X^\mu = \prod X_i^{\mu_i}$ avec par exemple $\mu_1 \geq 1$.

$$\begin{aligned} (1 - X^\mu, X^\mu) &= (1 - X_1) \cdot (1, 0) + X_1 \cdot \left(1 - X_1^{\mu_1-1} \prod_{i \neq 1} X_i^{\mu_i}, X_1^{\mu_1-1} \prod_{i \neq 1} X_i^{\mu_i}\right) \\ &= \llbracket \text{if } \Xi_1 \text{ then T else } \Xi_{d-1} \rrbracket = \llbracket \Xi_\mu \rrbracket. \end{aligned}$$

où l'hypothèse de récurrence assure l'existence de Ξ_1 et Ξ_{d-1} respectivement interprétés par $(1 - X_1, X_1)$ et $(1 - X^{\mu'}, X^{\mu'})$ où $\mu' + [1] = \mu$. Finalement, si $P = \sum a_\mu \prod X_i^{\mu_i}$, alors

$$\begin{aligned} (1 - P, P) &= (1 - \sum a_\mu) (1, 0) + (\sum a_\mu) (1 - X^\mu, X^\mu) \\ &= \llbracket (1 - \sum a_\mu) \text{T} + (\sum a_\mu) \Xi_\mu \rrbracket. \end{aligned}$$

□

Le lemme qui suit permet de réduire le problème général à celui du Lemme IV.11 page 196 des couples affines.

Lemme IV.12 (Division polynômiale). *Soit $P \in \mathbb{k}[X_1, \dots, X_{2n}]$ avec $\mathbb{k}$ un corps infini. Si P s'annule sur les zéros communs des polynômes $X_{2i-1} + X_{2i} - 1$, alors pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe $Q_i \in \mathbb{k}[X_1, \dots, X_{2n}]$ tel que*

$$P = \sum_{i=1}^n Q_i (X_{2i-1} + X_{2i} - 1).$$

Démonstration. Commençons par effectuer le changement de variables

$$Y_i = X_{2i-1} + X_{2i} - 1, \quad Y_{i+n} = X_{2i},$$

pour $i \in \{1, \dots, n\}$. Nous notons P_Y le polynôme dans la nouvelle base. Alors pour tout $(y_i)_{i=n+1}^{2n} \in \mathbb{k}^n$, $P_Y(0, \dots, 0, y_{n+1}, \dots, y_{2n}) = 0$. Comme $\mathbb{k}[Y_2, \dots, Y_{2n}]$ est un anneau, $\mathbb{k}[Y_2, \dots, Y_{2n}][Y_1]$ est un anneau euclidien. La division euclidienne de P_Y par Y_1 donne $P_Y = Q_1 Y_1 + R_1$ où $Q_1 \in \mathbb{k}[Y_2, \dots, Y_{2n}][Y_1]$ et $R_1 \in \mathbb{k}[Y_2, \dots, Y_{2n}]$. En itérant ce processus sur R_i pour $1 \leq i \leq n-1$, nous obtenons

$$P_Y = \sum_{i=1}^n Q_i Y_i + R_n$$

où $Q_i \in \mathbb{k}[Y_1, \dots, Y_{2n}]$ et $R_n \in \mathbb{k}[Y_{n+1}, \dots, Y_{2n}]$. Pour tout $(y_i) \in \mathbb{k}^n$, nous avons $P_Y(0, \dots, 0, y_{n+1}, \dots, y_{2n}) = R_n(y_{n+1}, \dots, y_{2n}) = 0$. Comme $\mathbb{k}$ est infini, $R_n = 0$ et $P_Y = \sum_{i=1}^n Q_i Y_i$. En changeant à nouveau de variables, mais cette fois dans l'autre sens, nous obtenons l'existence des $Q_i \in \mathbb{k}[X_1, \dots, X_{2n}]$ pour $i \leq n$ tels que

$$P = \sum_{i=1}^n Q_i (X_{2i-1} + X_{2i} - 1).$$

□

Démonstration du Théorème IV.3 page 196. Soit $\mathbb{P} \in \mathcal{T}(\mathcal{B}^n \Rightarrow \mathcal{B})$. Grâce à l'Exemple IV.1 page 194, nous savons que $\mathbb{P}_t + \mathbb{P}_f - 1$ s'annule sur tous les zéros de $\{X_{2i-1} + X_{2i} - 1 ; 1 \leq i \leq n\}$. Appliquons alors le Lemme IV.12 page 197 : $\mathbb{P}_t + \mathbb{P}_f - 1 = \sum_{i=1}^n Q_i(X_{2i-1} + X_{2i} - 1)$ avec $Q_i \in \mathbb{k}[X_1, \dots, X_{2n}]$. Par conséquent

$$(\mathbb{P}_t, \mathbb{P}_f) = \sum_{i=1}^n [(1 - Q_i) \cdot (1, 0) + Q_i \cdot (X_{2i-1} + X_{2i}, 0)] + (1 - \mathbb{P}_f, \mathbb{P}_f) - n(1, 0).$$

D'après le Lemme IV.11 page 196, il existe des termes booléens $\mathbf{S}_i$ et $\mathbf{S}$ tels que $(1 - Q_i, Q_i) = \llbracket \mathbf{S}_i \rrbracket$ et $(1 - \mathbb{P}_f, \mathbb{P}_f) = \llbracket \mathbf{S} \rrbracket$. Nous avons vu à l'Équation (IV.11) que $(X_{2i-1} + X_{2i}, 0) = \llbracket \mathbf{\Pi}_i^+ \rrbracket$. Finalement, nous avons trouvé un terme dont la sémantique est

$$\mathbb{P} = \left\llbracket \sum_{i=1}^n (\text{if } \mathbf{S}_i \text{ then } \mathbf{T} \text{ else } \mathbf{\Pi}_i^+) + \mathbf{S} - n \mathbf{T} \right\rrbracket.$$

□

Remarque. L'hypothèse selon laquelle le corps $\mathbb{k}$ est infini nous permet d'avoir la bijection entre les fonctions polynomiales et les polynômes. Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, alors le théorème n'est plus vrai. En effet, comme le remarque Hyvernats [Hyv08a], les termes du λ -calcul barycentrique du type $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$ sont interprétés par des couples de polynômes $(\mathbb{P}_t, \mathbb{P}_f)$ tels que $\mathbb{P}_t(X, 1 - X) + \mathbb{P}_f(X, 1 - X) = 1$. Or les fonctions totales sont des couples de fonctions polynomiales (P_f, P_Q) telles que $\forall x, P_t(x, 1 - x) + P_f(x, 1 - x) = 1$. Si le corps est fini, on peut trouver un couple de polynômes qui n'est pas l'interprétation d'un terme mais dont les fonctions polynomiales associées forment un couple total.

Fonctions POr et Gus. Usuellement le ou-parallèle POr et la fonction de Gustave Gus sont rejetées car non séquentielles. Dans notre étude, elles sont les bienvenues précisément pour cette raison (elles sont parallèles !). La démonstration du théorème précédent nous permet de construire les λ -termes barycentriques qui représentent ces fonctions.

Exemple IV.3 (Ou-Parallèle et fonction de Gustave). Plusieurs couples de polynômes peuvent interpréter les fonctions POr $\in \mathcal{T}(\mathcal{B} \times \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B})$ et Gus $\in \mathcal{T}(\mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B})$ définies par

$$\begin{array}{ll} \text{POR}(\mathbf{T}, 0) = \mathbf{T} & \text{Gus}(\mathbf{T}, \mathbf{F}, 0) = \mathbf{T} \\ \text{POR}(0, \mathbf{T}) = \mathbf{T} & \text{Gus}(0, \mathbf{T}, \mathbf{F}) = \mathbf{T} \\ \text{POR}(\mathbf{F}, \mathbf{F}) = \mathbf{F} & \text{Gus}(\mathbf{F}, 0, \mathbf{T}) = \mathbf{T} \\ & \text{Gus}(\mathbf{F}, \mathbf{F}, \mathbf{F}) = \mathbf{F} \end{array}$$

Ces deux fonctions ne peuvent pas être programmées par un algorithme séquentiel, car on ne peut pas décider quel argument regarder en premier. Par contre, elles peuvent être codées par un λ -terme barycentrique. En effet, les couples de polynômes, de degré minimal, représentant respectivement ces fonctions sont

$$\begin{array}{ll} \text{POR} : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} & \\ (x, y) \mapsto (x_t + y_f - x_t y_t, x_f y_f) & \\ \text{Gus} : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} & \\ (x, y, z) \mapsto (x_t y_f + y_t z_f + z_t x_f, x_t y_t z_t + x_f y_f z_f) & \end{array}$$

On peut facilement voir que les fonctions P0r et Gus ainsi définies coïncident avec le «ou-parallèle» et la «fonction de Gustave» qu'elles représentent quand elles sont appliquées aux booléens T , F et 0 .

En utilisant la preuve du théorème, on trouve le terme P0r de $\Lambda_{\mathcal{B}}$

$$\begin{aligned} \text{P0r} = & \text{if } (2T - F + \neg\Pi_2 - \Pi_2^+) \text{ then } T \text{ else } \Pi_1^+ \\ & + \text{if } (T + \Pi_1 - \Pi_1^+) \text{ then } T \text{ else } \Pi_2^+ \\ & + \text{if } (T + \Pi_1 - \Pi_1^+) \text{ then } T \text{ else } (T + \Pi_2 - \Pi_2^+) \\ & - 2T \end{aligned}$$

qui se simplifie en

$$\begin{aligned} \text{P0r} = & \text{if } (2T - F + \neg\Pi_2 - \Pi_2^+) \text{ then } T \text{ else } \Pi_1^+ \\ & + \text{if } (T + \Pi_1 - \Pi_1^+) \text{ then } T \text{ else } (T + \Pi_2) \\ & - 2T \end{aligned}$$

Avant de donner le terme correspondant à Gustave, réorganisons un peu sa sémantique

$$\begin{aligned} \text{Gus} = & (x_f + x_t y_f)(1, 0) + x_t y_f(z_f, z_t) \\ & + (z_t + y_t z_f)(1, 0) + y_f z_f(x_t, y_f) \\ & - z_f(1, 0) + z_t[(1, 0) + (x_t, x_f) - (x_t + x_f, 0)] \\ & + x_f(z_f, z_t) + (1 - x_f)(1, 0) \\ & - (1, 0). \end{aligned}$$

On en déduit le terme

$$\begin{aligned} \text{Gus} = & \text{if } (\text{if } \Pi_1 \text{ then } \Pi_2 \text{ else } T) \text{ then } T \text{ else } \neg\Pi_3 \\ & + \text{if } (\text{if } \Pi_3 \text{ then } T \text{ else } \Pi_2) \text{ then } T \text{ else } \Pi_1 \\ & - \text{if } \Pi_3 \text{ then } (T + \Pi_1 - \Pi_1^+) \text{ else } T \\ & + \text{if } (T + \neg\Pi_1 - \Pi_1^+) \text{ then } T \text{ else } \neg\Pi_3 \\ & - T. \end{aligned}$$

Pour conclure sur la hiérarchie booléenne, notons qu'il est possible de montrer, par des arguments de dimension, que la sémantique totale n'est pas complète pour le type $\mathcal{B} \multimap \mathcal{B} \multimap \mathcal{B}$. On ne sait cependant pas s'il y a complétude pour l'ordre supérieur de la hiérarchie booléenne intuitionniste (comme par exemple pour le type $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$.)

Non-complétude pour la hiérarchie des entiers. Ce paragraphe résulte des nombreuses discussions que nous avons eues à ce sujet avec Pierre Hyvernât.

Rappelons que le candidat de totalité associé au type des entiers est

$$\mathcal{T}(\mathcal{Nat}) = \left\{ x \in \mathbb{k}^{(\mathbb{N})} ; \sum_{i \leq n} x_i = 1 \right\},$$

et que le candidat de totalité associé au type entier du premier ordre est

$$\mathcal{T}(\mathcal{Nat} \Rightarrow \mathcal{Nat}) = \left\{ P : \mathbb{k}^{(\mathbb{N})} \rightarrow \mathbb{k}^{(\mathbb{N})} ; \forall x \in \mathbb{k}^{(\mathbb{N})}, \sum_{i \leq n} x_i = 1 \Rightarrow \sum_{i \leq n} P_i(x) = 1 \right\}.$$

Or pour toute injection $f : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}$, il existe une fonction $P_f \in \mathcal{T}(\mathcal{Nat} \Rightarrow \mathcal{Nat})$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{k}^{(\mathbb{N})}, P_f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_{f(n)} e_n = x \circ f.$$

On vérifie facilement que P_f est à valeur dans $\mathbb{k}^{(\mathbb{N})}$ et qu'elle est linéaire. Comme les espaces de départ et d'arrivée sont tous deux $E_{\mathcal{Nat}}$, ils sont discrets (voir Exemple III.11 page 98). On a automatiquement la continuité, donc $P_f \in E_{\mathcal{Nat} \Rightarrow \mathcal{Nat}}$ (on aurait aussi pu vérifier que le support est une relation finitaire ce qui est aussi simple). Remarquons que l'application $f \mapsto P_f$ est injective.

Lemme IV.13. *Il existe un nombre non-dénombrable d'injections de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.*

Démonstration. Ce lemme peut se prouver par l'absurde en utilisant un argument de diagonalisation. On suppose que l'ensemble des injections de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est dénombrable et on l'énumère $\{u_i ; i \in \mathbb{N}\}$. Puis, on construit alors la suite $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ comme suit :

- $n_0 = 1$,
- supposons la suite construite jusqu'au rang k telle qu'elle vérifie la propriété

$$\forall i \leq k, u_i(n_i) \neq u_k(n_k) \text{ et } u_k(n_k) \neq u_k(k).$$

On choisit n_{k+1} tel que $u_k(n_k) \notin \{u_k(k), u_i(n_i), 0 \leq i \leq k\}$.

La fonction f définie par $\forall i \in \mathbb{N}, f(i) = u_i(n_i)$ est une injection qui n'a pas été énumérée. $\square$

De ce lemme, on déduit que $\mathcal{T}(\mathcal{Nat} \Rightarrow \mathcal{Nat})$ est non-dénombrable. On ne peut donc pas avoir de complétude avec l'ensemble des termes du type booléen du premier ordre qui est dénombrable puisque le corps $\mathbb{k}$ est supposé dénombrable.

V - DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR

DANS LES RÉSEAUX

Plan du chapitre

V.1 Logique linéaire différentielle	203
V.1.1 Formules et calcul des séquents	203
V.2 Développement de Taylor pour le λ-calcul	206
V.2.1 Syntaxe	206
V.2.2 Réduction	206
V.2.3 Développement de Taylor	207
V.3 Réseaux	210
V.3.1 Réseaux d'interaction	211
V.3.2 Réseaux de preuve de la logique linéaire	213
V.3.3 Réseaux de preuve de la logique linéaire différentielle	214
V.3.4 Développement de Taylor des réseaux	215
V.4 Réciproque du développement de Taylor syntaxique	218
V.4.1 Présentation du problème et de sa solution	219
V.4.2 Formalisation des R(LL)	223
V.4.3 Algorithme de fusion	227
V.4.4 Conclusion	244

Dans le Chapitre III sur les espaces de Lefschetz, nous avons exhibé un modèle de la logique linéaire qui admet un opérateur différentiel (voir la Section III.4). En partant de cette observation, le λ -calcul a été étendu avec un opérateur différentiel décrit au Chapitre IV (voir la Section IV.2.3). Cependant, nous avons vu que l'introduction de l'opérateur différentiel induit l'introduction d'une structure algébrique et notamment d'un *zéro* qui pose des problèmes d'un point de vue logique.

Dans le Chapitre IV, nous avons cherché une réponse syntaxique et sémantique à ce problème. Nous avons mis en évidence une sémantique à la fois *totale* (elle permet d'éviter le zéro) et *cohérente*. Dans ce chapitre, nous allons aborder ce problème d'un point de vue logique. Nous allons donc nous pencher sur l'extension différentielle de la logique linéaire et essayer de comprendre quel est son contenu logique. Pour cela, nous nous servirons de la formule de Taylor.

Afin d'expliquer notre démarche, revenons sur les différentes présentations de cette formule dans la sémantique, dans la syntaxe et dans la logique.

Dans la sémantique, la formule de Taylor (voir la Proposition III.10 page 172) permet d'exprimer les fonctions appartenant à l'interprétation du type $A \Rightarrow B$ comme des séries entières, c'est-à-dire des sommes formelles de polynômes homogènes.

Dans la syntaxe, cette formule permet de coder l'application usuelle par une somme d'applications multilinéaires, c'est-à-dire de dérivées itérées et évaluées en 0. Le sous-système du λ -calcul différentiel obtenu en considérant uniquement les termes de cette forme est appelé λ -calcul avec ressources. Il s'apparente aussi à un sous-système du λ -calcul avec ressources que Boudol avait introduit avec des motivations venant du π -calcul [Bou93].

Le développement de Taylor syntaxique a été étudié dans le cadre du λ -calcul et du λ -calcul avec ressources [ER08]. Ainsi, les termes avec ressources issus du développement sont caractérisés par une relation d'uniformité. De plus, le développement commute à la réduction du λ -calcul.

Dans la logique, la formule de Taylor va transformer une preuve en remplaçant chacune de ses règles de promotions par une série formelle de preuves différentielles. Cette version logique de la formule est issue d'une part de la traduction de la logique intuitionniste dans la logique linéaire et d'autre part de la formule de Taylor dans le cadre du λ -calcul.

Plutôt que d'utiliser le formalisme des séquents, nous allons nous placer dans le cadre des réseaux de preuves. Introduits par Girard [Gir86], les réseaux de preuves forment une sémantique graphique des séquents. Ils s'affranchissent de plusieurs règles de commutation des preuves. Ainsi la formulation du développement de Taylor pour la logique linéaire est beaucoup plus directe lorsqu'elle est exprimée dans ce langage graphique que dans celui des séquents.

Les réseaux différentiels [ER06] sont à DiLL ce que les réseaux de preuves sont à LL. Dans ce cadre, la principale action du développement de Taylor est de remplacer chaque boîte des réseaux de LL par une série formelle de réseaux de DiLL représentant des copies de cette boîte.

Avec Pagani [PT09], nous avons cherché à mieux comprendre quel est le contenu logique des réseaux différentiels et donc de la logique linéaire différentielle.

Le développement de Taylor d'un réseau va être composé de réseaux différentiels qui ont une forme similaire au réseau de la logique linéaire dont ils sont issus. C'est cette relation de cohérence qui nous intéresse. Elle ne peut pas être étudiée dans la sémantique des espaces de Lefschetz finitaires puisque le développement de Taylor décompose une série formelle en somme de monômes indépendants. Ainsi, la sémantique ne reflète pas cette cohérence. C'est pourquoi nous avons utilisé des outils des graphes et des réseaux d'interaction. Nous avons introduit un algorithme de fusion permettant de décider si une série formelle de réseaux différentiels est issue d'un réseau de la logique linéaire via le développement de Taylor. Nous souhaitons ainsi déterminer une sous-classe de réseaux différentiels dont la signification logique est claire.

Soulignons que l'étude que nous avons menée peut être qualifiée de statique car elle ne traite pas le comportement du développement de Taylor vis-à-vis de l'élimination des coupures.

Plan du chapitre. Nous commençons ce chapitre par introduire la logique linéaire différentielle dans le formalisme traditionnel des séquents (voir la Section V.1), ce qui permet de comparer ce système à celui introduit dans le préluce. Nous définissons le développement de Taylor dans le λ -calcul et présentons les résultats d'uniformité établis dans ce cadre (Section V.2).

Ensuite, nous nous plaçons dans le formalisme des réseaux d'interactions qui permet de représenter géométriquement les séquents. Après avoir introduit les réseaux de LL, ainsi que les réseaux de DiLL, nous définissons le développement de Taylor des réseaux dans la Section V.3.

Une fois ce cadre posé, nous abordons la question de l'uniformité dans les réseaux de DiLL. Dans la Section V.4, nous présentons l'algorithme de fusion qui répond à ce problème. Pour cela nous avons besoin de reformuler les réseaux de la logique linéaire en utilisant des réseaux étiquetés mieux adaptés à notre contexte. Ensuite, nous présentons le système de réécriture qui nous permet de définir notre algorithme. Nous prouvons les propriétés de complétude et de correction de cette approche. Enfin, nous donnons quelques clés pour comprendre nos motivations dans la mise en place de cette technique.

V.1 Logique linéaire différentielle

Cette section introduit la logique linéaire différentielle. Nous donnons quelques intuitions sur le formalisme et quelques repères sur la sémantique. Ensuite, nous définissons la syntaxe et le calcul des séquents DiLL. Nous ne présentons pas la réduction car nous n'avons abordé le problème de l'uniformité que d'un point de vue statique. Par la suite, nous utiliserons de préférence le formalisme graphique des réseaux d'interaction qui est plus facile à manipuler que celui des séquents.

V.1.1 Formules et calcul des séquents

Les formules de DiLL sont identiques à celles de MELL, c'est-à-dire qu'elles sont données par la grammaire

$$A, B := X \mid X^\perp \mid 1 \mid A \otimes B \mid \perp \mid A \wp B \mid !A \mid ?A,$$

où X et $X^\perp$ parcourent un ensemble de variables propositionnelles.

Le calcul des séquents de DiLL (voir Figure V.1.1 page 204) est une variante de celui de MELL (voir Figure I.1 page 9). On a ajouté un groupe vectoriel et, dans le groupe exponentiel, la règle de promotion est remplacée par trois nouvelles règles co-structurelles qui sont les symétriques des règles structurelles.

Rappelons que les règles structurelles de LL (voir la Figure I.1 page 9) permettent de manipuler la modalité exponentielle : ?.

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A} \quad (?w) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A} \quad (?d) \qquad \frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A} \quad (?c)$$

Les formules précédées par cette modalité peuvent être considérées comme des données *multiplicatives*, qui pourront être affaiblies, i.e. oubliées, et contractées, i.e. dupliquées. Sémantiquement, ces règles se traduisent par l'existence d'une structure de co-monoïde

$$e_A : !A \rightarrow 1 \quad (\text{affaiblissement}), \qquad d_A : !A \rightarrow !A \otimes !A \quad (\text{contraction}),$$

• **Groupe identité :**

$$\frac{}{\vdash X, X^\perp} \text{ (ax)} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash A^\perp, \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{ (Cut)}$$

• **Groupe Multiplicatif :**

$$\begin{array}{ll} \frac{}{\vdash 1} \text{ (1)} & \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \perp} \text{ (}\perp\text{)} \\ \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \wp B} \text{ (}\wp\text{)} & \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B} \text{ (}\otimes\text{)} \\ \frac{}{\vdash \perp} \text{ (Mix}_0\text{)} & \frac{\vdash \Gamma \quad \vdash \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{ (Mix)} \end{array}$$

• **Groupe Vectoriel :**

$$\frac{}{\vdash \Gamma} \text{ (0)} \qquad \frac{\vdash \Gamma \quad \vdash \Gamma}{\vdash \Gamma} \text{ (+)}$$

• **Groupe Exponentiel :**

$$\begin{array}{lll} \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A} \text{ (?w)} & \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A} \text{ (?d)} & \frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A} \text{ (?c)} \\ \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, !A} \text{ (!w)} & \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, !A} \text{ (!d)} & \frac{\vdash \Gamma, !A \quad \vdash \Delta, !A}{\vdash \Gamma, \Delta, !A} \text{ (!c)} \end{array}$$

FIG. V.1: Calcul des séquents pour la logique linéaire différentielle (DILL)

sur la co-monade exponentielle (voir la Section I.2) :

$$\epsilon_A : !A \rightarrow A \quad (\text{dereliction}).$$

Regardons l'action de cette structure dans la catégorie **LinFin**, où les fonctions de type $A \Rightarrow B$ sont des fonctions analytiques entre les espaces de Lefschetz finitaires représentant respectivement A et B . En composant à gauche par la (dereliction), on transforme une fonction linéaire $f : A \multimap B$ en une fonction analytique $f \circ \epsilon_A : !A \rightarrow B$. En effet, toute fonction linéaire est aussi analytique. En composant à gauche par la (contraction), on transforme une fonction analytique à deux variables $(x, y) \mapsto F(x, y)$ en une fonction analytique à une variable $x \mapsto F(x, x)$. Enfin, la composition par l'affaiblissement permet de transformer un vecteur $y : 1 \multimap A$ de l'espace de Lefschetz représentant A , en la fonction analytique constante égale à y .

Les règles co-structurelles sont les symétriques des règles structurelles :

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, !A} \quad (!w) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, !A} \quad (!d) \qquad \frac{\vdash \Gamma, !A, !A}{\vdash \Gamma, !A} \quad (!c).$$

D'un point de vue sémantique, elles peuvent être vues comme une structure de monoïde

$$u_A : 1 \rightarrow !A \quad (\text{co-affaiblissement}), \qquad m_A : !A \otimes !A \rightarrow !A \quad (\text{co-contraction}),$$

à laquelle on adjoint un opérateur

$$\partial_A : A \rightarrow !A \quad (\text{co-dereliction}).$$

Dans la catégorie **LinFin**, ces opérations peuvent être vues comme des manipulations de fonctions analytiques. Ainsi, par composition à gauche le (co-affaiblissement) applique une fonction analytique en 0. La (co-contraction) va transformer une fonction analytique à un paramètre $x \mapsto F(x)$ en la fonction analytique à deux paramètres $(x, y) \mapsto F(x + y)$. Enfin, la (co-dereliction) va calculer la dérivée d'une fonction analytique en 0. Remarquons que contrairement à la (dereliction) qui est un plongement des fonctions linéaires dans les fonctions analytiques, la (co-dereliction) est beaucoup plus destructive puisqu'elle ne retient que le terme d'ordre 1 de la série entière associée à la fonction analytique.

L'opérateur ∂_A peut-être compris en terme de différentiation. Pour cela étudions le typage de l'opération de différentiation en mathématiques. La différentielle d'une fonction $f : A \Rightarrow B$ est une fonction $Df : A \Rightarrow (A \multimap B)$. En effet, pour tout $x : A$, la dérivée de f dans la direction x , notée $Df_x : A \multimap B$, est une application linéaire. De plus, si la fonction est analytique (ce qui est le cas des fonctions apparaissant dans l'interprétation de $A \Rightarrow B$ dans **LinFin**), alors sa dérivée est aussi analytique. En utilisant le codage de la flèche intuitionniste $A \Rightarrow B \equiv !A \multimap B$ et l'adjonction entre le produit tensoriel et la flèche linéaire, on peut donc typer l'opérateur différentiel par

$$\forall f : !A \multimap B, Df : !A \otimes A \multimap B.$$

De plus, la différentielle d'une fonction peut-être simplement calculée en composant un opérateur $!A \otimes A \multimap !A$ vérifiant certaines propriétés avec la fonction $f : !A \multimap B$. Il ne nous reste plus qu'à comprendre cet opérateur. Il s'avère qu'il se décompose en utilisant la co-contraction et la co-déréliction :

$$\begin{aligned} m_A : !A \otimes !A &\rightarrow !A, & \partial_A : A &\rightarrow !A, \\ Df : !A \otimes A &\xrightarrow{\text{id} \otimes \partial_A} !A \otimes !A \xrightarrow{m_A} !A \xrightarrow{f} B. \end{aligned}$$

Pour finir, notons qu'il existe deux familles de modèles catégoriques de DILL. La première s'appuie sur la dualité entre les règles structurelles et co-structurelles pour introduire les propriétés nécessaires aux catégories de Seely pour modéliser DILL. C'est le point de vue adopté dans [BCS06, Fio07]. La seconde s'inspire de la formule de Taylor pour étendre les catégories de Seely. C'est le point de vue adopté par De Carvalho dans sa thèse [dC07].

V.2 Développement de Taylor pour le λ -calcul

Nous allons à présent décrire le développement de Taylor dans le λ -calcul avec ressources comme l'ont fait Ehrhard et Regnier dans [ER08]. Plutôt que d'utiliser l'opérateur différentiel présenté dans le Paragraphe IV.2.3, nous allons introduire une application *multilinéaire*, notée $\langle - \rangle$. Le calcul ainsi obtenu s'apparente au λ -calcul avec ressources de Boudol [Bou93]. Nous utilisons cette variation afin de bien séparer la partie multi-linéaire et la partie non-linéaire du λ -calcul différentiel.

V.2.1 Syntaxe.

Étant donné que le développement de Taylor d'un λ -terme peut être une somme infinie, nous devons introduire des sommes formelles de termes.

Soit $\mathbb{k}$ un corps. Comme nous l'avons fait dans le cas des λ -calculs algébrique et différentiel, on définit deux sortes de termes : les termes simples (variant dans $\Lambda_{\mathcal{R}\text{at}}$) et les termes avec ressources (variant dans $\Lambda_{\mathcal{R}}$) qui sont des sommes formelles de termes simples :

$$\begin{aligned} S \in \Lambda_{\mathcal{R}} &::= \sum_{n=1}^{\infty} a_n s_n \quad \text{où} \quad \forall n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{k}, \forall m \neq n, s_n \neq_{\alpha} s_m \\ s, s_i \in \Lambda_{\mathcal{R}\text{at}} &::= x \in \mathcal{V} \mid \lambda x.s \mid \langle s \rangle [s_1, \dots, s_n] \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}, i \leq n. \end{aligned}$$

Rappelons que la notation $[s_1, \dots, s_n]$ désigne le multi-ensemble des $s_1, \dots, s_n$.

Nous quotientons les termes par les relations d' α -équivalence, d'associativité et de commutativité de la somme formelle.

V.2.2 Réduction

La substitution multilinéaire $\partial_x(s, [s_1, \dots, s_n])$ consiste à remplacer chaque occurrence de x par exactement un des s_i pour $1 \leq i \leq n$. Elle est nulle si le nombre $n_{x,s}$ d'occurrences de x

dans s n'est pas égal au cardinal du multi-ensemble. On note Σ_n l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$ et $x_1, \dots, x_{n_{s,x}}$ les occurrences libres de x dans s .

$$\partial_x(s, [s_1, \dots, s_n]) = \begin{cases} 0 & \text{si } n_{s,x} \neq n, \\ \sum_{\sigma \in \Sigma_n} s[s_{\sigma(i)}/x_i ; 1 \leq i \leq n_{s,x}] & \text{si } n_{s,x} = n. \end{cases}$$

La réduction est alors définie en termes de substitution multilinéaire :

$$\langle \lambda x.s \rangle [s_1, \dots, s_n] \rightarrow \partial_x(s, [s_1, \dots, s_n]).$$

et l'application multilinéaire est aussi linéaire en la fonction (comme pour le λ -calcul différentiel).

La réduction de $\Lambda_{\mathcal{R}}$ est confluente et lorsque les coefficients sont entiers, la réduction est fortement normalisable [ER06]. On note alors NF l'opérateur de forme normale.

L'opérateur de forme normale est bien défini sur les termes de Λ_{at} .

V.2.3 Développement de taylor

Commençons par définir, par induction sur la structure, les coefficients à valeurs dans le corps $\mathbb{k}$ qui vont apparaître dans le développement de Taylor. Soient x une variable, $s, s_1, \dots, s_n$ des λ -termes avec ressources et S un multi-ensemble de λ -termes avec ressources.

$$\begin{aligned} m(x) &\stackrel{\text{def}}{=} 1, \\ m(\lambda x.s) &\stackrel{\text{def}}{=} m(s), \\ m(S) &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_{s \in S} S(s)! \cdot m(s)^{S(s)} \\ m(\langle s \rangle S) &\stackrel{\text{def}}{=} m(s) \cdot m(S) \end{aligned}$$

Ensuite, définissons l'ensemble des termes avec ressources qui apparaissent dans le développement de Taylor.

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(\mathbf{x}) &\stackrel{\text{def}}{=} \{x\}, \\ \mathbb{T}(\lambda \mathbf{x}.s) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda x.s ; s \in \mathbb{T}(\mathbf{s})\}, \\ \mathbb{T}((\mathbf{s})\mathbf{t}) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\langle s \rangle [t_1, \dots, t_n] ; s \in \mathbb{T}(\mathbf{s}), \forall 1 \leq i \leq n, t_i \in \mathbb{T}(\mathbf{t})\}. \end{aligned}$$

Exemple V.1. Prenons l'exemple du terme $\lambda x \cdot \mathbf{xx}$. On note $[x^n]$ le multi-ensemble contenant n fois la variable x . On a alors $\mathbb{T}(\lambda \mathbf{x} \cdot \mathbf{xx}) = \{\lambda x.\langle x \rangle [x^n] ; n \in \mathbb{N}\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m(\lambda x.\langle x \rangle [x^n]) = n!$.

Définition V.1. Le développement de Taylor d'un λ -terme $\mathbf{t}$ est le λ -terme avec ressources

$$T(\mathbf{s}) = \sum_{s \in \mathbb{T}(\mathbf{s})} \frac{1}{m(s)} s.$$

Exemple V.2. Donnons les développements de Taylor de certains termes.

$$\begin{aligned}
 T((\lambda \mathbf{x}.\mathbf{xx})\lambda \mathbf{z}.\mathbf{z}) &= \sum_{p,q \in \mathbb{N}} \frac{1}{p!q!} \langle \lambda x.\langle x \rangle [x^p] \rangle [(\lambda z.z)^q], \\
 T((\lambda \mathbf{x}.\mathbf{xx})\lambda \mathbf{x}.\mathbf{xx}) &= \sum_{k,n_0,\dots,n_k \in \mathbb{N}} \frac{1}{n_0! \cdots n_k!} \langle \lambda x.\langle x \rangle [x^{n_0}] \rangle [\lambda x.\langle x \rangle [x^{n_1}], \dots, \lambda x.\langle x \rangle [x^{n_k}]].
 \end{aligned}$$

Concluons ce paragraphe par les propriétés de ce développement.

La première propriété montre que les termes avec ressources issus du développement de Taylor sont de forme homogène.

Proposition V.1 (Uniformité). [ER08, Lemma 19] *Pour tout λ -terme, l'ensemble des termes apparaissant dans le développement de Taylor est une clique maximale pour la relation d'équivalence $\circ$ sur les termes, dite **uniformité**, définie par :*

$$\begin{aligned}
 x \circ t' &\iff t' = x, \\
 \lambda x.s \circ t' &\iff t' = \lambda x.s' ; s \circ s' \\
 \langle s \rangle [s_1, \dots, s_n] \circ t' &\iff t' = \langle s' \rangle [s'_1, \dots, s'_m] ; \begin{cases} s \circ s' \\ \forall r, t \in [s_1, \dots, s_n, s'_1, \dots, s'_m], \quad r \circ t. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ehrhard et Regnier ont montré que l'on peut généraliser l'opérateur de forme normal aux termes avec ressources qui sont les sommes formelles de termes atomiques uniformes entre eux (deux à deux). En effet, ils ont montré ([ER08, Theorem 22]) que si deux termes sont cohérents alors les termes qui apparaissent dans leurs formes normales sont cohérents. Par ailleurs, si deux termes sont cohérents mais distincts, les ensembles de termes apparaissant dans leurs formes normales respectives sont disjoints.

On prolonge l'opérateur de forme normale des termes simples aux termes avec ressources uniformes par la définition suivante. Soit $\{s_n ; n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble uniforme de termes avec ressources. Leur somme formelle admet une forme normale définie par :

$$\text{NF} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n s_n \right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{NF}(s_n).$$

Cette formule est bien définie, car tout terme $\mathbf{t}$ apparaissant dans $\text{NF}(s_n)$ (avec $n \in \mathbb{N}$) n'apparaît dans aucun des $\text{NF}(s_m)$ (avec $m \neq n$). Ainsi, le coefficient de $\mathbf{t}$ dans $\text{NF}(\sum_{n=1}^{\infty} a_n s_n)$ est égal à a_n fois le coefficient de $\mathbf{t}$ dans $\text{NF}(s_n)$. Ce coefficient est donc bien défini. Remarquons que seule l'uniformité assure l'existence de la forme normale d'un terme avec ressources.

La deuxième propriété montre que le développement de Taylor se comporte bien vis à vis de la réduction. Comme le λ -calcul non typé ne normalise pas, nous utilisons les arbres de Böhm [Bar84]. Ils permettent d'approcher des termes potentiellement infinis par des termes partiels. Ainsi, l'arbre de Böhm d'un terme est l'ensemble des approximations finies de ses réduits. Ces approximations finies sont des arbres de Böhm dits *élémentaires*, c'est-à-dire ou bien $\perp$, ou bien un λ -terme en forme normale, pouvant contenir des occurrences d'une variable spéciale notée $\perp$, qui ne peut apparaître en position de variable de tête. On définit la notion

d'approximation via l'ordre d'information : $\mathbf{b} \leq \mathbf{c}$ si et seulement si ou bien $\mathbf{b} = \perp$, ou bien $\mathbf{b}$ est obtenu en remplaçant quelques un des sous-termes de $\mathbf{c}$ (qui ne sont pas des variables de têtes) par $\perp$.

Définition V.2. [ER] L'ensemble $\mathcal{B}$ des arbres de Böhm élémentaires est défini par

$$\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathcal{B} ::= \perp \quad | \quad \lambda \mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_p(\mathbf{x}) \mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n.$$

Il est muni d'un ordre dit d'**information** défini par

$$\begin{aligned} \perp &\leq \mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{b} \in \mathcal{B}, \\ \mathbf{b} &\leq \mathbf{c} \quad \text{si} \quad \begin{cases} \mathbf{b} = \lambda \mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_p(\mathbf{x}) \mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n, \\ \mathbf{c} = \lambda \mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_p(\mathbf{x}) \mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_n, \\ \mathbf{b}_i \leq \mathbf{c}_i, \forall i \leq n. \end{cases} \end{aligned}$$

Un arbre de Böhm $\mathbf{B}$ est un ensemble d'arbres de Böhm élémentaires satisfaisant les conditions suivantes

$$\begin{aligned} \perp &\in \mathbf{B}, \\ \mathbf{b} &\leq \mathbf{c}, \mathbf{c} \in \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{b} \in \mathbf{B}, \\ \mathbf{b}, \mathbf{b}' &\in \mathbf{B}, \exists \mathbf{c} \in \mathbf{B} ; \mathbf{b}, \mathbf{b}' \leq \mathbf{c}. \end{aligned}$$

À tout λ -terme, on associe un arbre de Böhm de la manière suivante

$$\begin{aligned} \text{BT}_0(\mathbf{s}) &= \perp \\ \text{BT}_{n+1}(\lambda \mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_p(\mathbf{x}) \mathbf{s}_1 \dots \mathbf{s}_k) &= \lambda \mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_p(\mathbf{x}) \text{BT}_n(\mathbf{s}_1) \dots \text{BT}_n(\mathbf{s}_k) \\ \text{BT}_{n+1}(\lambda \mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_p(\lambda \mathbf{x}. \mathbf{s}) \mathbf{t} \mathbf{s}_1 \dots \mathbf{s}_k) &= \text{BT}_n(\lambda \mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_p(\mathbf{s}[\mathbf{t}/\mathbf{x}]) \mathbf{s}_1 \dots \mathbf{s}_k) \\ \text{BT}(\mathbf{s}) &= \{\mathbf{b} \in \mathbf{B} ; \exists n \in \mathbb{N}, \mathbf{b} \leq \text{BT}_n(\mathbf{s})\}. \end{aligned}$$

L'ensemble des termes avec ressources qui apparaissent dans le développement de Taylor d'un arbre de Böhm élémentaire est défini comme dans le cas des λ -termes en posant

$$\mathbb{T}(\perp) \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset.$$

On remarque que l'ensemble des termes avec ressources apparaissant dans le développement de Taylor est croissant pour l'ordre d'information des arbres de Böhm élémentaires :

$$\mathbf{b} \leq \mathbf{c} \Rightarrow \mathbb{T}(\mathbf{b}) \leq \mathbb{T}(\mathbf{c}).$$

L'ensemble des termes avec ressources apparaissant dans le développement d'un arbre de Böhm $\mathbf{B}$ est

$$\mathbb{T}(\mathbf{B}) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\mathbf{b} \in \mathbf{B}} \mathbb{T}(\mathbf{b})$$

qui est une union dirigée grâce aux conditions vérifiées par les arbres de Böhm.

Enfin, le développement de Taylor d'un arbre de Böhm $\mathbf{B}$ est donné par

$$T(\mathbf{B}) = \sum_{b \in \mathbb{T}(\mathbf{B})} \frac{1}{m(b)} b.$$

Exemple V.3. L'arbre de Böhm du terme en forme normale $\lambda x.xx$ est l'ensemble de ses approximations :

$$BT(\lambda x.xx) = \{\perp, \lambda x.x\perp, \lambda x.xx\}.$$

L'arbre de Böhm de $(\lambda x.xx)\lambda z.z$ est l'ensemble des approximations de sa forme normale $\lambda z.z$:

$$BT((\lambda x.xx)\lambda z.z) = \{\perp, \lambda z.z\}$$

L'arbre de Böhm de $(\lambda x.xx)\lambda x.xx$ est réduit à $\perp$.

Le théorème suivant relie le développement de Taylor de l'arbre de Böhm d'un λ -terme avec la forme normale de son développement de Taylor.

Théorème V.1 (Formes normales). [ER08, Theorem 11] *Le développement de Taylor commute avec la normalisation,*

$$T(BT(s)) = NF(T(s)) = \sum_{s \in \mathbb{T}(s)} \frac{1}{m(s)} NF(s).$$

La forme normale de $T(s)$ est bien définie car son support est une clique pour la relation d'uniformité.

Cette égalité se traduit par la commutation du diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{T} & \Lambda_{\mathcal{R}} \\ BT \downarrow & & \downarrow NF \\ \Lambda & \xrightarrow{T} & \Lambda_{\mathcal{R}} \end{array}$$

Exemple V.4. Regardons la signification du théorème dans les exemples.

Dans le développement de Taylor de $(\lambda x.xx)\lambda z.z$, le seul terme avec ressources qui ne se réduit pas sur 0 est $\langle \lambda x.\langle x \rangle [x] \rangle [(\lambda z.z)^2]$, il se réduit en $2 \cdot \lambda z.z$. On vérifie l'égalité du théorème

$$T(BT((\lambda x.xx)\lambda z.z)) = \lambda z.z$$

Dans le cas de $(\lambda x.xx)\lambda x.xx$, tous les termes du développement de Taylor se réduisent sur 0. Ce qui correspond au fait que l'arbre de Böhm de ce terme est réduit à $\perp$.

On remarque sur cet exemple que le développement de Taylor permet d'énumérer tous les scénarios d'exécutions possibles qu'elles produisent finalement une erreur ou un résultat. L'arbre de Böhm au contraire ne donne que des approximations de résultats.

V.3 Réseaux

Dans cette section, nous allons présenter les réseaux de la logique linéaire, les réseaux différentiels et le développement de Taylor qui permet de traduire les premiers dans les seconds. Tous les réseaux que nous considérons sont des réseaux d'interaction. C'est pourquoi, nous commençons par introduire cette notion.

V.3.1 Réseaux d'interaction

Les réseaux d'interaction forment un langage de programmation graphique qui a été introduit par Lafont [Laf90] à la suite des travaux de Girard [Gir87] sur la représentation géométrique des preuves de la logique linéaire.

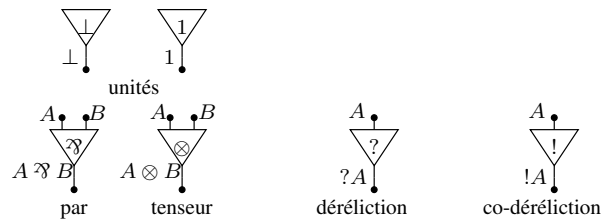
Syntaxe. Nous présentons ici une version des réseaux d'interaction pour la logique linéaire différentielle qui est adaptée au problème que nous aborderons à la Section V.4.

Définition V.3. Un **réseau d'interaction** est un hyper-graphe fini muni d'une fonction de typage. Il peut-être décrit par la donnée de ses

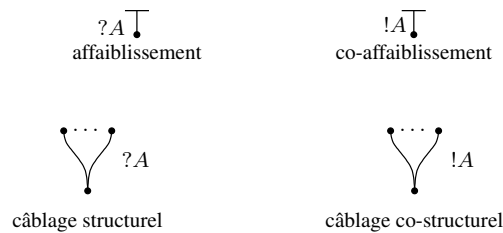
- **ports** qui sont les noeuds de l'hyper-graphe typés par des formules de LL

• A

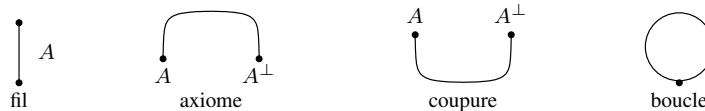
- **cellules** qui sont des hyper-arrêtes dirigées et typées par des formules de LL



- **câblages (co-)structurels**¹ qui sont des hyper-arrêtes dirigées dont les ports sont typés par la même formule exponentielle.

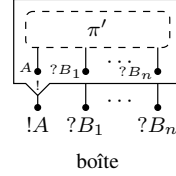


- **fils** qui sont des arrêtes reliant soit deux ports de même type (fils normaux qui sont dirigées du haut vers le bas) ; soit deux ports de types orthogonaux (**axiome** qui possèdent deux cibles et **coupure** qui possèdent deux sources) ; soit un seul port (**boucles** qui ne sont pas dirigées).



¹Les câblages structurels remplacent les arbres de contraction et de co-contraction que l'on retrouve dans les réseaux de la logique linéaire. Nous avons adopté cette représentation car elle permet de coder visuellement l'associativité des arbres de (co-)contractions.

- **boîtes** qui sont des hyper-arêtes étiquetées par un réseau d'interaction, appelé **contenu**. On ne considère ici que les boîtes dont l'interface correspond à celle de son contenu comme sur la figure ci-dessous.



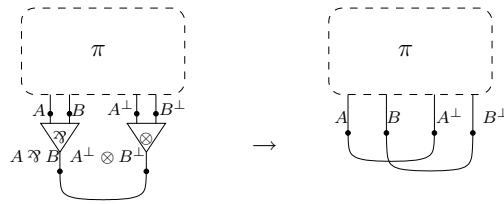
La **profondeur** d'un élément (cellule, câblage, fils, boîte) d'un réseau avec boîte est définie par induction sur la structure du réseau. S'il n'est pas contenu dans une boîte, sa profondeur est 0. Il est de profondeur $d + 1$ s'il existe une boîte b de profondeur 0 telle qu'il soit de profondeur d dans le contenu de cette boîte b . La profondeur d'un réseau est la profondeur maximale de ses éléments.

Pour toute profondeur d , on notera $\text{box}_d(\pi)$ l'ensemble des boîtes de profondeur d du réseau π et $\text{box}(\pi)$ l'ensemble de ses boîtes de profondeur quelconque.

La cible d'une cellule ou d'un câblage est appelée **port principal** et sa source **port auxiliaire**.

Un port est dit **libre** lorsqu'il n'appartient ni à une cellule, ni à une boucle (on suppose que toute cellule est reliée à un fil). L'ensemble des ports libres associés à leur type respectif est appelé **interface**. Enfin, l'interface de deux réseaux est dite **appariée** lorsqu'il existe une bijection entre les ports de même type.

Interaction. Dans les réseaux l'interaction est présentée par un système de réécriture. Cette interaction représente l'élimination des coupures des séquents de LL de manière locale et asynchrone. Nous invitons le lecteur intéressé à consulter l'article [Laf90] pour avoir plus de détails. Précisons que l'interaction dans un réseaux se fait au niveau de deux cellules reliées par un port principal. Par exemple, l'interaction entre le $\mathfrak{Y}$ et le $\otimes$ est



Signalons de plus que la réécriture dans les réseaux d'interaction a été précisée dans les thèses de Vaux [Vau07] (pour la notion de fusion des fils) et de De Falco [DF09] (où les réseaux sont donnés par des permutations de ports correspondantes aux fils et la réduction consiste alors en des opérations sur les permutations).

Dans le reste de ce chapitre, nous nous restreignons aux réseaux sans coupure. En effet, nous nous sommes concentrés sur les propriétés statiques du développement de Taylor dans les réseaux.

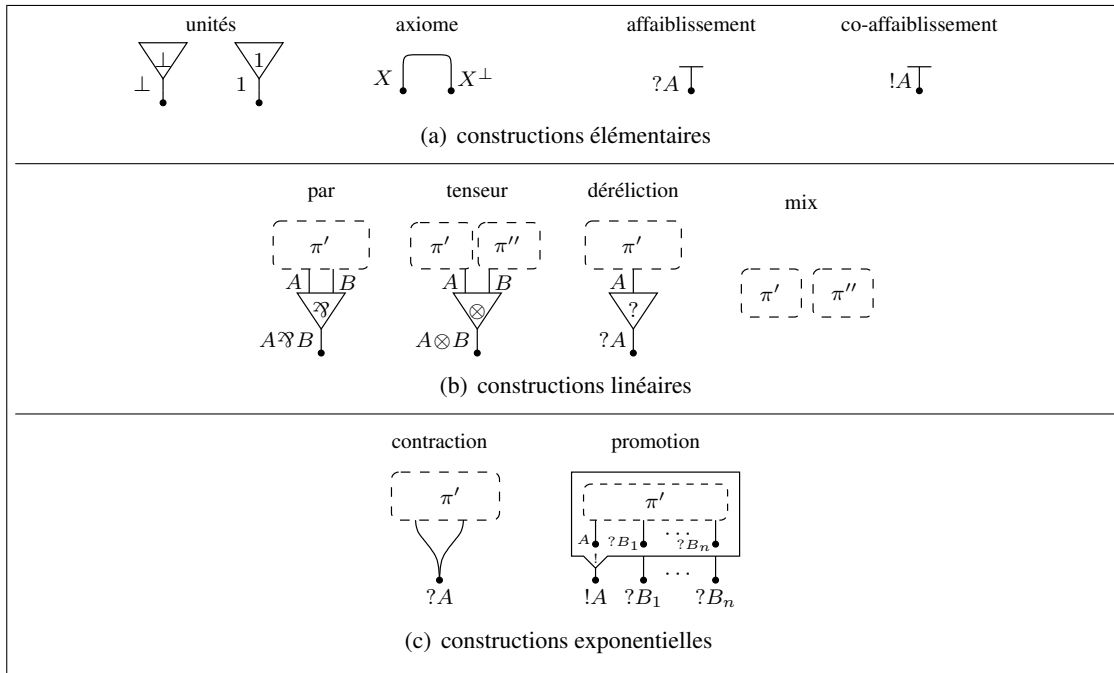


FIG. V.2: Règles de construction des réseaux de la logique linéaire (R(LL))

V.3.2 Réseaux de preuve de la logique linéaire

Les réseaux de preuve sont des représentations graphiques des preuves de la logique linéaire. Ils utilisent le formalisme des réseaux d'interaction, mais sont construits *séquentiellement*. D'ailleurs, leur règles de construction (voir Figure V.2 page 213) suivent exactement les règles de construction des séquents de LL (voir Figure I.1 page 9).

Définition V.4. Un réseau d'interaction de la logique linéaire est un *réseau d'interaction* construit à partir des ports, des cellules, du câblage structurel parfois nommé contraction, des fils et des boîtes présentés dans la Définition V.3 page 211.

L'ensemble $R(LL)$ des **réseaux de preuve** de la logique linéaire est construit par induction en suivant les constructions de la Figure V.2 page 213 où l'on suppose que π' et π'' sont des réseaux de la logique linéaire, A et B sont des formules de LL et X est une formule atomique. Afin d'avoir une représentation canonique, on ajoute une condition sur les constructions exponentielles :

- (CE) On demande qu'un port du contenu d'une boîte, apparié avec un port auxiliaire de celle-ci, soit connecté ou bien à une déréliction, ou bien au port auxiliaire d'une autre boîte.

Les réseaux présentés ici diffèrent légèrement des réseaux de preuve de la logique linéaire usuels dans le traitement des exponentielles. Nous avons en effet ajouté une cellule co-affaiblissement qui nous permettra par la suite de coder un ordre d'information sur les réseaux (voir Définition V.10 page 220).

Tous les réseaux de preuve de la logique linéaire proviennent d'une preuve de la logique linéaire. Par contre, il est difficile a priori de savoir si un réseau d'interaction de la logique

linéaire provient d'une preuve. Il existe plusieurs **critères de correction** qui permettent de répondre à cette question, c'est-à-dire de caractériser les réseaux de preuve parmi les réseaux d'interaction de la logique linéaire.

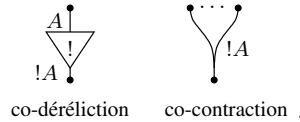
Pour les réseaux sans boîtes, on citera notamment les critères connus sous les noms de «Long trip» de Girard et de «switching acyclicity» de Danos et Regnier [DR89]. Enfin, pour les réseaux sans mix, le critère de *contractibilité* introduit par Danos [Dan90] a permis de définir un algorithme [Laf95, GM96, Gue99] qui détermine en temps linéaire si un réseau de MLL d'interaction de la logique linéaire est un réseau de preuve. Cet algorithme s'appuie sur un système de réécriture qui part des axiomes d'un réseau d'interaction et fusionne petit à petit les différentes parties du réseau. Si la réécriture termine sur un point, alors on est parti d'un réseau de preuve. L'algorithme de fusion que nous allons présenter dans la suite de ce chapitre présente des points commun avec l'algorithme cité ci-dessus.

V.3.3 Réseaux de preuve de la logique linéaire différentielle.

Nous présentons ici l'extension différentielle des réseaux introduite par Ehrhard et Regnier [ER06].

Syntaxe. Ces réseaux sont obtenus en remplaçant la boîte de la logique linéaire (voir Définition V.4 page 213) par de nouvelles cellules duales des cellules *contraction* et *déréliction*.

Définition V.5. [ER06, §6] Un **réseau d'interaction différentiel** est un *réseau d'interaction* sans boîte construit à partir des ports, cellules, fils et câblages présentés dans la Définition V.3 page 211. La *co-déréliction* et le câblage structurel parfois nommé *co-contraction*



remplacent les boîtes de la logique linéaire.

L'ensemble $R(DILL)$ des **réseaux de preuve différentiels** est défini par induction en suivant les constructions de la Figure V.3 page 215. Comme la contraction, la co-contraction est un câblage structurel considéré modulo commutativité et associativité.

Comme dans le cas des réseaux de la logique linéaire, les réseaux de preuve différentiels permettent de représenter graphiquement les preuves de la logique linéaire différentielle. D'ailleurs leur construction décrite à la Figure V.3 page 215 suit règle par règle les constructions du calcul des séquents présentées à la Figure V.1.1 page 204. Le critère de correction d'acyclicité évoqué dans la section précédente se généralise aux réseaux différentiels. Il permet de déterminer parmi les réseaux d'interaction, la classe des réseaux qui proviennent d'une preuve de la logique linéaire.

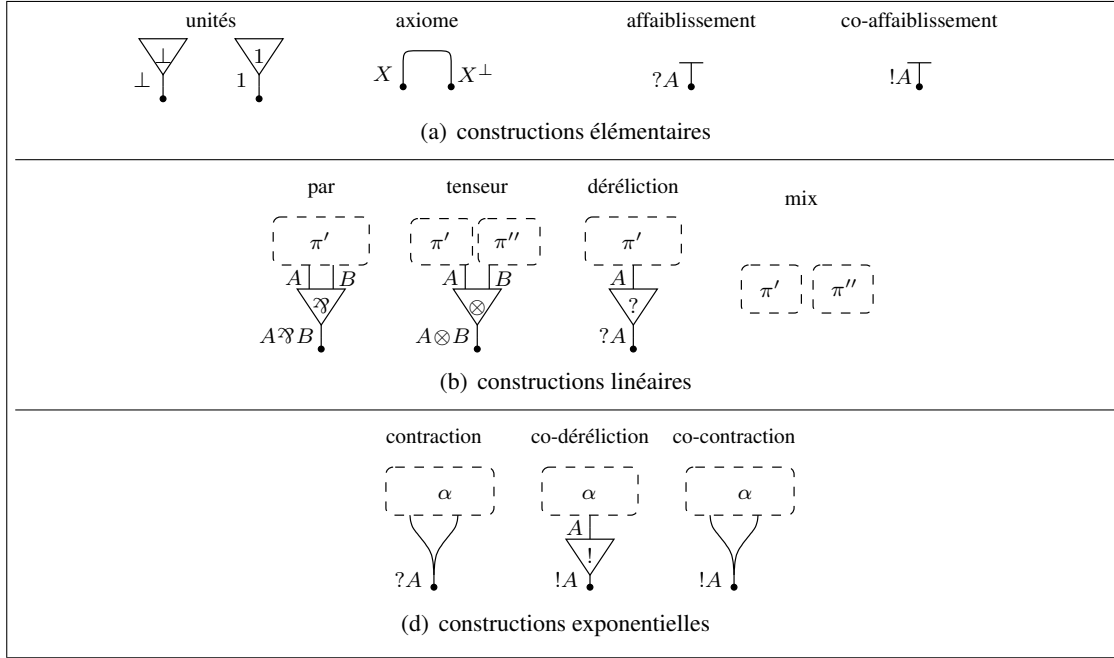


FIG. V.3: Règles de construction des réseaux différentiels (R(DiLL))

Structures algébriques. Nous allons enrichir les réseaux différentiels de différentes structures algébriques.

Soit $\mathbb{k}$ un corps.

Un **poly**-réseau différentiel est une combinaison linéaire (finie) avec coefficients dans $\mathbb{k}$ de réseaux de preuve différentiels dont les interfaces sont *appariées*. L'ensemble des poly-réseaux différentiels est noté $\text{Pol}_{\mathbb{k}}(\text{DiLL})$.

Enfin, l'ensemble des sommes formelles de réseaux différentiels à coefficients dans $\mathbb{k}$ est noté $\text{Ser}_{\mathbb{k}}(\text{DiLL})$.

V.3.4 Développement de Taylor des réseaux

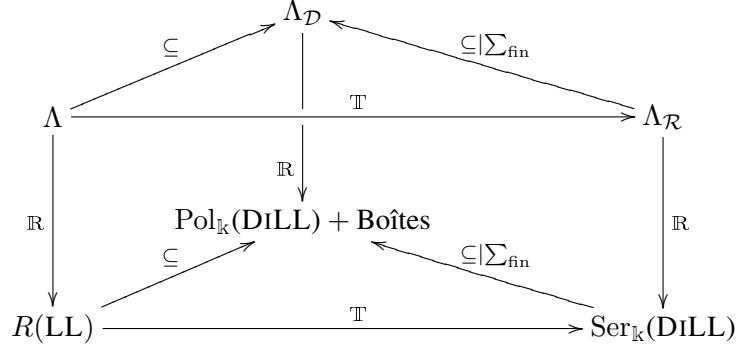
Comme Ehrhard et Regnier l'ont fait [ER06], nous allons à présent généraliser le développement de Taylor syntaxique aux réseaux. Pour cela, nous allons nous appuyer sur la traduction du λ -calcul dans les réseaux de la logique linéaire.

Traduction des λ -calculs dans les réseaux. Dans sa thèse, Regnier [Reg92] a introduit une fonction de traduction $\mathbb{R} : \Lambda \rightarrow R(\text{LL})$, définie par induction sur la structure du λ -calcul, et qui est compatible avec la réduction du λ -calcul.

Avec Ehrhard [ER06], ils ont ensuite généralisé cette traduction au λ -calcul avec ressources $\mathbb{R} : \Lambda_{\mathcal{R}} \rightarrow R(\text{DiLL})$ (qui est une version linéaire du calcul avec ressource originel de Boudol, il ne possède pas l'application usuelle du lambda-calcul).

Le développement de Taylor syntaxique se généralise du λ -calcul aux réseaux à travers $\mathbb{R}$.

On peut donc résumer les liens entre λ -calcul et réseaux par le diagramme suivant



où $\mathbb{T}$ est l'opérateur de développement de Taylor.

Nous avons ajouté à titre indicatif la place occupée par les syntaxes différentielles. Le λ -calcul différentiel regroupe les deux types d'application du λ -calcul et du λ -calcul avec ressources. De même, on peut définir des poly-réseaux différentiels avec boîte. Ils ont été étudiés par Vaux [Vau07] et Tranquilli [Tra09] qui a notamment montré [Tra08] qu'une version de Λ -calcul différentiel ($\Lambda_{\mathcal{D}}$) se plonge dans les réseaux différentiels avec boîte. Dans le λ -calcul différentiel comme dans les réseaux différentiels avec boîtes, seules les combinaisons linéaires (finies) de termes sont autorisées. Les flèches étiquetées par $\subseteq \mid \Sigma_{\text{fin}}$ signifient qu'il y a une inclusion de la partie du langage obtenue en se restreignant aux seules combinaisons linéaires finies.

Définition de Taylor dans les réseaux. Le développement de Taylor permet de décomposer un réseau de preuve de la logique linéaire ($R(\text{LL})$) en une somme formelle de réseaux différentiels ($R(\text{DiLL})$). Chaque $R(\text{DiLL})$ qui apparaît dans la somme représente une instance de ce $R(\text{LL})$ dans laquelle toutes les boîtes ont été remplacées par un nombre fini de copies de leur contenu respectif.

Avant de donner une définition précise du développement de Taylor (voir la Définition V.8 page 217), nous avons besoin d'introduire quelques constructions sur les réseaux.

Définition V.6. Soient α , β et γ trois réseaux ($R(\text{LL})$ ou $R(\text{DiLL})$) tels que β et γ ont des interfaces appariées $(p_i : A_i)_{i \leq n}$ et $(q_i : A_i)_{i \leq n}$. Si β est un **sous-réseau** de α , noté $\beta \subseteq \alpha$, alors la **substitution** $\alpha[\gamma/\beta]$ est le réseau obtenu en remplaçant β par γ dans α .

Remarque. Pour pouvoir faire la substitution correctement, il faut remplacer les q_i par les p_i et fusionner les câblages partageant les q_i . Cette opération est formalisée dans [Vau07].

Une boîte est simulée dans les $R(\text{DiLL})$, par deux opérations : la co-déréliction qui permet d'appliquer la modalité exponentielle sur la sortie de la boîte, i.e. sur le port principal d'une copie de la boîte, et le produit qui permet d'assembler plusieurs copies de la boîte.

Définition V.7. Soit p un port libre d'un $R(\text{DiLL})$ α . On note $\text{cod}(p, \alpha)$ le $R(\text{DiLL})$ obtenu en ajoutant une co-déréliction sur le port p de α (Figure V.4(a) page 217).

Soient α et α' deux $R(\text{DiLL})$ avec des interfaces appariées $(p : !A_1, q_i : ?B_i ; i \leq n)$ et $(p' : !A_1, q'_i : ?B_i ; i \leq n)$. Le **produit** $\alpha \cdot \alpha'$ est le $R(\text{DiLL})$ obtenu en co-contractant les ports p et p' et en contractant les ports q_i et q'_i (Figure V.4(b) page 217).

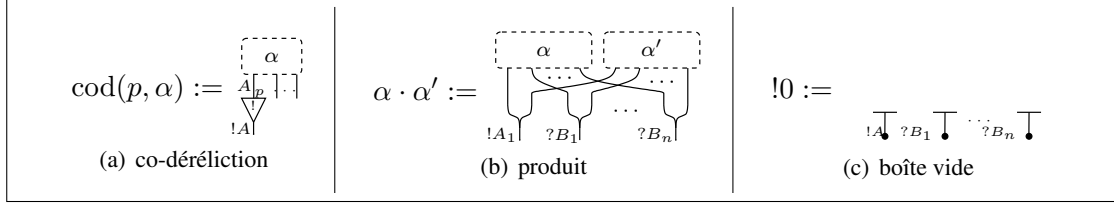


FIG. V.4: Co-déréliction et produit de R(DiLL)

Le produit de R(DiLL) est associatif, commutatif et son élément neutre est la **boîte vide**, constituée d'affaiblissements et d'un co-affaiblissement et notée **!0** (Figure V.4(c) page 217).

Nous avons maintenant tous les outils pour définir le développement en série de Taylor.

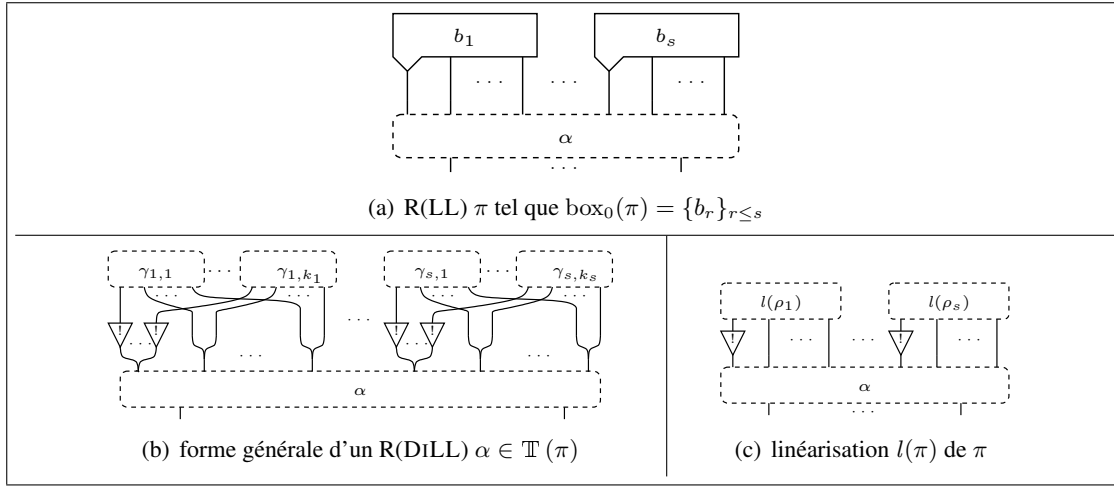


FIG. V.5: Développement de Taylor et linéarisation d'un R(LL)

Définition V.8. Le **développement de Taylor** $T(\pi)$ d'un R(LL) π est la somme formelle de R(DiLL) définie par

$$T(\pi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\gamma \in \mathbb{T}(\pi)} m_\pi(\gamma) \gamma.$$

L'ensemble $\mathbb{T}(\pi)$ des réseaux apparaissant dans la série $T(\pi)$ et le coefficient $m_\pi(\gamma)$ précédent le réseau γ dans la série formelle $T(\pi)$ sont définis simultanément par récurrence sur la profondeur et le nombre de boîtes de π (Figure V.5(b) page 217). Nous distinguons trois cas :

- Si π est un réseau linéaire, i.e. il ne contient pas de boîte, alors

$$\mathbb{T}(\pi) \stackrel{\text{def}}{=} \{\pi\} \quad \text{et} \quad m_\pi(\pi) \stackrel{\text{def}}{=} 1.$$

- Si π est une boîte b dont le contenu est noté ρ et p est le port libre de ρ relié au port principal de la boîte b , alors

$$\mathbb{T}(\pi) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \prod_{j=1}^k \text{cod}(p_j, \gamma_j) ; k \in \mathbb{N}, \gamma_j \in \mathbb{T}(\rho) \right\},$$

où pour tout $j \leq k$, p_j dénote le port de γ_j correspondant à p dans ρ ;

$$m_\pi \left(\prod_{j=1}^k \text{cod}(p_j, \gamma_j) \right) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^k m_\rho(\gamma_j).$$

Remarquons que si $k = 0$ alors on obtient un réseau fait d'affaiblissements et d'un co-affaiblissement, c'est l'élément neutre $!0$.

- Si π contient plusieurs boîtes de profondeur nulle, i.e. $\text{box}_0(\pi) = \{b_r\}_{r \leq s}$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(\pi) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\pi[\beta_r/b_r]_{r \leq s} ; \beta_r \in \mathbb{T}(b_r)\}, \\ m_\pi(\pi[\beta_r/b_r]_{r \leq s}) &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_{r \leq s} m_{b_r}(\beta_r). \end{aligned}$$

Remarquons que l'on peut montrer par induction sur la construction séquentielle de γ que le coefficient $m_\pi(\gamma)$ ne dépend pas de π tel que $\gamma \in \mathbb{T}(\pi)$.

Exemple V.5. Dans la Figure V.6 page 218, nous présentons deux exemples de réseaux de la logique linéaire avec des réseaux différentiels apparaissant dans leur développement de Taylor.

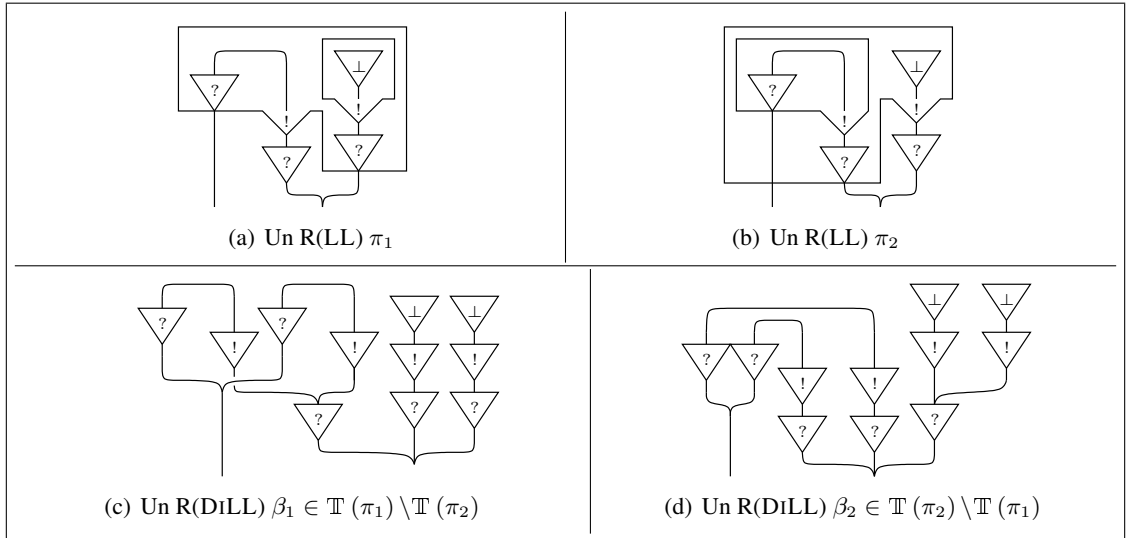


FIG. V.6: Exemples de développements de Taylor

V.4 Réciproque du développement de Taylor syntaxique

Tout ensemble de réseaux différentiels n'apparaît pas dans le développement de Taylor d'un réseau de la logique linéaire. Il existe même des réseaux différentiels (R(DiLL)) qui vérifient

le critère de *correction des réseaux différentiels* mais qui ne sont pas dans le développement de Taylor d'un réseau de preuve de la logique linéaire (R(LL)). En effet, le développement de Taylor d'un R(LL) préserve la structure des boîtes et les R(DiLL) qui le forment vérifient une relation d'*uniformité* (voir la Définition V.9 page 219).

V.4.1 Présentation du problème et de sa solution

Nous allons chercher à comprendre cette relation d'uniformité. Pour cela, nous allons inverser le développement de Taylor. Étant donné un ensemble de R(DiLL), nous cherchons donc un R(LL) dont le développement de Taylor contient cet ensemble, s'il existe.

Comme nous sommes intéressés par la relation d'uniformité et non pas par les coefficients, nous considérons des poly-réseaux dont les coefficients sont 0 ou 1, c'est-à-dire le support du développement de Taylor.

Définition V.9. Un ensemble $\mathcal{T}$ de R(DiLL) ayant des interfaces appariées est dit **uniforme** lorsqu'il existe un R(LL) π , de même interface, dont le développement de Taylor contient chacun des réseaux de $\mathcal{T}$, i.e. $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{T}(\pi)$.

Nous verrons dans l'Exemple V.9 page 244 des réseaux uniformes deux à deux mais qui ne forment pas un ensemble uniforme. On est donc dans un cas bien différent de celui du λ -calcul où la relation d'uniformité est une relation de cohérence binaire. Ceci justifie le fait de s'intéresser à la fusion d'un ensemble de réseaux différentiels plutôt qu'à la fusion d'une paire.

Contre-Exemple V.6. Comme nous l'avons affirmé ci-dessus, tous les réseaux différentiels ne proviennent pas du développement de Taylor d'un réseau de preuve. Le réseau dessiné sur la Figure V.7 page 219 est un exemple de tel R(DiLL). En effet, ce réseau est le *produit* des réseaux β_1 et β_2 de la Figure V.6. Or on a $\beta_1 \in \mathbb{T}(\pi_1)$ et $\beta_2 \in \mathbb{T}(\pi_2)$, mais on peut vérifier que l'ensemble $\{\beta_1, \beta_2\}$ n'est pas uniforme. Remarquons que dans la Figure V.6 page 218, π_1

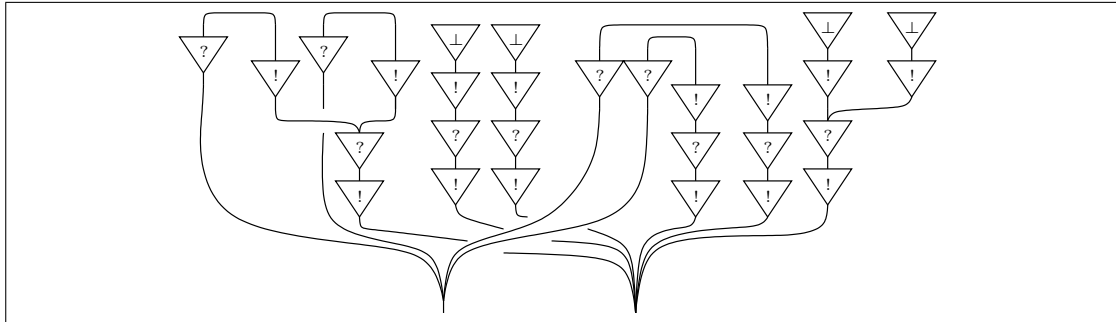


FIG. V.7: Contre-exemple à l'uniformité

et π_2 ont la même *linéarisation*, obtenue en oubliant le contour des boîtes (voir Définition V.11 page 223). La non-uniformité de β_1 et β_2 vient en fait de l'impossibilité de trouver un emboîtement commun.

Remarquons enfin que dans le développement en série de Taylor apparaissent des R(DiLL) qui ont beaucoup moins d'information que le R(LL) dont ils sont extraits. Par exemple, n'importe quelle boîte admet le R(DiLL) !0 dans son développement (voir Figure V.4 page 217).

Ainsi, en partant d'un sous-ensemble du développement $\mathbb{T}(\pi)$, il se peut que l'on n'ait pas assez d'information pour reconstruire exactement π . On va donc en construire une **approximation** par rapport à l'ordre partiel d'information sur les R(LL), défini ci-dessous.

Définition V.10. L'ordre d'information est défini par induction sur la profondeur des réseaux comparés. On dit que π' est moins informatif que π , noté $\pi' \ll \pi$ lorsque

- π est linéaire et les deux R(LL) sont égaux,
- π est de profondeur non nulle et il existe des boîtes $(b_r)_{r \leq s}$ telles que

$$\pi' = \pi[!0/b_r]_{r \leq s}.$$

On vérifie facilement que $\ll$ est un ordre partiel. Le réseau π' est intuitivement obtenu en effaçant certaines boîtes de π . Par ailleurs, le développement de Taylor est croissant par rapport à cet ordre d'information.

Lemme V.2. Soient π et π' deux R(LL).

$$\pi' \ll \pi \Rightarrow \mathbb{T}(\pi') \subseteq \mathbb{T}(\pi).$$

Démonstration. La preuve est immédiate. □

Un algorithme de fusion pour inverser. Le développement de Taylor d'un R(LL) répète l'information contenue dans les boîtes. Ainsi, un R(DiLL) contient beaucoup d'informations redondantes. Pour savoir si une famille de R(DiLL) est uniforme, il nous faut donc vérifier si ces informations sont compatibles, puis fusionner ses éléments. Pour cela nous pouvons choisir de parcourir et comparer les R(DiLL) en partant des axiomes² ou en partant des ports libres. Dans le premier cas, il faut choisir un appariement des axiomes. Dans le deuxième cas, il faut choisir un appariement des interfaces. Or le développement de Taylor ne modifie pas l'interface, i.e. l'interface d'un R(DiLL) apparaissant dans le développement de Taylor d'un R(LL) est identique à l'interface de ce dernier. Par ailleurs, le développement de Taylor va multiplier les copies d'axiomes en répétant l'information contenue dans les boîtes. Nous proposons donc un algorithme de fusion non-déterministe qui, étant donné un ensemble fini de R(DiLL) d'interfaces appariées, forme un état initial en branchant des compteurs joignant les ports libres appariés. Les compteurs parcourent ensuite le réseau, recollent les cellules identiques et reconstruisent les boîtes quand c'est possible. Le Théorème V.4 page 241 de correction assure que si l'algorithme de fusion ne reste pas bloqué dans un cul-de-sac, alors le résultat est un R(LL) dont le développement de Taylor contient tous les R(DiLL) initiaux. De plus pour tout R(LL) π et toute partie finie de son développement de Taylor, parmi les chemins que cet algorithme non déterministe peut suivre, il en existe un qui termine en reconstruisant une approximation (pour l'ordre d'information) de π , c'est le Théorème V.3 page 237 de complétude.

Nous proposons un algorithme dans le style des réseaux d'interaction [Laf90]. C'est le système de réécriture non-déterministe présenté sur les Figures V.11 page 230 et V.12 page 231. Comme nous l'avons vu avec les réseaux présentés Figure V.6 page 218, deux réseaux qui ont la même linéarisation peuvent avoir des emboîtements différents. Notre algorithme doit pouvoir tous les reconstruire, d'où son caractère non-déterministe.

²Nous obtiendrions alors un algorithme similaire au «parsing» [Laf95, GM96, Gue99] qui permet de tester le critère de contractibilité et dont nous avons déjà parlé à la page 214

Exemple V.7. Commençons par voir sur un exemple comment fonctionne l'algorithme de fusion que nous proposons. À la Figure V.8 page 222, nous présentons un chemin de réduction qui, partant de deux R(DiLL) appariés via des compteurs, mène à la reconstruction du R(LL) qui se trouve à la Figure V.6(a) page 218.

À chaque étape, la partie du réseau qui va être réduite est représentée en gras.

État initial. On considère les deux réseaux α_1 et α_2 , où pour $i = 1, 2$, $(p_i : ?1, q_i : ?!\perp)$ est l'interface de α_i . L'algorithme débute sur un *état initial* dessiné sur la Figure V.8(a) page 222. Les ports des interfaces de α_1 et α_2 sont deux à deux reliés par des *compteurs*. Les ports des compteurs sont étiquetés par deux *jetons* 1_1 et 1_2 . À chaque compteur, nous associons une *adresse* $A = \{1_1, 1_2\}$, i.e. l'ensemble des jetons contenus dans le compteur (cf Définition V.14 page 227). Enfin, nous associons au réseau avec compteur un *alphabet* $\{A\}$ qui rassemble les adresses des différents compteurs.

Première étape. La seule réduction possible est *contr* sur le compteur de droite en prenant $n_1 = 2$, $n_2 = 3$ et $m = 2$ (voir la Figure V.11 page 230 pour les notations). En effet, nous devons choisir comment distribuer les trois ports auxiliaires de la contraction de α_2 . Remarquons que nous aurions pu choisir deux autres façons de distribuer les ports et donc deux autres chemins de réécriture. L'un mène au R(LL) de la Figure V.6(b) page 218 et l'autre nous mène à une impasse, i.e. un réseau d'interaction avec des compteurs mais qui ne peut pas être réduit.

Deuxième étape. Les déréllections sont fusionnées en une unique déréllection étiquetée par l'adresse A (rappelons que c'est l'ensemble des jetons $1_1, 1_2$ étiquetant les ports du compteur qui vient d'être réduit).

Troisième étape. Nous utilisons ici la réduction *!p*. Cette étape *crée* une boîte en ajoutant trois nouveaux jetons $1_1^1, 1_2^1, 1_2^2$ et une nouvelle adresse $B = \{1_1^1, 1_2^1, 1_2^2\}$. Les nouveaux jetons correspondent aux déréllections qui sont fusionnées et étendent les jetons précédents comme décrit à la Définition V.14 page 227. Plus précisément, 1_1^1 (resp. $1_2^1, 1_2^2$) étend 1_1 (resp. 1_2). L'adresse B représente la boîte associée à la co-déréllection étiquetée par B et provenant de la fusion des trois co-déréllections. Cette nouvelle adresse ouvre de nouvelles perspectives. Nous pouvons maintenant réduire par *?p* les compteurs restés inactifs.

Quatrième étape. Alors que *!p* crée une boîte en ajoutant une nouvelle adresse et entre par le port principal dans celle-ci, la réduction *?p* entre dans une boîte, déjà créée, par ses ports auxiliaires. Le nombre de ports du compteur augmente à mesure que ce dernier passe au travers des contractions via la réduction *?p*. Les ports du compteur résultant sont étiquetés par des extensions des jetons du compteur avant réduction. Les jetons étendus correspondent à ceux de l'adresse de la boîte correspondante. Plus précisément, 1_1^1 (resp. $1_2^1, 1_2^2$) étend 1_1 (resp. 1_2).

Cinquième étape. L'adresse stockée dans un compteur après plusieurs étapes *?p* est déposée sur une cellule par la réduction *one*, marquant la porte d'entrée de la boîte.

Sixième étape. Les deux compteurs se rencontrent et partagent les mêmes adresses sur les ports reliés. Ils peuvent donc être éliminés par l'étape de réduction *ax*.

Septième étape. Par *?p*, le compteur entre dans la boîte désignée par l'adresse B . Puis, encore par la réduction *?p*, une contraction est consommée. L'étape *one* fusionne les différentes déréllections en une seule, étiquetée par B .

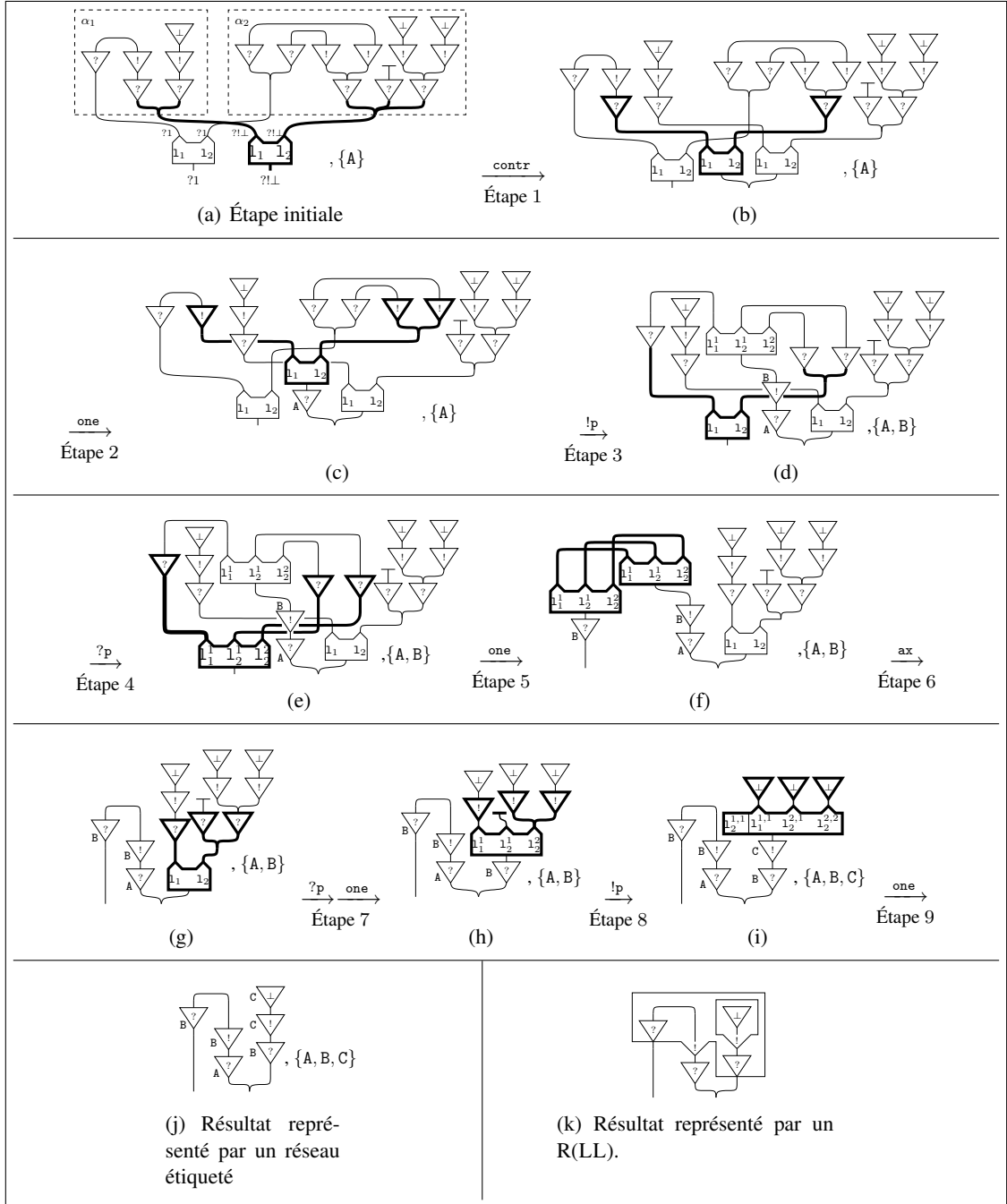


FIG. V.8: Un exemple de réduction réussie

Huitième étape. Remarquons qu'un port du compteur est relié à un co-affaiblissement. L'étape $!p$ crée quatre jetons $l_1^{1,1}, l_2^{1,1}, l_2^{2,1}, l_2^{2,2}$, respectivement associés aux co-affaiblissements et co-dérélictions. Une nouvelle adresse C qui rassemble ces jetons apparaît. Ces jetons sont des extensions des anciens comme le suggèrent les indices. Le jeton $l_2^{1,1}$, associé au

co-affaiblissement, est stocké dans un coin du compteur. Il sera préservé jusqu'à ce que le compteur soit effacé.

Dernière étape. Le réseau qui résulte de ce chemin de réécriture est un *réseau étiqueté* (voir la Définition V.12 page 224). Il ne possède ni compteur, ni co-contraction et chaque cellule porte une adresse, c'est un *succès* ! Il représente le R(LL) de la Figure V.6(a) page 218, appelé dans le dernier encart de la Figure V.8 page 222.

V.4.2 Formalisation des R(LL)

L'algorithme de fusion va reconstruire d'une part la linéarisation (voir la Définition V.11 page 223) d'un R(LL) et d'autre part son emboîtement représenté par une fonction d'étiquetage (voir la Définition V.12 page 224). Avant de présenter cet algorithme, nous allons introduire ces notions et prouver que cette représentation des réseaux de preuve de la logique linéaire est correcte (voir la Proposition V.3 page 225).

L'exemple. Dans l'exemple présenté à la Figure V.8 page 222, l'algorithme fusionne les cellules obtenant ainsi la linéarisation du R(LL) recherché et dépose des étiquettes sur les cellules permettant de reconstruire une boîte par co-déréliction. La boîte associée à la co-déréliction porte l'étiquette B et contient toutes les cellules au dessus d'une cellule étiquetée par cette adresse B. Remarquons que l'ensemble des adresses est partiellement ordonné : $A \sqsubseteq B \sqsubseteq C$ (voir la Définition V.12 page 224 de l'ordre sur les adresses). Ce qui signifie que la boîte B contient la boîte C. L'adresse A correspond aux cellules de profondeur nulle.

Linéarisation. La linéarisation d'un réseau de preuve (R(LL)) est obtenue en effaçant le contour des boîtes. Elle contient toute l'information sur les cellules du réseau mais non celle relative aux emboîtements comme le montre la Figure V.6 page 218 où sont présentés deux réseaux différents ayant la même linéarisation.

Définition V.11. La **linéarisation** d'un R(LL) π est définie par induction sur la profondeur.

- Si π est linéaire, i.e. de profondeur nulle,

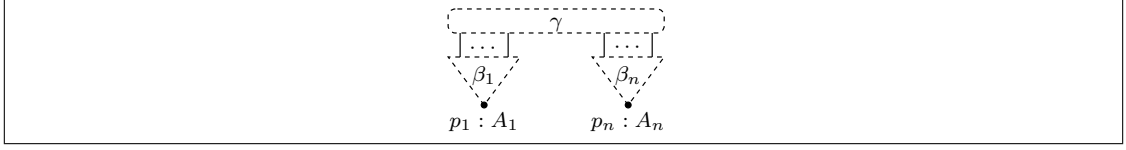
$$l(\pi) \stackrel{\text{def}}{=} \pi,$$

- Si π est de profondeur non nulle, i.e. il possède des boîtes $\text{box}_0(\pi) = \{b_r\}_{r \leq s}$, alors

$$l(\pi) \stackrel{\text{def}}{=} \pi[\text{cod}(p_r, l(\rho_r))/b_r]_{r \leq s}.$$

La linéarisation des R(LL) a été considérée par Tortora [TdF00].

Étiquetage des réseaux sans coupure. Un *e@étiquetage* total code exactement les boîtes de π (Proposition V.3 page 225). Pendant l'exécution de l'algorithme de fusion, les étiquetages partiels sont étendus pas à pas jusqu'à une fonction d'étiquetage totale. Le contour des boîtes de π est reconstruit à partir des adresses. Cependant, tout étiquetage n'est évidemment pas un



TAB. V.1: Décomposition d'un R(DiLL)

emboîtement correct. Nous décrivons (Définition V.12 page 224) les conditions nécessaires et suffisantes qui assurent que l'on peut associer à un étiquetage un emboîtement définissant un R(LL).

Avant de donner la définition d'un étiquetage, rappelons que les R(DiLL) sans coupure admettent une représentation simple sous la forme d'un arbre.

Tout R(DiLL) sans coupure possède une **décomposition canonique** en un réseau composé d'une part d'axiomes et d'autre part d'arbres disjoints composés de cellules et de fils. Cette décomposition est représentée sur la Figure V.1 page 224. Sur cette figure, γ est l'ensemble des axiomes et $(\beta_i)_{i \leq n}$ est la famille des arbres. Les feuilles des arbres β_i sont des unités ($\perp$ ou 1), des (co-)affaiblissements ou des axiomes.

Afin de pouvoir décrire les chemins dans un réseau, nous introduisons un ordre sur les cellules, induit par la structure d'arbre. Nous empruntons le vocabulaire des arbres en remarquant que nos arbres sont représentés racine en bas. Pour tout réseau α , on note $a \leq_\alpha b$ lorsque a et b appartiennent à α et a est un **ancêtre** de b . Si α a plusieurs ports libres, alors il peut y avoir plusieurs éléments minimaux par rapport à l'ordre $\leq_\alpha$. Nous introduisons donc une **cellule de conclusion** $\perp_\alpha$ qui sera par définition le minimum global pour l'ordre $\leq_\alpha$.

Nous pouvons maintenant introduire les *réseaux étiquetés*.

Définition V.12. Soient $\mathcal{N}$ un ensemble de **noms** et α un R(DiLL) sans coupure ni co-contraction. L'ensemble des co-dérélictions de α est noté $\text{coder}(\alpha)$. Soit $\mathfrak{L} : \{\perp_\alpha\} \cup \text{cell}(\alpha) \rightarrow \mathcal{N}$ une fonction totale telle que

- $\mathfrak{L}$ est injective sur $\text{coder}(\alpha) \cup \{\perp_\alpha\}$,
- l'image $\mathfrak{L}(\alpha)$ de $\mathfrak{L}$ est $\mathfrak{L}(\text{coder}(\alpha) \cup \{\perp_\alpha\})$.

On note $\sqsubseteq_{\alpha, \mathfrak{L}}^\circ$ l'image par $\mathfrak{L}$ de l'ordre $\leq_\alpha$ sur $\mathfrak{L}(\alpha)$, i.e.

$$\forall n, m \in \mathfrak{L}(\alpha), n \sqsubseteq_{\alpha, \mathfrak{L}}^\circ m \iff \exists c \leq_\alpha d, \begin{cases} n = \mathfrak{L}(c), \\ m = \mathfrak{L}(d). \end{cases}$$

La clôture transitive de $\sqsubseteq_{\alpha, \mathfrak{L}}^\circ$ est alors notée $\sqsubseteq_{\alpha, \mathfrak{L}}$.

On appelle **réseau étiqueté** tout couple $(\alpha, \mathfrak{L})$ tel que

- (CL1) $\sqsubseteq_{\alpha, \mathfrak{L}}$ est un ordre arborescent³ sur les étiquettes qui admet un minimum $\mathfrak{L}(\perp_\alpha)$,
- (CL2) si c a un parent c' , alors, ou bien $\mathfrak{L}(c') = \mathfrak{L}(c)$ et c n'est pas une co-déréliction, ou bien $\mathfrak{L}(c)$ est un successeur de $\mathfrak{L}(c')$ et c est une co-déréliction ou une dérélction,
- (CL3) étant donnés deux ports p et q connectés par un axiome, si p est un port auxiliaire d'une cellule c telle que $\mathfrak{L}(c) \neq \mathfrak{L}(\perp_\alpha)$, alors q est un port auxiliaire d'une cellule c' telle que $\mathfrak{L}(c') = \mathfrak{L}(c)$.

³Un ordre est arborescent lorsqu'il vérifie la propriété suivante : $\forall l, l'$ ou bien $l \leq l'$, ou bien $l' \leq l$ ou bien il existe $l'' \leq l, l'$

Correction de la formalisation. Les réseaux étiquetés sont définis de sorte qu'à toute co-déréliction corresponde une boîte dont on peut reconstruire le contenu à partir de l'ordre induit par le réseau étiqueté. On peut alors définir une relation d'équivalence entre les réseaux étiquetés et les R(LL) par induction sur la profondeur : un réseau étiqueté coïncide avec une boîte lorsque les contenus de leurs boîtes coïncident.

Définition V.13. Soit $(\alpha, \mathcal{L})$ un réseau étiqueté. À chaque co-déréliction b de α est associée le réseau étiqueté $\text{cont}(\alpha, \mathcal{L}, b)$ qui correspond à son contenu. Il est défini par le R(DiLL)

$$\{c \in \alpha \mid \mathcal{L}(b) \sqsubseteq_{\alpha, \mathcal{L}} \mathcal{L}(c), c \neq b\},$$

et la fonction d'étiquetage est définie par $\mathcal{L}_{\text{cont}}(\perp) = \mathcal{L}(b)$ et $\mathcal{L}_{\text{cont}}(c) = \mathcal{L}(c)$.

Un réseau étiqueté $(\alpha, \mathcal{L})$ est dit **équivalent** à un R(LL) π , noté $(\alpha, \mathcal{L}) \equiv \pi$, lorsque $\alpha = l(\pi)$ et

$$\forall b \in \text{box}(\pi) \text{ de contenu } \rho, \text{ cont}(\alpha, \mathcal{L}, b) \equiv \rho. \quad (\text{V.1})$$

La proposition suivante peut paraître tautologique à première vue. Pourtant, il est loin d'être évident que les deux ordres, celui des étiquettes ($\sqsubseteq$), défini par clôture transitive, est équivalent à l'ordre d'emboîtement.

Proposition V.3. À renommage près, un réseau étiqueté est équivalent à un unique R(LL) sans coupure et réciproquement.

Dans l'exemple de la Figure V.8 page 222, l'ensemble des noms est $\mathcal{N} = \{A, B, C\}$ et l'étiquetage $A \sqsubseteq B \sqsubseteq C$ code l'emboîtement du R(LL) de la Figure V.6(a) page 218.

Démonstration. Pour tout réseau étiqueté, nous prouvons, par récurrence sur le nombre d'étiquettes, l'existence d'un unique R(LL) équivalent.

Commençons par quelques remarques. Soient $(\alpha, \mathcal{L})$ un réseau étiqueté et b_1, b_2 deux co-dérélictions de α .

- (i) Si $\mathcal{L}(b_2)$ est le successeur de $\mathcal{L}(b_1)$, alors $\text{cont}(\alpha, \mathcal{L}, b_2) \subset \text{cont}(\alpha, \mathcal{L}, b_1)$.
- (ii) Si $\mathcal{L}(\perp_\alpha)$ est le prédécesseur des deux $\mathcal{L}(b_1)$ et $\mathcal{L}(b_2)$, alors $\text{cont}(\alpha, \mathcal{L}, b_1)$ et $\text{cont}(\alpha, \mathcal{L}, b_2)$ sont disjoints.
- (iii) Toute conclusion auxiliaire de la boîte $\text{cont}(\alpha, \mathcal{L}, b_1) \cup \{b_1\}$, c'est-à-dire une cellule minimale par rapport à $\leq_\alpha$ différente de b_1 , est une dérélliction.

Procédons par récurrence sur le nombre d'étiquettes, i.e. le co-domaine de $\mathcal{L}$. S'il est réduit à $\{\mathcal{L}(\perp_\alpha)\}$, alors α n'a pas de co-déréliction et on choisit $\pi = \alpha$. Sinon, soient $(b_r)_{r \leq s}$ la famille des co-dérélictions de α dont les étiquettes respectives $\mathcal{L}(b_r)$ sont des successeurs de $\mathcal{L}(\perp_\alpha)$ par rapport à l'ordre $\sqsubseteq_{\alpha, \mathcal{L}}$. En appliquant l'hypothèse de récurrence sur chacun des contenus $\text{cont}(\alpha, \mathcal{L}, b_r)$ des boîtes associées aux co-dérélictions, nous obtenons un unique R(LL) ρ_r équivalent à $\text{cont}(\alpha, \mathcal{L}, b_r)$. Pour tout $r \leq s$, on considère b'_r une boîte de contenu ρ_r . Grâce aux Remarques (i-iii) ci-dessus, on conclut que le seul R(LL) $\pi \equiv (\alpha, \mathcal{L})$ possible est

$$\pi = \alpha[b'_r / \text{cont}(\alpha, \mathcal{L}, b_r) \cup \{b_r\}]_{r \leq s}.$$

La réciproque est prouvée en construisant un candidat pour la fonction d'étiquetage sur la linéarisation du R(LL). On choisit une étiquette pour la conclusion du réseau et pour toutes les co-dérélictions de la linéarisation. Ces étiquettes donnent des noms à chacune des boîtes. Ensuite, chaque cellule prend l'étiquette de la boîte qui la contient à profondeur 0 ; s'il n'y en a pas, c'est l'étiquette de la conclusion du réseau. Enfin, on remarque que l'ordre $\sqsubseteq$ reflète l'ordre d'emboîtement des boîtes. Les propriétés de la fonction d'étiquetage en découlent (Définition V.12 page 224).

Soit π un R(LL) sans coupure. Commençons par définir $(l(\pi), \mathcal{L})$. Nous notons de la même façon les cellules de π et leur cellule correspondant dans $l(\pi)$. Soit $\mathcal{L}$ une fonction qui associe une étiquette à chaque co-déréliction ainsi qu'à la conclusion de la linéarisation $l(\pi)$, i.e. un plongement de $\text{cod}(l(\pi)) \cup \{\perp_{l(\pi)}\}$ dans $\mathcal{N}$. Ce choix détermine l'étiquetage de toutes les cellules. Pour toute autre cellule c de $l(\pi)$, si c a une profondeur 0 dans π , alors $\mathcal{L}(c) = \mathcal{L}(\perp_{l(\pi)})$. Si b est la co-déréliction associée à la boîte b qui contient c à profondeur 0, alors $\mathcal{L}(c) = \mathcal{L}(b)$.

Le couple $(l(\pi), \mathcal{L})$ est un réseau étiqueté équivalent à π . Ces deux affirmations découlent directement de l'égalité entre l'ordre $\sqsubseteq_{l(\pi), \mathcal{L}}$ et l'ordre de contenu des boîtes $\supseteq_\pi$ que nous reformulons par l'équivalence suivante :

$$\forall b^\pi \in \text{box}(\pi), (c_1^\pi \in b^\pi \Rightarrow c_2^\pi \in b^\pi) \iff \mathcal{L}(c_1) \sqsubseteq_{l(\pi), \mathcal{L}} \mathcal{L}(c_2). \quad (\text{V.2})$$

Montrons cette équivalence.

Étant données deux boîtes b_1 et b_2 contenant les cellules c_1 et c_2 à profondeur 0, par définition, $\mathcal{L}(c_1) = \mathcal{L}(b_1)$ et $\mathcal{L}(c_2) = \mathcal{L}(b_2)$ où l'on note de la même façon les boîtes et les co-dérélictions.

Supposons que $b^\pi \in \text{box}(\pi)$. Si $c_1^\pi \in b^\pi$, alors $c_2^\pi \in b^\pi$. Si $b_1^\pi = b_2^\pi$ alors $\mathcal{L}(c_1) = \mathcal{L}(c_2)$. Si $b_1^\pi \neq b_2^\pi$ alors, grâce à l'emboîtement, les ensembles $\text{cell}(b_1^\pi)$ et $\text{cell}(b_2^\pi)$ sont disjoints ou contenus l'un dans l'autre. Comme $c_1 \in b_1$, nous avons $c_2 \in b_1$. Par conséquent, $\text{cell}(b_2) \subsetneq \text{cell}(b_1)$ et $b_2 \in \text{box}(b_1)$. Du fait des contraintes sur les cellules auxiliaires des boîtes (voir la Condition (CE) de la Définition V.4 page 213), il existe $d \leq_{l(\pi)} b_2$, tel que $d = b_1$ ou d^π appartient à profondeur 0 dans le contenu de b_1 . Par définition de $\mathcal{L}$, nous avons $\mathcal{L}(b_1) = \mathcal{L}(d)$. Par définition de $\sqsubseteq$, nous avons $\mathcal{L}(d) \sqsubseteq_{l(\pi), \mathcal{L}} \mathcal{L}(b_2) = \mathcal{L}(c_2)$.

Supposons à présent que $\mathcal{L}(c_1) \sqsubseteq_{l(\pi), \mathcal{L}} \mathcal{L}(c_2)$. Comme $\sqsubseteq$ est la clôture transitive de $\sqsubseteq^\circ$, il existe deux suites $(d_i)_{i \leq k}$ et $(e_i)_{i \leq k}$ de cellules de $l(\pi)$ telles que $d_1 = c_1$, $e_k = c_2$ et $\mathcal{L}(d_1) \sqsubseteq^\circ \mathcal{L}(d_2) = \mathcal{L}(e_2) \sqsubseteq^\circ \mathcal{L}(e_3) = \mathcal{L}(d_3) \sqsubseteq^\circ \dots \sqsubseteq^\circ \mathcal{L}(e_k)$. Pour tout $i \leq k$, $\mathcal{L}(d_i) = \mathcal{L}(e_i)$, donc il existe $b_i^\pi \in \text{box}(\pi)$ tel que $d_i, e_i \in b_i^\pi$. Grâce à l'emboîtement, $\forall b^\pi \in \text{box}(\pi)$, $d_i^\pi \in b^\pi \iff e_i^\pi \in b^\pi$. De plus, pour tout i impair, on a $d_i \leq_{l(\pi)} d_{i+1}$ et $e_{i+1} \leq_{l(\pi)} e_{i+2}$. Comme $l(\pi)$ est un réseau simple *sans coupure*, pour toute boîte b^π , nous avons $d_i^\pi \in b^\pi \Rightarrow d_{i+1}^\pi \in b^\pi$ et $e_{i+1}^\pi \in b^\pi \Rightarrow e_{i+2}^\pi \in b^\pi$. En combinant ces deux implications, nous obtenons $\forall b^\pi$, $c_1^\pi = d_1^\pi \in b^\pi \Rightarrow c_2^\pi = e_2^\pi \in b^\pi$.

De l'Équation (V.2) ci-dessus et de l'emboîtement des R(LL), nous pouvons déduire que $\sqsubseteq_{l(\pi)}$ est un ordre arborescent dont le minimum est $\mathcal{L}(\perp_{l(\pi)})$ (voir la Condition (CL1) page 224). De l'Équation (V.2) et de la condition sur les conclusions auxiliaires du contenu d'une boîte de π , nous déduisons les conditions (CL2) et (CL3) de le réseau étiqueté (voir la Définition V.12 page 224). Donc $(l(\pi), \mathcal{L})$ est un réseau étiqueté.

Soit b une co-déréliction de $l(\pi)$. Par l'Équation (V.2) nous savons que $c \in l(\rho)$ si et seulement si $c \in \text{cont}(l(\pi), \mathcal{L}, b)$. $\square$

Avant de passer à l'algorithme de fusion, il est peut être utile de faire le point dans la Figure V.9 page 227 les différents types de réseaux que nous avons introduits ou que nous sommes sur le point d'introduire.

R(LL)	Réseaux de preuve de la logique linéaire (voir la Définition V.4 page 213) ;
R(DiLL)	Réseaux de preuve pour la logique linéaire différentielle (voir la Définition V.5 page 214) ;
Et(LL)	Réseaux étiquetés, ce sont des réseaux de preuve pour la logique linéaire différentielle qui sont munis d'étiquettes et qui vérifient certaines propriétés (voir la Définition V.12 page 224).
Ct(DiLL)	Réseaux avec compteur, ce sont des réseaux d'interactions sur les cellules de la logique linéaire différentielle et une cellule supplémentaire appelée compteur (voir la Définition V.16 page 227).
Fus(DiLL)	Réseaux de fusions, ce sont des réseaux avec compteurs vérifiant des propriétés supplémentaires (voir la Définition V.20 page 233).

FIG. V.9: Notations pour les réseaux

V.4.3 Algorithme de fusion

L'algorithme de fusion est représenté par un système de réécriture (voir la Définition V.18 page 229) sur des réseaux étiquetés et avec compteurs (voir la Définition V.16 page 227) . Pendant la réduction, les compteurs (voir Définition V.15 page 227) parcourent le réseau, fusionnent les cellules et les étiquettent. L'étape la plus délicate de la réduction est de reconstruire le bon emboîtement, i.e. l'ordre $\sqsubseteq$ de la Définition V.12 page 224. Pour cela nous allons introduire un ordre (voir la Définition V.14 page 227) sur les étiquettes des réseaux de fusion (voir la Définition V.20 page 233) qui assure que tout réseau produit par un chemin de réduction réussi est un *réseau étiqueté* (voir la Définition V.12 page 224). D'après la Proposition V.3 page 225 de la formalisation des R(LL) par les réseaux étiquetés, nous obtenons ainsi un R(LL).

Réseaux étiquetés avec compteurs. Commençons par décrire les réseaux qui vont apparaître pendant la réécriture.

Définition V.14. Soit X un ensemble dénombrable appelé **trame**. Un **jeton** est un ensemble fini d'éléments de X ; les jetons sont notés $1, m, \dots$. Une **adresse** est un ensemble fini de jetons ; les adresses sont notées $A, B, \dots$. Les **alphabets** sont des ensembles d'adresses, notés $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$.

Définition V.15. Un **compteur** est une cellule t avec un port principal et $n \geq 1$ ports auxiliaires. Tous les ports de t sont typés par la même formule de MELL. Les compteurs sont des cellules commutatives. Par ailleurs, t est muni d'une fonction d'étiquetage λ_t qui associe à chaque port auxiliaire un jeton et à t une adresse comme dessiné sur la Figure V.10(a) page 228.

Définition V.16. Un **réseau avec compteur**, abrégé Ct(DiLL), est un triplet $(\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A})$ formé

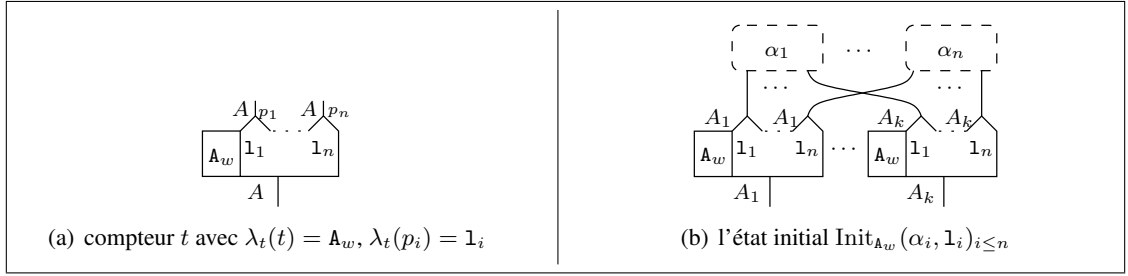
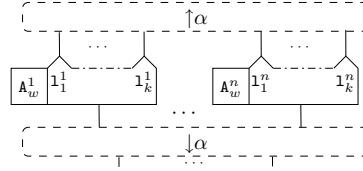


FIG. V.10: Compteur et état initial

- d'un réseau d'interaction α construit à partir des cellules des R(DiLL) (voir les Figures V.3(a)-V.3(c) et des compteurs. On demande à ce réseau d'être décomposé en deux R(DiLL) notés $\downarrow\alpha$ et $\uparrow\alpha$, réunis par des compteurs $t_1, \dots, t_n$, comme le montre la figure suivante,



On note $\downarrow\alpha$ (resp. $\uparrow\alpha$) le réseau avec compteur constitué de $\downarrow\alpha$ (resp. $\uparrow\alpha$) et des compteurs de α .

- d'un ensemble $\mathcal{A}$ d'adresses et
- d'une fonction d'étiquetage $\mathcal{L}$ de domaine $cell(\downarrow\alpha)$, $\perp_\alpha$ et des compteurs et à valeurs dans $\mathcal{A}$. On demande de plus à ce que pour chaque compteur t ,

$$\mathcal{L}(t) = \lambda_t(t) \cup \{\lambda_t(p) \mid p \text{ port auxiliaire de } t\}.$$

Nous nous intéressons aux réductions qui commencent sur un état initial fait de compteurs rassemblant les R(DiLL) par leur ports libres respectifs.

Définition V.17. Soit $(\alpha_i)_{i \leq n}$ une famille de R(DiLL) avec des interfaces appariées. Soient $(1_i)_{i \leq n}$ des jetons et A_w une adresse tels que les jetons dans $A = A_w \cup \{1_i\}_{i \leq n}$ sont deux à deux incomparables. L'état initial associé à $(\alpha_i)_{i \leq n}$, $(1_i)_{i \leq n}$ et A_w est le réseau avec compteur $(\alpha, \mathcal{L}_A, \mathcal{A})$, où $\alpha = \text{Init}_{A_w}(\alpha_i, 1_i)_{i \leq n}$ est le réseau avec compteur dessiné à la Figure V.10(b) page 228 dans lequel $\mathcal{L}_A(t) = A$ pour chaque compteur t et $\mathcal{A} = \{A\}$.

Dans la suite, lorsque A_w est vide, nous oublierons l'indice et écrirons $\text{Init}(\alpha_i, 1_i)_{i \leq n}$.

Le système de réécriture. Nous avons à présent tous les ingrédients pour introduire la réduction $\xrightarrow{\text{mrg}}$ sur les réseaux avec compteurs comme la clôture par contexte de la relation binaire mrg décrite dans les Figures V.11 page 230 et V.12 page 231.

Remarque. • Dans le paradigme des réseaux d'interaction [Laf90], un redex est fait de deux cellules reliées par leurs ports principaux. Au contraire, ici, un redex est fait d'un compteur dont les ports *auxiliaires* sont reliés aux ports principaux des cellules du R(DiLL). C'est pour cette raison que nous décrivons les ports auxiliaires des compteurs par des pointes de triangles.

- Il est important de noter que, alors que les compteurs fusionnent localement les cellules, le processus d'étiquetage reste global. En effet, l'*alphabet* apparaissant dans les réseaux avec compteurs contient cette information globale.

Définition V.18. Les **e@étapes élémentaires de réduction (ers)** (abrégées **ers**)

$$\begin{aligned} \text{l nr} &:= \text{ax} \cup \text{zero} \cup \text{one} \cup \text{two} \cup (\text{co})\text{w} \cup \text{contr}, \\ \text{mrg} &:= \text{l nr} \cup !\text{p} \cup ?\text{p}, \end{aligned}$$

sont définies sur les Figures V.11 page 230 et V.12 page 231. Le réseau à gauche de chaque règle est appelé le **redex** et celui de droite le **réduit**.

Pour x valant l nr ou mrg , nous définissons la **x-réduction** comme la clôture au contexte de x . Plus précisément, on note $(\alpha_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{A}_1) \xrightarrow{x} (\alpha_2, \mathcal{L}_2, \mathcal{A}_2)$ lorsque

- il existe $\alpha'_i \subseteq \alpha_i$, $i = 1, 2$ tels que $\alpha_2 = \alpha_1[\alpha'_2/\alpha'_1]$ et $(\alpha'_1, \mathcal{L}_1|_{\alpha'_1}, \mathcal{A}_1) \xrightarrow{x} (\alpha'_2, \mathcal{L}'_2, \mathcal{A}_2)$,
- pour tout $c \in \alpha_2$, si $c \in \alpha'_2$, alors $\mathcal{L}_2(c) = \mathcal{L}'_2(c)$ et si $c \in \alpha_1$ et $c \notin \alpha'_1$, alors $\mathcal{L}_2(c) = \mathcal{L}_1(c)$.

On notera par la suite $\xrightarrow{x*}$ la clôture réflexive et transitive de $\xrightarrow{x}$.

Une réduction $R : (\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\text{mrg}*} (\alpha', \mathcal{L}', \mathcal{A}')$ est un **succès** lorsque α' est sans compteur.

Remarque. • Remarquons que dans la Figure V.12 page 231 il y a deux étapes non-déterministes ($\text{contr}, !\text{p}, ?\text{p}$), dans lesquelles on peut choisir différentes surjections ($\text{contr}, ?\text{p}$) ou différentes adresses ($!\text{p}, ?\text{p}$). En fait, le non-déterminisme de $!\text{p}$ est superficiel car différents choix dans l'adresse A' mèneront à différents réseaux étiquetés équivalents modulo renommage.

- Il n'y a que trois cas où la réduction ne se termine pas par un succès, i.e. où l'algorithme de réécriture s'arrête sur un triplet qui ne peut être réduit mais qui contient des compteurs :

- * quand deux compteurs sont reliés par des axiomes et ont des étiquettes différentes,
- * quand il n'y a pas d'adresse disponible pour entrer dans une boîte par l'étape $?\text{p}$.

Dans les deux premiers cas, l'algorithme a tenté de fusionner des parties du réseau qui ne se correspondent pas. Dans le dernier cas, le réseau ne provient pas de la logique linéaire, sinon il y aurait une co-déréliction par laquelle on peut entrer dans une boîte.

Nous décrivons quelques faits simples sur les réseaux avec compteurs qui seront utiles pour prouver la correction et la complétude. Les preuves de ces faits ne sont pas données car elles n'apportent pas plus qu'une observation précise des différents cas de la réduction.

Fait V.4. (F1) Remarquons tout d'abord que $(\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\text{mrg}} (\alpha', \mathcal{L}', \mathcal{A}')$ implique que pour tout $\mathcal{B}$, on a que $(\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \xrightarrow{\text{mrg}} (\alpha', \mathcal{L}', \mathcal{A}' \cup \mathcal{B})$. Au contraire, la réciproque n'est pas vraie en général. Cependant, si $(\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \xrightarrow{\text{mrg}} (\alpha', \mathcal{L}', \mathcal{A}' \cup \mathcal{B})$, $\mathcal{L}(\alpha) \subseteq \mathcal{A}$ et $\mathcal{L}'(\alpha') \subseteq \mathcal{A}'$, alors $(\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\text{mrg}} (\alpha', \mathcal{L}', \mathcal{A}')$.

(F2) Pour toute réduction $R : (\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\text{mrg}*} (\alpha', \mathcal{L}', \mathcal{A}')$, l'alphabet $\mathcal{A}'$ contient $\mathcal{A}$ et les adresses introduites par les étapes de réduction élémentaires de R . En particulier, si aucune étape $!\text{p}$ n'est effectuée le long de la réduction, alors $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$.

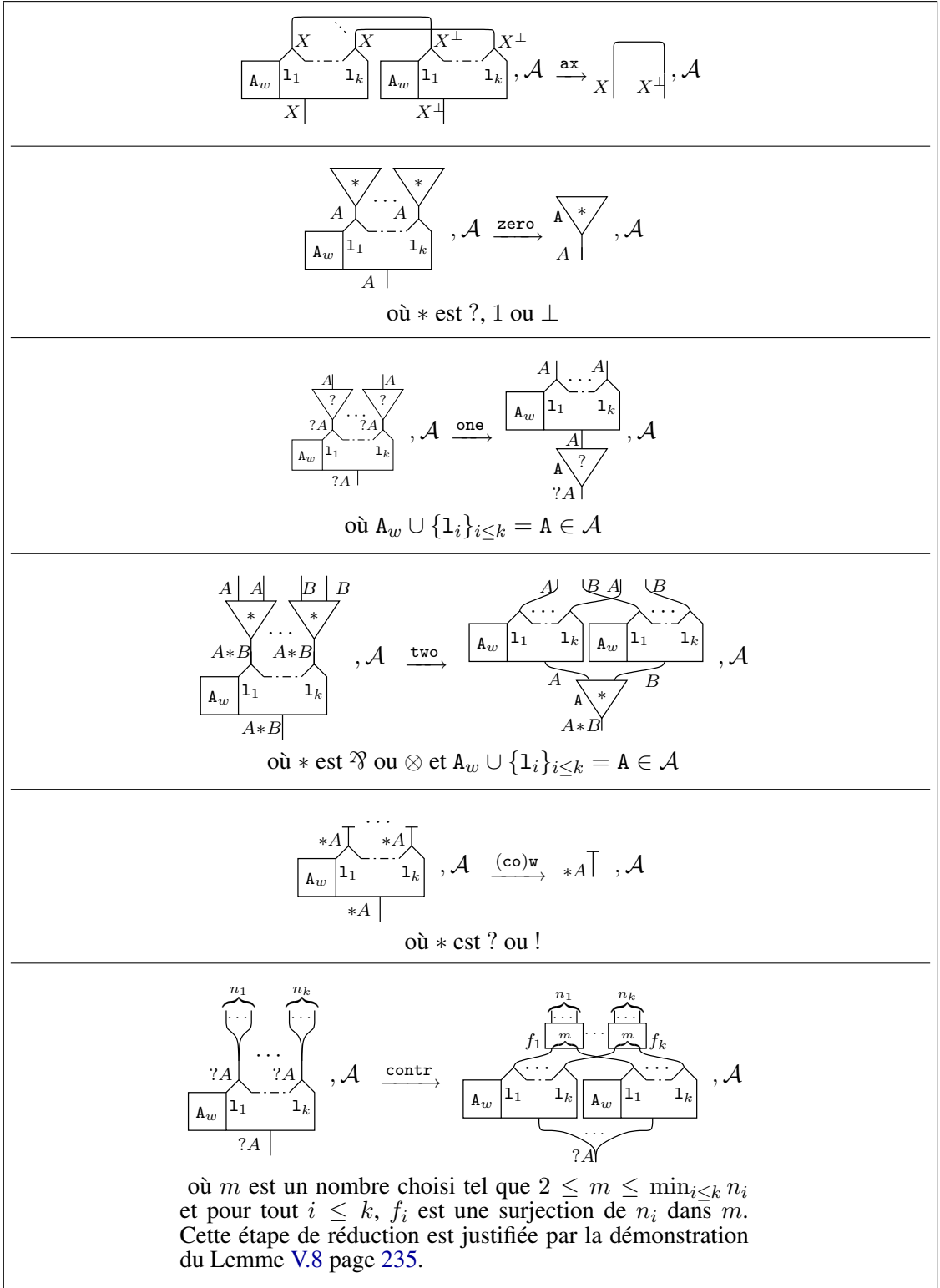
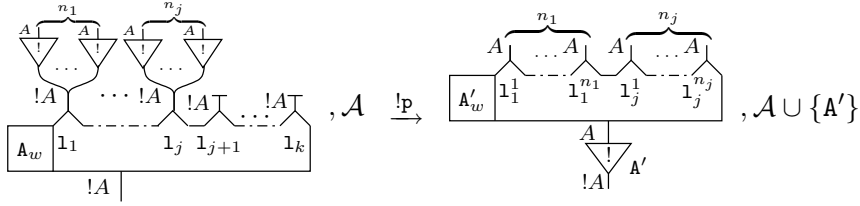
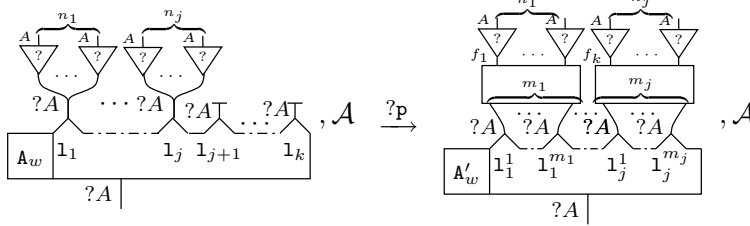


FIG. V.11: Étapes élémentaires de réduction linéaire (1nr)



Les ports du compteur sont ordonnés dans le redex afin que les $j \geq 0$ premiers ports (resp. les $k - j$ derniers ports) soient connectés à des co-dérélictions (resp. co-affaiblissements). Cet ordre est une convention visant à simplifier les indices. On choisit une famille $\{y\} \cup \{x_i^l\}_{i \leq j, l \leq n_i}$ d'éléments de X , deux à deux distincts et n'apparaissant pas dans $\mathcal{A}$. Enfin, nous posons $A'_w = A_w \cup \{1_i \cup \{y\}\}_{j < i \leq k}$, $1_i^l = 1_i \cup \{x_i^l\}$ et $A' = A'_w \cup \{1_i^l\}_{i \leq j, l \leq n_i}$.

(a) L'étape **!p** crée la boîte d'adresse A'



Comme pour l'étape **!p**, nous ordonnons les ports des compteurs du redex pour que les $j \geq 0$ premiers ports soient reliés à des co-dérélictions et que les $k - j$ soient reliés à des affaiblissements. On choisit pour tout $i \leq j$ un nombre $m_i \leq n_i$ et une fonction f_i de n_i sur m_i . Enfin, on choisit $A' \in \mathcal{A}$ successeur de l'étiquette du compteur réduit (s'il n'y a pas de successeur dans $\mathcal{A}$, alors **?p** ne peut pas être utilisée), i.e. tel qu'il existe une famille $\{y\} \cup \{x_i^l\}_{i \leq j, l \leq n_i}$ d'éléments de X deux à deux distincts tels que $A'_w = A_w \cup \{1_i \cup \{y\}\}_{j < i \leq k}$, $1_i^l = 1_i \cup \{x_i^l\}$ et $A' = A'_w \cup \{1_i^l\}_{i \leq j, l \leq m_i}$.

(b) L'étape **?p** entre dans la boîte d'adresse A'

FIG. V.12: Étapes élémentaires de réduction exponentielle (**!p**, **?p**)

(F3) Soient $(\alpha_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{A}_1) \xrightarrow{x} (\alpha_2, \mathcal{L}_2, \mathcal{A}_2) \xrightarrow{y} (\alpha_3, \mathcal{L}_3, \mathcal{A}_3)$ deux étapes élémentaires x et y de mrg . Si le compteur dans le redex de y n'est pas créé par la réduction x et si y utilise au plus les adresses de $\mathcal{A}_1$, alors il existe $(\alpha_4, \mathcal{L}_4, \mathcal{A}_4)$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} (\alpha_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{A}_1) & \xrightarrow{x} & (\alpha_2, \mathcal{L}_2, \mathcal{A}_2) \\ \downarrow y & & \downarrow y \\ (\alpha_4, \mathcal{L}_4, \mathcal{A}_4) & \xrightarrow{x} & (\alpha_3, \mathcal{L}_3, \mathcal{A}_3) \end{array}$$

(F4) Pour conclure, les réductions linéaires transportent les configurations initiales.

Pour tout réseau avec compteur, rappelons (voir Définition V.16 page 227) que $\hat{1}_\alpha$ est le sous-réseau formé des compteurs et des cellules au dessus des compteurs.

Si $(\text{Init}_{\text{Aw}}(\alpha_i, 1_i), \mathcal{L}_A, \{\mathcal{A}\}) \xrightarrow{\text{Inr}^*} (\alpha', \mathcal{L}', \mathcal{A}')$, alors $\hat{1}_{\alpha'}$ est un état initial, c'est-à-dire qu'il existe $(\alpha'_i)_{i \leq n}$ telle que $\hat{1}_{\alpha'} = \text{Init}_{\text{Aw}}(\alpha'_i, 1_i)_{i \leq n}$, $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_A$ et $\mathcal{A}' = \{\mathcal{A}\}$.

Différents ordres. Comme nous voulons que la réduction produise un *réseau étiqueté*, nous devons restreindre l'ensemble des réseaux avec compteurs que nous considérons. Ainsi nous introduisons des *réseaux de fusion* tels que le résultat d'une réduction qui se termine par un succès soit un *réseau étiqueté*. Pour cela, nous avons besoin d'introduire un ordre sur les étiquettes produites par l'algorithme. Nous prouvons alors que la réduction préserve les propriétés des réseaux de fusion. Comme l'état initial est toujours un réseau de fusion et un réseau de fusion sans compteur est un réseau étiqueté équivalent à un $\text{R}(\text{LL})$, nous obtenons le résultat désiré.

Commençons par définir l'ordre sur les étiquettes.

Définition V.19. Nous considérons l'ordre de l'inclusion ensembliste sur les jetons. Ainsi, deux jetons l et m sont dits **incomparables** lorsqu'il existe $x \in l$ et $x' \in m$ tels que $x \notin m$ et $x' \notin l$. L'inclusion ensembliste des jetons induit le pré-ordre de Smyth sur les adresses :

$$A \trianglelefteq B \iff \forall m \in B, \exists l \in A, l \subseteq m.$$

Remarquons que le pré-ordre $\trianglelefteq$ n'est en général pas anti-symétrique (on peut par exemple considérer $A = \{1, m\}$, $B = \{1, m'\}$, avec $1 \subset m, m'$), ce n'est pas non plus un ordre arborescent sur l'ensemble de toutes les adresses (par exemple, $A = \{1\}$, $A' = \{m\}$, $B = \{1, m\}$, avec $1, m$ disjoints). Cependant, sur les *réseaux de fusion* qui apparaissent dans la réduction, le pré-ordre $\trianglelefteq$ est un ordre arborescent sur les ensembles d'adresses que nous manipulons.

Exemple V.8. Revenons rapidement à l'exemple de la Figure V.8 page 222. L'algorithme commence avec deux jetons différents $1_1 = \{x\}$ et $1_2 = \{y\}$ qui constituent l'adresse A qui est le plus petit élément de l'étiquetage. Chaque jeton correspond au plus petit élément de l'un des $\text{R}(\text{DiLL})$ initiaux. L'étape 3 introduit trois nouveaux jetons $1_1^1 = \{x, c_1\}$, $1_2^1 = \{x, c_2\}$ et $1_2^2 = \{x, c_3\}$ où c_1, c_2, c_3 correspondent aux co-dérélictions en gras sur la Figure V.8(c) page 222. Ces jetons sont réunis en une adresse $B = \{1_1^1, 1_2^1, 1_2^2\}$ qui est utilisée par les étapes 4, 5 et 7. Nous avons ainsi $A \trianglelefteq B$. Finalement, l'étape 8 introduit les jetons $1_1^{1,1} = \{x, c_1, d_1\}$,

$1_2^{1,1} = \{x, c_2, w\}$, $1_2^{2,1} = \{x, c_3, d_2\}$ et $1_2^{2,2} = \{x, c_3, d_3\}$ où d_1, w, d_2, d_3 sont les co-dérélictions et les co-affaiblissements en gras sur la Figure V.8(h) page 222. L'adresse associée $C = \{1_1^{1,1}, 1_2^{1,1}, 1_2^{2,1}, 1_2^{2,2}\}$ est utilisée à l'étape 9. On a $B \leq C$.

Nous allons travailler avec deux ordres $\sqsubseteq$ et $\trianglelefteq$ sur les adresses. Le premier code la structure des boîtes dans l'étiquetage et le second est construit pas à pas pendant la réduction. La réduction est définie de telle façon que les deux ordres coïncident, même s'ils sont issus de définitions différentes. En effet, $\trianglelefteq$ tient compte des jetons, éléments des adresses, et dépend de l'inclusion ensembliste des jetons (Définition V.14 page 227), alors que $\sqsubseteq$ est un ordre dérivé de l'ordre des cellules dans le réseau sous-jacent (Définition V.12 page 224).

Réseaux de fusion

Définition V.20. Un réseau avec compteur $(\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A})$ est appelé **réseau de fusion**, abrégé **Fus(DILL)**, lorsqu'il vérifie

- (CRF1) pour chacun des ports auxiliaires p, q de t , $\lambda_t(p)$ et $\lambda_t(q)$ sont des jetons mutuellement incomparables et sont incomparables avec les éléments de $\lambda_t(t)$;
- (CRF2) pour tout compteur $t \in \alpha$, le port principal de t est relié à une cellule $c \in \downarrow \alpha$, $\perp_\alpha$ incluse et $\mathcal{L}(c) \trianglelefteq \mathcal{L}(t)$. De plus, si $\mathcal{L}(c) \neq \mathcal{L}(t)$ alors tous les ports auxiliaires de t sont reliés à des déréllections $c \in \uparrow \alpha$ ou à des co-affaiblissements ;
- (CRF3) $\forall A, B \in \mathcal{A}, (A \sqsubseteq_{\alpha, \mathcal{L}} B \iff A \trianglelefteq B)$;
- (CRF4) $(\downarrow \alpha, \mathcal{L})$ est un réseau étiqueté et $\mathcal{L}(\downarrow \alpha) = \mathcal{A}$.

Lemme V.5. L'état initial est un réseau de fusion.

Fait V.6. Comme nous l'avons remarqué auparavant, la relation $\trianglelefteq$ n'est pas en général un ordre. Cependant, si $(\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A})$ est un réseau de fusion, alors les Conditions (CRF3) et (CRF4) assurent que $\trianglelefteq$ est un ordre arborescent sur $\mathcal{A}$. On emprunte alors le vocabulaire des arbres lorsque l'on parle des étiquettes. Par exemple, le **successeur d'une étiquette** est un de ses fils pour l'arbre arborescent $\trianglelefteq$.

Proposition V.7. Si $(\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\text{mrg}} (\alpha', \mathcal{L}', \mathcal{A}')$ et $(\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A})$ est un réseau de fusion, alors $(\alpha', \mathcal{L}', \mathcal{A}')$ est aussi un réseau de fusion.

Corollaire V.2. Si une réduction partant d'un réseau de fusion $(\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\text{mrg}^*} (\alpha', \mathcal{L}', \mathcal{A}')$ est un succès, alors $(\alpha', \mathcal{L}') = (\downarrow \alpha', \mathcal{L}')$ est un réseau étiqueté et représente donc un $R(\text{LL}) \pi$ (Proposition V.3 page 225). Dans ce cas, nous disons que la réduction **mène à** π et nous notons

$$(\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\text{mrg}^*} \pi.$$

Démonstration de la Proposition V.7 page 233. La vérification de la Condition (CRF1) est simple, c'est pourquoi nous ne le faisons pas explicitement.

La démonstration se fait par étude des différents cas de réduction $(\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\text{mrg}} (\alpha', \mathcal{L}', \mathcal{A}')$ (voir Figures V.11 page 230 et V.12 page 231). Nous prouvons dans chacun des cas que $(\alpha', \mathcal{L}', \mathcal{A}')$ vérifie les Conditions (CRF2-CRF4) de la Définition V.20 page 233 des réseaux de fusion. Rappelons que les Conditions (CL1-3) font référence à la Définition V.12 page 224.

Cas i : (ax). Supposons que $(\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\text{ax}} (\alpha', \mathcal{L}', \mathcal{A}')$ et notons t_1, t_2 les deux compteurs qui apparaissent dans α et qui sont remplacés par w dans α' par l'étape de réduction ax. Par définition de ax, $\mathcal{L}(t_1) = \mathcal{L}(t_2)$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ et $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ sont égales.

Les Conditions (CRF2) et (CRF3) sont facilement vérifiées. Pour la dernière Condition (CRF4), il nous suffit de vérifier que $\downarrow \alpha'$ satisfait la Condition d'axiome (CL3) des réseaux étiquetés. Supposons qu'un des ports de w soit le port auxiliaire d'une cellule c telle que $\mathcal{L}'(c) \neq \mathcal{L}'(\perp_\alpha)$. Alors, l'un des ports principaux des compteurs, disons t_1 , est relié au port principal de c dans $\downarrow \alpha$. Par la Condition CRF2 sur les compteurs, vérifiée par $\downarrow \alpha$, on a $\mathcal{L}(c) = \mathcal{L}(t_1)$, donc $\mathcal{L}(t_2) = \mathcal{L}(t_1) \neq \mathcal{L}(\perp_\alpha)$, car la réduction ax a pu être réalisée. En appliquant à nouveau la Condition CRF2 des compteurs, le port principal de t_2 est relié à une cellule c' telle que $\mathcal{L}(c') = \mathcal{L}(t_2) = \mathcal{L}(c)$. On conclut en remarquant que c et c' sont reliés à w dans $\downarrow \alpha'$ et $\mathcal{L}'(c) = \mathcal{L}'(c')$.

Dans les autres cas de réduction, on note t le compteur réduit et t' le compteur apparaissant dans le résultat de la réduction. On note c' la cellule résultant de la fusion.

Cas ii : (zero, one, two, contr). Supposons que $(\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\text{one}} (\alpha', \mathcal{L}', \mathcal{A}')$. Par définition, $\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}'(c') = \mathcal{L}'(t')$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ et $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ sont égales sauf sur t et c' .

(CRF2) La condition des compteurs est vérifiée par $\downarrow \alpha'$ car le port principal de t' est relié à c' et $\mathcal{L}'(t) = \mathcal{L}'(c')$.

(CRF3) Pour prouver la condition des ordres, on suppose que les ordres $\leq$ et $\sqsubseteq_{\downarrow \alpha, \mathcal{L}}$ sont égaux sur $\mathcal{A}$. Comme $\sqsubseteq_{\downarrow \alpha', \mathcal{L}'}$ est la clôture transitive de $\sqsubseteq_{\downarrow \alpha', \mathcal{L}'}$ (Définition V.12 page 224) et par hypothèse, $\leq$ est égal à la clôture transitive de $\sqsubseteq_{\downarrow \alpha, \mathcal{L}}$. Il suffit de montrer que $\sqsubseteq_{\downarrow \alpha, \mathcal{L}} \subseteq \sqsubseteq_{\downarrow \alpha', \mathcal{L}'}$ et $\sqsubseteq_{\downarrow \alpha', \mathcal{L}'} \subseteq \sqsubseteq_{\downarrow \alpha, \mathcal{L}}$ sur $\mathcal{A}$. La première inclusion est immédiate. Pour la deuxième, remarquons que $\sqsubseteq_{\downarrow \alpha', \mathcal{L}'}$ et $\sqsubseteq_{\downarrow \alpha, \mathcal{L}}$ ne peuvent différer que sur $\mathcal{L}'(d) \sqsubseteq_{\downarrow \alpha', \mathcal{L}'} \mathcal{L}'(c')$ pour une cellule $d \leq_{\downarrow \alpha'} c'$. Par la Condition (CRF2) des compteurs, il existe c dans $\downarrow \alpha$ relié au port principal de t et tel que $\mathcal{L}(c) \leq \mathcal{L}(t)$. Dans $\downarrow \alpha'$, la cellule c est reliée au port principal de c' , donc $d \leq_{\downarrow \alpha'} c'$ implique $d = c'$ ou $d \leq_{\downarrow \alpha} c$. Dans le premier cas, $\mathcal{L}'(d) = \mathcal{L}'(c')$. Sinon, $\mathcal{L}(d) \leq \mathcal{L}(c)$ car $\leq = \sqsubseteq_{\downarrow \alpha, \mathcal{L}}$. Donc $\mathcal{L}'(d) \leq \mathcal{L}'(c')$ car $\mathcal{L}'(d) = \mathcal{L}(d)$ et $\mathcal{L}(c) \leq \mathcal{L}(t) = \mathcal{L}'(c')$. On a finalement montré que $\sqsubseteq_{\downarrow \alpha', \mathcal{L}'} \subseteq \sqsubseteq_{\downarrow \alpha, \mathcal{L}}$, soit $\sqsubseteq_{\downarrow \alpha', \mathcal{L}'} = \sqsubseteq_{\downarrow \alpha, \mathcal{L}}$.

(CRF4) La condition des réseaux étiquetés (CRF4) se déduit directement de l'égalité $\sqsubseteq_{\downarrow \alpha', \mathcal{L}'} = \sqsubseteq_{\downarrow \alpha, \mathcal{L}}$ sur $\mathcal{A}$ et du fait que seule une cellule exponentielle est apparue dans $\downarrow \alpha'$.

Les cas zero, two, contr se traitent de la même façon. Dans le cas two, pour prouver la condition (CL2) d'exponentielle des réseaux étiquetés, comme la cellule c' résultant de la fusion n'est pas exponentielle, nous devons utiliser la remarque que si $\mathcal{L}'(c') \neq \mathcal{L}'(\perp_{\alpha'})$ alors $\mathcal{L}(t) \neq \mathcal{L}(\perp_\alpha)$. D'après la Condition (CRF2) de compteur sur $(\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A})$, le port principal de t est relié à une cellule $c \in \downarrow \alpha$ telle que $\mathcal{L}(c) = \mathcal{L}(t)$. Par conséquent, le port principal de c' est relié à c dans $\downarrow \alpha'$.

Cas iii : (!p). Supposons que $(\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A}) \xrightarrow{!p} (\alpha', \mathcal{L}', \mathcal{A}')$. La cellule c' est une co-déréliction du réseau α' .

Comme nous avons $\mathcal{L}(t) \triangleleft \mathcal{L}'(t) = \mathcal{L}'(c')$ et que partout ailleurs les deux étiquetages coïncident, les Conditions CRF2 de compteur et CRF1 d'ordre sont vérifiées. Remarquons que l'hypothèse $\mathcal{L}(\downarrow\alpha) = \mathcal{A}$ implique que $\mathcal{L}'(\downarrow\alpha') = \mathcal{A} \cup \{\mathcal{L}'(c')\}$.

Pour la Condition 4 page 233 des réseaux étiquetés, nous ne nous attardons que sur la condition (CL1). Par définition de !p, l'étiquette $\mathcal{L}'(c')$ est obtenue en ajoutant aux éléments de $\mathcal{L}(t)$ des noms qui n'apparaissent pas dans $\mathcal{A}$. Nous en déduisons, pour toute adresse, que $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{L}'(c') \not\triangleleft A$ et $A \trianglelefteq \mathcal{L}'(c')$ si et seulement si $A \trianglelefteq \mathcal{L}(t)$. Par conséquent $\trianglelefteq$ et donc $\sqsubseteq_{\downarrow\alpha', \mathcal{L}'}$ sont antisymétriques et arborescents sur $\mathcal{A}'$.

Cas iv : (?p). Supposons pour finir que $(\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A}) \xrightarrow{?p} (\alpha', \mathcal{L}', \mathcal{A}')$. Par définition, $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, $\mathcal{L}(t) \triangleleft \mathcal{L}'(t')$, $\mathcal{L}'(t) \in \mathcal{A}$ et, partout ailleurs, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont égales. La condition (CRF2) de compteur est vérifiée car tous les ports auxiliaires de t' sont reliés à des déréllections dans α' . Les autres conditions (CRF3) et (CRF4) sont vérifiées car $(\downarrow\alpha, \mathcal{L})$ et $(\downarrow\alpha', \mathcal{L}')$ sont des réseaux étiquetés identiques.

□

Complétude et correction. Dans ce paragraphe, nous prouvons la complétude et la correction du système de réduction. La correction assure qu'un R(DiLL) qui se réduit en un R(LL) apparaît dans le développement de Taylor de ce dernier. La complétude aborde la question réciproque : à partir d'une famille finie de R(DiLL) $(\alpha_i)_{i \leq n}$ provenant du développement de Taylor d'un R(LL) π , existe-t-il une réduction qui se termine sur un réseau $\pi' \ll \pi$? La notion d'approximation $\pi' \ll \pi$ est nécessaire car il se peut en effet que l'ensemble des R(DiLL) ne contienne pas assez d'information sur le R(LL) pour le reconstruire et que certaines boîtes soient approchées (Définition V.10 page 220).

Nous allons commencer par étudier les propriétés de la réduction linéaire (lnr), qui est plus simple à aborder.

Lemme V.8 (Réduction linéaire). Soit π un R(LL). Soient $(\alpha_i)_{i \leq n}$ une famille de R(DiLL) avec des interfaces appariées avec celle de π et $(1_i)_{i \leq n} = \mathbf{A}$ une famille de jetons deux à deux incomparables. Soient $(b_r)_{r \leq s}$ les boîtes à profondeur 0 de π et, pour chaque $r \leq s$, ρ_r leur contenu respectif. Pour tout $r \leq s$, on se donne $(\gamma_{r,i})_{i \leq n}$ une famille de R(DiLL) avec une interface appariée avec celle de b_r .

Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout $i \leq n$, $\alpha_i = \pi[\gamma_{r,i}/b_r]_{r \leq s}$.
2. Il existe une réduction

$$(\text{Init}(\alpha_i, 1_i)_{i \leq n}, \mathcal{L}_{\mathbf{A}}, \{\mathbf{A}\}) \xrightarrow{\text{lnr}^*} (\pi[\text{Init}(\gamma_{r,i}, 1_i)_{i \leq n}/b_r]_{r \leq s}, \mathcal{L}_{\mathbf{A}}, \{\mathbf{A}\}).$$

Démonstration. La démonstration se fait par induction sur la construction des réseaux séquentiels donnée à la Définition V.4 page 213.

Nous ne traitons que le cas de la contraction *contr* (voir Figure V.11 page 230). Soit π le résultat de la contraction de deux ports libres p' , p'' d'un R(LL) $\bar{\pi}_1$. L'interface de π est $(p : ?A, \Gamma)$ et celle de $\bar{\pi}_1$ est $(p' : ?A, p'' : ?A, \Gamma)$ où Γ désigne l'ensemble des autres ports libres de l'interface. Remarquons que π pourrait aussi bien résulter de la contraction de p' et

p'' dans le R(LL) $\bar{\pi}_2$ obtenu en permutant les ports p' et p'' dans $\bar{\pi}_1$. L'interface de $\bar{\pi}_2$ est donc $(p'' : ?A, p' : ?A, \Gamma)$. C'est dans la commutativité que réside la subtilité. Les R(LL) $\bar{\pi}_1$ et $\bar{\pi}_2$ sont des R(LL) différents, mais la contraction des ports libres p', p'' aboutit au même R(LL) π .

Montrons que 1 implique 2. Par définition de la substitution, pour chaque $i \leq n$, le réseau simple α_i a pour interface $(p : ?A, \Gamma)$ et il existe un R(DiLL) $\bar{\alpha}_i$ tels que α_i est la contraction des deux ports $p' : ?A$ et $p'' : ?A$. Pour chaque $i \leq n$, on a donc soit $\bar{\alpha}_i = \bar{\pi}_1[\gamma_{r,i}/b_r]_{r \leq s}$, soit $\bar{\alpha}_i = \bar{\pi}_2[\gamma_{r,i}/b_r]_{r \leq s}$. Ré-ordonnons la famille des $\{\alpha_i\}_{i \leq n}$ de sorte que les $j \leq n$ premiers réseaux soient tels que $\bar{\alpha}_i = \bar{\pi}_1[\gamma_{r,i}/b_r]_{r \leq s}$ et que les $n - j$ derniers réseaux soient $\bar{\alpha}_i = \bar{\pi}_2[\gamma_{r,i}/b_r]_{r \leq s}$. Pour tout $j < i \leq n$, on note $\bar{\alpha}_i^\circ$ le R(DiLL) obtenu en échangeant p' et p'' dans $\bar{\alpha}_i$. Alors, l'interface de $\bar{\alpha}_i^\circ$ est $(p' : ?A, p'' : ?A, \Gamma)$ et $\bar{\alpha}_i^\circ = \pi'[\gamma_{r,i}/b_r]_{r \leq s}$. Par hypothèse d'induction, nous savons que $(\text{Init}(\bar{\alpha}_1, 1_1, \dots, \bar{\alpha}_j, 1_j, \bar{\alpha}_{j+1}^\circ, 1_{j+1}, \dots, \bar{\alpha}_n^\circ, 1_n), \mathcal{L}_A, \{A\}) \xrightarrow{\text{Inr}^*} (\pi'[\text{Init}(\gamma_{r,i}, 1_i)_{i \leq j}/b_r]_{r \leq s}, \mathcal{L}_A, \{A\})$. De plus, nous avons

$$\begin{aligned} & \text{Init}(\alpha_i, 1_i)_{i \leq n} = \\ & \begin{array}{c} \begin{array}{c} \{\bar{\alpha}_1\} \dots \{\bar{\alpha}_j\} \{\bar{\alpha}_{j+1}^\circ\} \dots \{\bar{\alpha}_n^\circ\} \\ \text{?A} \quad \text{?A} \quad \text{?A} \quad \text{?A} \quad \text{?A} \quad \text{?A} \quad \text{?A} \quad \text{?A} \\ 1_1 \quad \dots \quad 1_j \quad 1_{j+1} \quad \dots \quad 1_n \end{array} \\ \text{?A} \mid \end{array} \quad , \mathcal{L}_A, \{A\} \\ & \quad \downarrow \text{contr} \\ & \text{Init}(\bar{\alpha}_1, 1_1, \dots, \bar{\alpha}_j, 1_j, \bar{\alpha}_{j+1}^\circ, 1_{j+1}, \dots, \bar{\alpha}_n^\circ, 1_n) = \\ & \begin{array}{c} \begin{array}{c} \{\bar{\alpha}_1\} \dots \{\bar{\alpha}_j\} \{\bar{\alpha}_{j+1}^\circ\} \dots \{\bar{\alpha}_n^\circ\} \\ \text{?A} \quad \text{?A} \quad \text{?A} \quad \text{?A} \quad \text{?A} \quad \text{?A} \quad \text{?A} \quad \text{?A} \\ 1_1 \quad \dots \quad 1_j \quad 1_{j+1} \quad \dots \quad 1_n \end{array} \\ \text{?A} \mid \end{array} \quad , \mathcal{L}_A, \{A\} \end{aligned}$$

Remarquons que l'échange des deux ports est crucial dans les R(DiLL) $\bar{\alpha}_{j+1}^\circ, \dots, \bar{\alpha}_n^\circ$ pour pouvoir utiliser l'hypothèse de récurrence.

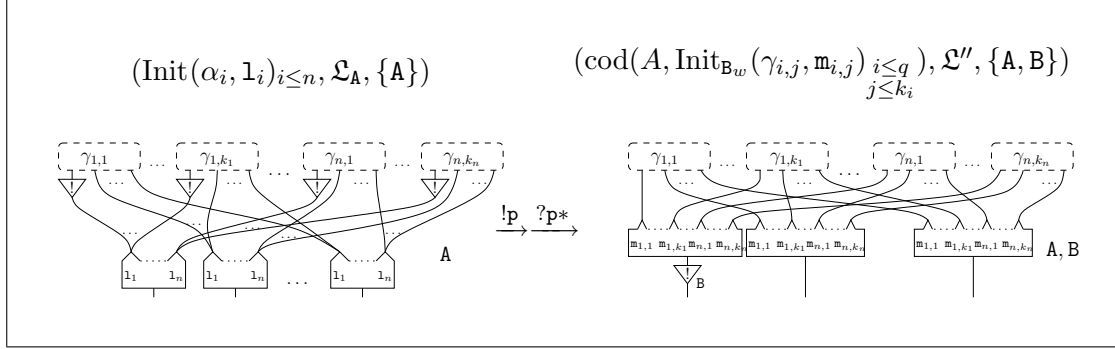
La réciproque se traite de façon similaire. $\square$

En prenant $s = 0$ dans le Lemme V.8 page 235 et en rem les α_i ne contiennent pas de co-dérélictions, La proposition suivante est une conséquence directe du Lemme V.8 page 235.

Proposition V.9 (Réduction linéaire). *Soit $(\alpha_i)_{i \leq n}$ une famille de réseaux simples avec des interfaces appariées et sans co-déréliction. Soit $A = (1_i)_{i \leq n}$ une famille de jetons deux à deux incomparables. Il existe un réseau étiqueté $(\alpha, \mathcal{L})$ et une réduction menant à un succès*

$$(\text{Init}(\alpha_i, 1_i)_{i \leq n}, \mathcal{L}_A, \{A\}) \xrightarrow{\text{mrg}^*} (\alpha, \mathcal{L}, A)$$

si et seulement si pour tout $i \leq n$, $\alpha_i = \alpha$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_A$ et $A = \{A\}$.



TAB. V.2: Une boîte

Démonstration. Comme les α_i ne contiennent pas de co-dérélictions, il ne peut pas y avoir d'étape $!p$ dans la réduction. Grâce au Fait (F2) page 229, on a que si $(\alpha', \mathcal{L}', \mathcal{A}')$ est n'importe quel réseau le long de la réduction, on a $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$. Ainsi, aucune étape $?p$ n'a pu être effectuée. La réduction est donc linéaire. Pour conclure, on applique le Lemme V.8 page 235 avec $s = 0$. $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de complétude selon lequel pour toute partie finie du développement de Taylor d'un réseau, il existe au moins un chemin de réduction qui mène à une approximation de ce dernier.

Théorème V.3 (Complétude). Soit π un $R(LL)$ et $(\alpha_i)_{i \leq n}$ une famille de $R(DiLL)$ apparaissant dans $\mathbb{T}(\pi)$. Pour toute famille $\{l_i\}_{i \leq n} = A$ de jetons deux à deux incomparables, il existe un $R(LL)$ $\pi_0 \ll \pi$ et une réduction menant à π_0

$$(\text{Init}(\alpha_i, l_i)_{i \leq n}, \mathcal{L}_A, \{A\}) \xrightarrow{\text{mrg}^*} \pi_0,$$

où $\mathcal{L}_A$ est la fonction constante égale à A .

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur la profondeur de π . Nous décomposons l'étape de récurrence en deux cas. Lorsque π est une boîte, nous choisissons des jetons qui étendent les jetons initiaux et nous les réunissons pour appliquer l'hypothèse de récurrence. Nous concluons par passage à la clôture par contexte. Dans le cas général, nous faisons passer un compteur à travers la partie linéaire du réseau jusqu'aux portes des boîtes en utilisant la Proposition V.9 page 236. Nous utilisons alors le cas de la boîte et concluons par clôture par contexte.

Cas i : (Pas de boîte). Si π n'a pas de boîte, alors $\mathbb{T}(\pi) = \{\pi\}$ (voir Définition V.8 page 217) et par la Proposition V.9 page 236 (en prenant $s = 0$) nous avons $(\text{Init}(\pi, \dots, \pi), \mathcal{L}_A, \{A\}) \xrightarrow{\text{mrg}^*} (\pi, \mathcal{L}_A, \{A\})$, où $\mathcal{L}_A$ est la fonction constante égale à A . On vérifie facilement que $(\pi, \mathcal{L}_A) \equiv \pi$.

Cas ii : (Une boîte). Si π est une boîte de contenu ρ , alors chaque $\alpha_i = \prod_{j=1}^{k_i} \text{cod}(p, \gamma_{i,j})$, où p est le port de ρ relié au port principal de la boîte, k_i est un entier et $\forall j \leq k_i, \gamma_{i,j} \in \mathbb{T}(\rho)$. Remarquons qu'il est possible que $k_i = 0$, i.e. $\alpha_i = l(!0)$. Dans ce cas, c'est la boîte vide. Sans perdre de généralité, nous pouvons réordonner les α_i de sorte que pour tout $i \leq q$, on ait $k_i > 0$

et pour tout $q + 1 \leq i \leq n$, on ait $k_i = 0$. Supposons de plus que $q > 0$, i.e. au moins un $k_1 > 0$; le cas $q = 0$ est direct.

Considérons un élément $y \in X$ qui n'apparaît pas dans A et une famille $\{x_i^j\}_{i \leq q, j \leq k_i}$ d'éléments de X deux à deux disjoints et qui n'apparaissent pas dans $A \cup \{y\}$. Posons $\mathbf{m}_{i,j} = 1_i \cup \{x_i^j\}$ pour tout $i \leq q$ et $j \leq k_i$ et $\mathbf{m}_i = 1_i \cup \{y\}$ pour tout $q < i \leq n$. Finalement, soient $B_w = \{\mathbf{m}_i ; \text{ pour } q < i \leq n\}$ et $B = B_w \cup \{\mathbf{m}_{i,j} ; \text{ pour } i \leq q, j \leq k_i\}$. Remarquons que $A \triangleleft B$. Par hypothèse de récurrence

$$(\text{Init}(\gamma_{i,j}, \mathbf{m}_{i,j})_{\substack{i \leq q \\ j \leq k_i}}, \mathfrak{L}_B, \{B\}) \xrightarrow{\text{mrg}^*} (\beta, \mathfrak{L}', \mathcal{B}), \quad (\text{V.3})$$

où $(\beta, \mathfrak{L}') \equiv \rho[!0/b_r]_{r \leq s}$, pour $s \geq 0$ boîtes dans $\text{box}(\rho)$. De plus, on peut calculer que

$$(\text{Init}(\alpha_i, 1_i)_{i \leq n}, \mathfrak{L}_A, \{A\}) \xrightarrow{!p} \xrightarrow{?p^*} (\text{cod}(p, \text{Init}_{B_w}(\gamma_{i,j}, \mathbf{m}_{i,j})_{\substack{i \leq q \\ j \leq k_i}}), \mathfrak{L}'', \{A, B\}),$$

où $\mathfrak{L}''$ étiquette seulement deux cellules, la conclusion avec A et la co-déréliction de port principal p avec B .

Comme nous l'avons remarqué dans le Fait (F1) page 229, on peut toujours étendre l'ensemble des adresses et conserver la même réduction. En particulier, l'Équation (V.3) est toujours vraie si on remplace $\{B\}$ et $\mathcal{B}$ par respectivement $\{A, B\}$ et $\{A\} \cup \mathcal{B}$.

On conclut par passage au contexte :

$$(\text{Init}(\alpha_i, 1_i)_{i \leq n}, \mathfrak{L}_A, \{A\}) \xrightarrow{\text{mrg}^*} (\text{cod}(p, \beta), \mathfrak{L}''', \mathcal{B}),$$

où $\mathfrak{L}''' = \mathfrak{L}''$, donc $(\text{cod}(p, \beta), \mathfrak{L}''') \equiv \pi[!0/b_r]_{r \leq s}$.

Cas iii : (Les autres cas). Supposons que π ait $s' \geq 1$ boîtes à la profondeur 0, i.e. $\text{box}(\pi) = \{b'_r, r \leq s'\}$, où nous utilisons l'apostrophe pour différencier ces boîtes de celles mentionnées dans l'énoncé du Théorème V.3 page 237. Pour chaque $r \leq s'$, notons ρ_r le contenu de b'_r . Par définition du développement de Taylor (Définition V.8 page 217), chaque α_i est égal à $\pi[\gamma_{r,i}/b'_r]_{r \leq s'}$, avec pour tout $r \leq s'$, $\gamma_{r,i} \in \mathbb{T}(b_r)$. Soient $r \leq s'$ et $i \leq n$. En utilisant le cas précédent, nous avons

$$(\text{Init}(\gamma_{r,i}, 1_i)_{i \leq n}, \mathfrak{L}_A, \{A\}) \xrightarrow{\text{mrg}^*} (\beta_r, \mathfrak{L}_r, \mathcal{A}_r), \quad (\text{V.4})$$

où $\mathfrak{L}_A$ est une fonction constante égale à A . Nous avons aussi $(\beta_r, \mathfrak{L}_r) \equiv b_r[!0/b_{r,i}]_{i \leq k_r}$, pour chaque $k_r \geq 0$ boîte de $\text{box}(b_r)$. En passant, remarquons qu'on pourrait avoir $k_r = 1$ et $b_{r,1} = b_r$, donc $(\beta_r, \mathfrak{L}_r) \equiv !0$. Remarquons aussi que nous pouvons supposer que, pour tous $r \leq s'$, les ensembles d'adresses $\mathcal{A}_r$ partagent seulement A . Par le Lemme V.8 page 235 nous avons

$$(\text{Init}(\pi[\gamma_{r,i}/b'_r]_{r \leq s'}, 1_i)_{i \leq n}, \mathfrak{L}_A, \{A\}) \xrightarrow{\text{mrg}^*} (\pi[\text{Init}(\gamma_{r,i}, 1_i)_{i \leq n}/b'_r]_{r \leq s'}, \mathfrak{L}_A, \{A\}).$$

Finalement, on conclut en passant au contexte et en utilisant la réduction (V.4),

$$(\text{Init}(\alpha_i, 1_i)_{i \leq n}, \mathfrak{L}_A, \{A\}) \xrightarrow{\text{mrg}^*} (\pi[\beta_r/b'_r]_{r \leq s'}, \cup_{r \leq s'} \mathfrak{L}_r, \cup_{r \leq s'} \mathcal{A}_r),$$

avec $(\pi[\beta_r/b'_r]_{r \leq s'}, \cup_{r \leq s'} \mathfrak{L}_r) \equiv \pi[!0/b_{r,i}]_{\substack{r \leq s' \\ i \leq k_r}}$, car pour chaque $r \leq s'$ nous avons $(\beta_r, \mathfrak{L}_r) \equiv !\rho_r[!0/b_{r,i}]_{i \leq k_r}$.

□

Nous allons maintenant montrer le théorème de correction. Pour cela, nous avons besoin d'introduire un peu de terminologie. Les étapes élémentaires de réduction $!p$ et $?p$ de la Figure V.12 page 231 sont appelées **emboîtements**. Elles ne changent que l'adresse A associée au compteur en une adresse A' . On dit qu'elles entrent dans la boîte. De plus, ces étapes de réduction imposent à la famille $\{y\} \cup \{x_i^l\}_{i \leq j, l \leq n_i}$ d'éléments de X , qui sont ajoutés aux nouvelles adresses, d'être deux à deux distincts.

Pour prouver le théorème de correction, nous avons besoin du Lemme V.12 page 240 de séparation qui sera utilisé dans l'étape de récurrence pour se ramener à des états initiaux (voir la Définition V.17 page 228). Pour démontrer ce lemme, nous allons partir d'une observation sur la réduction. La forme de la réduction ax impose une relation entre les étiquettes des compteurs d'une même composante connexe d'un réseau de fusion dont part une réduction réussie (Lemme V.10 page 239). On en déduit que quand la réduction ne rentre pas dans une boîte, alors les compteurs possèdent la même étiquette et s'il existe un chemin entre deux de leurs ports, alors ils possèdent aussi la même étiquette (Lemme V.11 page 240).

Lemme V.10. *Soit R une réduction commençant sur un réseau de fusion $(\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A})$ et menant à un succès. Soient $\beta_1, \dots, \beta_n$ les arbres de décomposition du réseau différentiel $\uparrow \alpha$ (voir la Figure V.1 page 224). Soient p et q deux ports libres et distincts de $\uparrow \alpha$. Soient β_p (resp. β_q) les deux arbres dont la racine est p (resp. q) et soit t (resp. u) le compteur ayant p (resp. q) comme port auxiliaire. Si β_p et β_q partagent un axiome, alors*

- (i) *t et u sont des compteurs différents ;*
- (ii) *les étiquettes $\mathcal{L}(t)$, $\mathcal{L}(u)$ d'une part et $\lambda_t(p)$, $\lambda_u(q)$ d'autre part sont ordonnées dans le même sens par rapport à l'ordre $\trianglelefteq$ pour les premières et à l'ordre $\subseteq$ pour les secondes ;*
- (iii) *si $\mathcal{L}(t) \triangleleft \mathcal{L}(u)$, alors R entre dans la boîte d'étiquette $\mathcal{L}(u)$; si $\mathcal{L}(u) \triangleleft \mathcal{L}(t)$, alors R entre dans la boîte d'étiquette $\mathcal{L}(t)$.*

Démonstration. Procédons par récurrence sur la longueur de R . Supposons que R commence avec $(\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\text{mrg}} (\alpha', \mathcal{L}', \mathcal{A}')$, alors le suffixe R' de R part d'un réseau de fusion $(\alpha', \mathcal{L}', \mathcal{A}')$ pour arriver sur un succès. Dans le cas où l'un des deux compteurs t ou u est impliqué dans la réduction $(\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\text{mrg}} (\alpha', \mathcal{L}', \mathcal{A}')$, le lemme ne découle pas directement de l'hypothèse de récurrence appliquée à R' . On doit alors étudier chacun des cas d'étape de réduction.

Si $(\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\text{ax}} (\alpha', \mathcal{L}', \mathcal{A}')$, alors les seuls fils qui n'étaient pas déjà dans $\uparrow \alpha'$ sont les axiomes reliant les compteurs $t \neq u$. Remarquons que comme α' résulte de la règle $\xrightarrow{\text{ax}}$, on a $\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(u)$ et les étiquettes associées à chaque port des compteurs sont aussi égales.

Si la première étape de réduction de R est $\xrightarrow{!p}$ ou $\xrightarrow{?p}$ (voir la Définition V.18 page 229), on pose t le compteur de α qui est réduit et t' le compteur résultant dans α' de la réduction (voir Figure V.12 page 231) : t' a un port p' qui est un résidu du port p de t et tel que l'arbre $\beta_{p'}$ partage un axiome avec l'arbre β_q . Nous avons $\mathcal{L}(t) \triangleleft \mathcal{L}'(t')$ et $\lambda_t(p) \subset \lambda_{t'}(p')$. Par hypothèse de récurrence, $t' \neq u$ dans α' , d'où $t \neq u$ dans α . De plus, ou bien $\mathcal{L}'(t') \trianglelefteq \mathcal{L}'(u) = \mathcal{L}(u)$, ou bien $\mathcal{L}(u) \trianglelefteq \mathcal{L}'(t)$. Dans le premier cas, $\lambda_{t'}(p') \subseteq \lambda_u(q)$ (l'étiquetage $\mathcal{L}_u$ de u est le même sur α et α'), donc $\mathcal{L}(t) \triangleleft \mathcal{L}(u)$ et $\lambda_t(p) \subset \lambda_u(q)$. Dans le deuxième cas, d'après l'hypothèse de récurrence, nous avons $\lambda_u(q) \subseteq \lambda_{t'}(p')$. De plus, d'après la définition de l'étape de réduction,

$\lambda_t(p) \subset \lambda_{t'}(p')$ et les éléments $\lambda_{t'}(p') \setminus \lambda_t(p)$ n'apparaissent pas dans $\mathcal{A} \ni \mathfrak{L}(u), \mathfrak{L}(t)$. On en déduit que $\lambda_u(q) \subseteq \lambda_t(p)$.

Les autres cas se traitent de la même façon. $\square$

Lemme V.11. *Soit R une réduction partant d'un réseau de fusion $(\alpha, \mathfrak{L}, \mathcal{A})$ et menant à un succès. Supposons que les étapes de réduction de R n'entrent pas dans une boîte dont l'adresse étiquette un compteur de α . Si p et q sont des ports libres de la même composante connexe de $\uparrow\alpha$, alors*

$$\mathfrak{L}(t) = \mathfrak{L}(u) \quad \text{et} \quad \lambda_t(p) = \lambda_u(q). \quad (\text{V.5})$$

Démonstration. Soient $\beta_1, \dots, \beta_n$ les arbres de la décomposition canonique du $R(\text{DiLL}) \uparrow\alpha$, comme décrit à la Figure V.1 page 224. Les deux ports libres p et q appartiennent à la même composante connexe si et seulement si il existe des arbres $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_k}$ tels que p (resp. q) est une racine de β_{i_1} (resp. β_{i_k}) et pour tout $j < k$, β_{i_j} et $\beta_{i_{j+1}}$ partagent au moins un axiome. Nous prouvons l'Équation (V.5) par récurrence sur le nombre k .

Si $k = 1$, alors les deux ports auxiliaires sont égaux et le lemme est vérifié. Sinon, notons p' la racine de β_{i_2} et t' le compteur dont p' est un port auxiliaire. Comme β_{i_1} et β_{i_2} partagent un axiome, nous pouvons appliquer le Lemme V.10 page 239 à p et p' . Puisque R n'entre pas dans une boîte par les adresses $\mathfrak{L}(t)$ et $\mathfrak{L}(t')$, on a $\mathfrak{L}(t) = \mathfrak{L}(t')$ et $\lambda_t(p) = \lambda_{t'}(p')$. Finalement, on applique l'hypothèse de récurrence à p' et q . Nous obtenons $\mathfrak{L}(t') = \mathfrak{L}(u)$ et $\lambda_{t'}(p') = \lambda_u(q)$. $\square$

Lemme V.12 (Séparation). *Soit R une réduction d'un réseau de fusion $(\alpha, \mathfrak{L}, \mathcal{A})$ menant à un succès. Supposons qu'aucune étape élémentaire de R n'entre pas dans une boîte dont l'adresse étiquette un compteur de α , alors on peut décomposer α : il existe une suite de $R(\text{DiLL})$ $(\alpha_i^r)_{r \leq s, i \leq n_r}$, une suite de jetons $(1_i^r)_{r \leq s, i \leq n_r}$ deux à deux incomparables et une suite d'adresses $(A_w^r)_{r \leq s}$ telles que*

$$\alpha = \underbrace{\underbrace{\text{Init}_{A_w^1}(\alpha_i^1, 1_i^1)_{i \leq n_1}} \cdots \underbrace{\text{Init}_{A_w^s}(\alpha_i^s, 1_i^s)_{i \leq n_s}}}_{\downarrow \alpha}$$

Démonstration. Comme R est un succès, deux compteurs d'une composante connexe de $\uparrow\alpha$ ont la même étiquette. (Lemmes V.10 page 239 et V.11 page 240). Pour chaque étiquette A , nous associons les sous-réseaux β constitués des cellules connectées à un compteur étiqueté par A . Nous décomposons ensuite le sous-réseau $\uparrow\beta$ qui n'a qu'un seul type de compteur. Grâce au Lemme V.11 page 240, deux ports auxiliaires de compteurs qui sont connectés ont la même étiquette. Donc pour chaque $1 \in A$, pour tout compteur de β et au-dessus de chaque port auxiliaire étiqueté par 1 , il y a un sous-réseau de $\uparrow\beta$ dont les ports libres sont les ports auxiliaires étiquetés par 1 . Nous associons alors à chaque 1 le réseau constitué des sous-réseaux au dessus des ports auxiliaires de compteurs étiquetés par 1 . Nous avons donc décomposé $\uparrow\beta$ en composantes non connexes et nous avons obtenu un état initial dont l'étiquette de départ est A . $\square$

Nous avons maintenant tous les outils en main pour prouver la correction de l'algorithme de fusion.

Théorème V.4 (Correction). *Soient π un $R(\text{LL})$, $(\alpha_i)_{i \leq n}$ une famille de $R(\text{DiLL})$ et $A = (1_i)_{i \leq n}$ une famille de jetons deux à deux incomparables. S'il existe une réduction*

$$(\text{Init}(\alpha_i, 1_i)_{i \leq n}, \mathcal{L}_A, \{A\}) \xrightarrow{\text{mrg}^*} \pi, \quad (\text{V.6})$$

alors pour tout $i \leq n$, $\alpha_i \in \mathbb{T}(\pi)$.

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur la profondeur du réseau π . L'idée principale est d'échanger les différentes étapes de la réduction et de regrouper toutes les étapes qui entrent dans une boîte. Ceci est possible grâce au Fait (F3) page 232. Ensuite, grâce au Lemme V.12 page 240 de séparation, nous nous ramenons à un état initial pour chaque boîte. Nous pouvons alors appliquer l'hypothèse de récurrence.

Supposons que la réduction mène à $(\alpha, \mathcal{L}, A)$ avec $(\alpha, \mathcal{L}) \equiv \pi$.

Comme pour la démonstration de la complétude, nous faisons une étude de cas selon le nombre de boîtes de π . Commençons par remarquer que $(\alpha, \mathcal{L}) \equiv \pi$ implique que $\alpha = l(\pi)$ (voir la Définition V.13 page 225).

Cas i : (Aucune boîte). Si π n'a pas de boîte, alors $l(\pi) = \pi$, $\alpha = \pi$ et $\mathbb{T}(\pi) = \{\alpha\}$. En particulier, α n'a pas de co-déréliction. Comme $(\text{Init}(\alpha_i, 1_i)_{i \leq n}, \mathcal{L}_A, \{A\}) \xrightarrow{\text{mrg}^*} (\alpha, \mathcal{L}, A)$, nous déduisons qu'aucun des α_i n'a de co-déréliction. La Proposition V.9 page 236 permet de conclure.

Cas ii : (Une seule boîte). Supposons que π soit réduit à une boîte notée b dont ρ est le contenu. Soit p le port de ρ qui est relié au port principal de la boîte. Alors $l(\pi) = \pi[\text{cod}(p, \rho)/b]$. Comme $\pi \equiv (\alpha, \mathcal{L})$ est un réseau étiqueté, $\alpha = \text{cod}(p, l(\rho))$, c'est-à-dire $l(\rho) = \text{cont}(\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{L}(b)) = \{c \in \alpha \mid \mathcal{L}(b) \sqsubseteq_{\alpha, \mathcal{L}} \mathcal{L}(c)\} \setminus \{b\}$ et $\rho \equiv (l(\rho), \mathcal{L}|_{l(\rho)})$ où $\mathcal{L}(b)$ est l'étiquette de la co-déréliction associée à b dans α . Dans la suite, nous notons $B = \mathcal{L}(b)$ et $\mathcal{B} = \mathcal{L}(l(\rho)) \cup \{B\}$.

Comme la seule cellule de α étiquetée par A est $\perp$, R ne l'utilise pas. De plus, B est le minimum de $\mathcal{B}$, on peut donc appliquer le Fait (F3) page 232 de report et décomposer R en deux réductions : une, notée R_B , n'est faite que d'étapes de réduction déposant l'étiquette B et l'autre R' , n'utilisant pas B pour étiqueter.

$$(\text{Init}(\alpha_i, 1_i)_{i \leq n}, \mathcal{L}_A, \{A\}) \xrightarrow[R_B]{!p?p^*} (\alpha', \mathcal{L}', \{A, B\}) \xrightarrow[R']{\text{mrg}^*} (\alpha, \mathcal{L}, A). \quad (\text{V.7})$$

Remarquons que R_B commence forcément par $!p$ (voir la Figure V.12 page 231) qui crée la boîte d'adresse B ou entre dans une boîte par cette adresse. Cela implique l'existence des entiers $0 \leq j \leq n$ et $(k_i)_{i \leq j}$ tels que $B = \{\mathfrak{m}_i^l = 1_i \cup \{x_i^l\} ; i \leq j, l \leq k_i\} \cup \{\mathfrak{m}_i = 1_i \cup \{y\} ; j < i \leq n\}$, où y est un élément de X qui n'apparaît pas dans A et $\{x_i^l\}_{i \leq j, l \leq k_i}$ est une famille d'éléments de X deux-à-deux distincts qui n'apparaissent pas dans $A \cup \{y\}$.

Puisque $\downarrow \text{Init}(\alpha_i, l_i)_{i \leq n}$ n'a pas de cellule (sauf $\perp$), nous déduisons de la forme de R_B que le $R(\text{DiLL}) \downarrow \alpha'$ n'est fait que d'une co-déréliction étiquetée par B , et les compteurs de $\uparrow \alpha'$ sont aussi étiquetés par B . Donc d'un côté part de R' , nous avons $\alpha' = \text{cod}(p, \uparrow \alpha')$ et de l'autre côté

de R' nous avons $\alpha = \text{cod}(p, l(\rho))$ où nous avons identifié les ports du redex et du réduit. De plus $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \{A\}$, $\mathcal{L}'(\alpha') \subseteq \{B\}$ et $\mathcal{L}(l(\rho)) \subseteq \mathcal{B}$, d'où le Fait (FV.4) page 229 implique que $(\uparrow\alpha', \mathcal{L}', \{B\}) \xrightarrow[R'']{\text{mrg}^*} (l(\rho), \mathcal{L}'|_{l(\rho)}, \mathcal{B})$. Remarquons que de part et d'autre, nous avons des réseaux de fusion car nous avons restreint l'ensemble des adresses au co-domaine de l'étiquetage (voir la Définition V.20 page 233).

Puisque R'' est un succès et n'entre pas dans la boîte d'adresse B, nous pouvons utiliser le Lemme V.12 page 240 de séparation et décomposer $\uparrow\alpha'$ en une famille $(\gamma_{i,l})_{i \leq j, l \leq k_i}$ de $R(\text{DiLL})$ tels que $\uparrow\alpha' = \text{Init}_{B_w}(\gamma_{i,l}, m_{i,l})_{i \leq j, l \leq k_i}$. Nous pouvons enfin appliquer l'hypothèse de récurrence à $(\text{Init}_{B_w}(\gamma_{i,l}, m_{i,l})_{i \leq j, l \leq k_i}, \mathcal{L}_B, \{B\}) \xrightarrow{\text{mrg}^*} (l(\rho), \mathcal{L}'|_{l(\rho)}, \mathcal{B})$ et nous obtenons $\forall i \leq n, l \leq k_i, \gamma_{i,l} \in \mathbb{T}(\rho)$.

Comme $\alpha' = \text{cod}(p, \text{Init}_{B_w}(\gamma_{i,l}, m_{i,l})_{i \leq j, l \leq k_i})$ et étant donnée la forme de R_B , nous avons $\forall i \leq n, \alpha_i = \prod_{l=1}^{k_i} \text{cod}(p, \gamma_{i,l})$. En appliquant la définition du développement de Taylor, nous pouvons conclure que $\alpha_i \in \mathbb{T}(\pi)$.

Cas iii : (Autres cas). Supposons qu'à la profondeur 0, π possède $s \geq 1$ boîtes $(b_r)_{r \leq s}$ dont les contenus respectifs sont $(\rho_r)_{r \leq s}$. Pour chaque $r \leq s$, soit p_r le port de ρ_r relié au port principal de la boîte b_r , alors $\alpha = l(\pi) = \pi[\text{cod}(p_r, l(\rho_r))/b_r]_{r \leq s}$. Comme $\pi \equiv (\alpha, \mathcal{L})$ est un réseau étiqueté, pour tout $r \leq s$, $l(\rho_r) = \text{cont}(\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{L}(b_r)) = \{c \in \alpha \mid \mathcal{L}(b_r) \sqsubseteq_{\alpha, \mathcal{L}} \mathcal{L}(c)\} \setminus \{b_r\}$ et $\rho_r \equiv (l(\rho_r), \mathcal{L}|_{l(\rho_r)})$ où $\mathcal{L}(b_r)$ est l'étiquette de la co-déréliction associée à b_r dans α . Dans la suite, nous notons $B_r = \mathcal{L}(b_r)$ et $\mathcal{B}_r = \mathcal{L}(l(\rho_r)) \cup \{B_r\}$. Remarquons que $\mathcal{A} = \uplus_{r \leq s} \mathcal{B}_r \cup \{A\}$. De plus, les boîtes sont deux à deux disjointes d'où $\mathcal{B}_r$ et $\mathcal{B}_{r'}$ sont aussi disjointes.

Considérons à présent la réduction R définie par (V.6). Remarquons que le long de la réduction, la taille de l'ensemble des adresses augmente, on en déduit que A apparaît dans l'ensemble des adresses de chacun des réseaux de fusion de la réduction R . Nous pouvons appliquer plusieurs fois le Fait (F3) page 232 de report et anticiper les étapes qui utilisent A. On transforme ainsi R en

$$(\text{Init}(\alpha_i, 1_i)_{i \leq n}, \mathcal{L}_A, \{A\}) \xrightarrow[R']{\text{lnr}^*} (\alpha', \mathcal{L}_A, \{A\}) \xrightarrow[R'']{\text{mrg}^*} (\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A}),$$

où R' est faite des étapes linéaires de réduction R qui utilisent l'adresse A, alors que R'' est faite des étapes de R qui introduisent des nouvelles adresses dans $\uplus_{r=1}^s \mathcal{B}_r$. Comme R'' n'a pas d'étape qui utilise A, alors $\downarrow\alpha'$ est le sous-réseau de α fait des cellules de α dont les étiquettes sont A, i.e. $\alpha' = \pi[\gamma_r/b_r]_{r \leq s}$, pour des $R(\text{DiLL})$ γ_r dont les conclusions sont les ports auxiliaires des compteurs. De plus, R' est linéaire. Grâce au Fait (F4) page 232, chaque $\gamma_r = \text{Init}(\gamma_{i,r}, 1_i)_{i \leq n}$ pour des $R(\text{DiLL})$ $\gamma_{i,r}$. Finalement, par le Lemme V.8 page 235, $\forall i \leq n, \alpha_i = \pi[\gamma_{i,r}/b_r]_{r \leq s}$.

Soit $r \leq s$. Nous allons maintenant montrer que $\gamma_{i,r} \in \mathbb{T}(b_r)$ pour tout $i \leq s$. Remarquons que chaque étape de R'' qui utilise l'adresse B dans $\mathcal{B}_r$ peut être anticipée avant toutes les étapes qui introduisent une adresse B' dans $\mathcal{B}_{r'}$, pour $r' \neq r$. En effet, aucune de ces réductions ne peut introduire B (sinon, on aurait $B = B' \in \mathcal{B}_{r'}$) et le réduit ne peut avoir un redex du premier (sinon $B' \sqsubseteq B$, ce qui impliquerait $B \in \mathcal{B}_{r'}$). Nous pouvons donc appliquer le Fait (F3) page 232 et transformer R'' dans R_r'' qui utilise $\mathcal{B}_r$ et R_r''' qui n'utilisent aucune des adresses dans $\mathcal{B}_r$.

$$(\pi[\text{Init}(\gamma_{i,r}, 1_i)_{i \leq n}/b_r]_{r \leq s}, \mathcal{L}_A, \{A\}) \xrightarrow[R_r'']{\text{mrg}^*} (\alpha_r, \mathcal{L}_r, \{A\} \uplus \mathcal{B}_r) \xrightarrow[R_r''']{\text{mrg}^*} (\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A}),$$

avec $\alpha_r = \pi[l(b_r)/b_r][\text{Init}(\gamma_{i,r'}, \mathbb{1}_i)_{i \leq n/b_r'}]_{r' \leq s, r' \neq r}$. Étant donnée la Définition V.18 page 229, R_r'' est la réduction $(\text{Init}(\gamma_{i,r}, \mathbb{1}_i)_{i \leq n}, \mathcal{L}_B, \{B_r\}) \xrightarrow{\text{mrg}^*} (l(b_r), \mathcal{L}_r, \mathcal{B}_r)$ dans un contexte. Nous pouvons, à présent, appliquer le deuxième cas de notre étude à $\pi = b_r : \forall i \leq n, \gamma_{i,r} \in \mathbb{T}(!\rho_r)$.

Nous avons montré que pour chaque $r \leq s$, pour chaque $i \leq n$, $\gamma_{i,r} \in \mathbb{T}(!\rho)$. Rappelons que pour tout $i \leq n$, $\alpha_i = \pi[\gamma_{i,r}/b_r]_{r \leq s}$. Finalement, par définition du développement de Taylor (voir sa Définition V.8 page 217), $\forall i \leq n, \alpha_i \in \mathbb{T}(\pi)$.

□

Étude de la complexité.

Proposition V.13. *Le nombre d'étapes de réduction d'un chemin de réduction $\xrightarrow{\text{mrg}^*}$ qui part d'un réseau de fusion $(\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A})$ admet une borne polynomiale en le nombre de ports dans α .*

Démonstration. Étant donné un compteur t ,

$$\begin{aligned} \text{width}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} 1 + (\#\{p \text{ port} ; p \in \alpha \setminus t \text{ et } p >_\alpha t\})^2, \\ \text{depth}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \# \left\{ b \text{ co-déréliction} ; b \in \downarrow \alpha \text{ et } \mathcal{L}(t) \not\subseteq \bigcup \mathcal{A} \right\}, \end{aligned}$$

Si $|t| \stackrel{\text{def}}{=} \text{width}(t) + \text{depth}(t)$ et $|(\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A})| = \sum_{t \in \alpha} |t|$, on vérifie facilement que $|(\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A})|$ diminue pour chacune des étapes de réduction élémentaires. Le carré est nécessaire pour l'étape $\xrightarrow{\text{contr}}$ et depth pour l'étape $\xrightarrow{?p}$. □

On peut déduire de la Proposition V.13 page 243 le corollaire suivant.

Corollaire V.5. *La longueur d'un chemin de réduction partant d'un réseau de fusion $(\alpha, \mathcal{L}, \mathcal{A})$ est polynomial en le nombre de ports dans α .*

Les étapes élémentaires décrites sur les Figures V.12 page 231 sont locales. De plus, le nombre de ports auxiliaires de chaque compteur est borné par le nombre de ports du réseau de départ, noté n . Les étapes de réductions peuvent être implémentées sur une machine de Turing en temps borné par n .

Théorème V.6. *Le problème : «Étant donné un ensemble fini de réseaux différentiels, proviennent ils du développement de Taylor d'un même réseau de la logique linéaire ? » est dans NP.*

Démonstration. En effet, l'algorithme de fusion résout ce problème d'après les théorèmes V.3 page 237 et V.4 page 241. De plus l'algorithme de fusion peut être implémenté sur une machine de Turing non-déterministe. Le corollaire V.5 et les remarques qui le suivent montrent que les branches de l'arbre d'exécution de cette machine de Turing sont de longueur polynomiale en la taille de l'entrée (l'ensemble fini de réseaux différentiels). □

V.4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes consacrés à l'étude du développement de Taylor sans se préoccuper des coefficients.

Le développement de Taylor permet de traduire tout réseau de preuve de la logique linéaire en un ensemble de réseaux de preuve différentiels :

$$R(\text{LL}) \xrightarrow{\mathbb{T}} \mathcal{P}(R(\text{DiLL}))$$

Nous avons présenté un algorithme de fusion non-déterministe qui réalise une version faible de l'inverse du développement de Taylor. L'algorithme est présenté par un système de réécriture $\xrightarrow{\text{mrg}}$ fortement normalisant, une forme normale étant ou bien un cul-de-sac, ou bien un réseau de la logique linéaire.

On peut parler d'inverse puisque

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \xrightarrow{\text{mrg}^*} \pi' \ll \pi \iff \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq \mathbb{T}(\pi).$$

Mais c'est une version faible de l'inverse puisque nous ne considérons pas les ensembles quelconques de réseaux différentiels, mais nous nous restreignons aux ensembles finis.

Pourquoi se restreindre aux parties finies ? C'est parce que le développement de Taylor contient de l'information redondante provenant de la duplication du contenu des boîtes.

Ceci peut se traduire par une première conjecture. Nous pensons que pour qu'une somme formelle de réseaux soit uniforme, il suffit de vérifier l'uniformité de toutes ses sommes partielles finies.

Conjecture 1. *Soit $\{\alpha_i ; i \in I\}$ un ensemble dénombrable de $R(\text{DiLL})$. Il existe un réseau π de la logique linéaire tel que $\{\alpha_i ; i \in I\} \subseteq \mathbb{T}(\pi)$ si et seulement si pour toute partie finie J de I , il existe un réseau π_J de la logique linéaire tel que $\{\alpha_j ; j \in J\} \subseteq \mathbb{T}(\pi_J)$.*

Rappelons qu'un ensemble de $R(\text{DiLL})$ est *uniforme* lorsque ses éléments proviennent tous du développement de Taylor d'un même $R(\text{LL})$ (voir la Définition V.9 page 219). Ainsi, cette conjecture permet de ramener l'uniformité d'un ensemble de réseaux différentiels à l'uniformité de ses parties finies. Notre algorithme permet alors de déterminer si un ensemble fini de réseaux différentiels est uniforme. Il suffit de trouver un chemin de réécriture qui ne termine pas sur un cul-de-sac.

Dans le λ -calcul, l'uniformité est caractérisée par une relation de cohérence binaire (voir la Proposition III.50 page 108 et [ER03]). Autrement dit, pour savoir si un ensemble de termes avec ressource provient du développement de Taylor d'un λ -terme, il suffit de tester cette propriété pour tous les couples.

Dans DiLL, la situation est un peu différente. L'uniformité est une relation au moins hyper-cohérente et peut-être infinitaire. Elle n'est ni binaire, ni n -aire. On peut trouver des exemples de $R(\text{DiLL})$ qui ne sont pas uniformes dans leur ensemble mais qui sont uniformes deux à deux (voir l'Exemple V.9 ci-dessous).

Exemple V.9. Considérons les trois $R(\text{DiLL})$ suivants avec les interfaces $!1, !1, !1, ?\perp, ?\perp, ?\perp$.

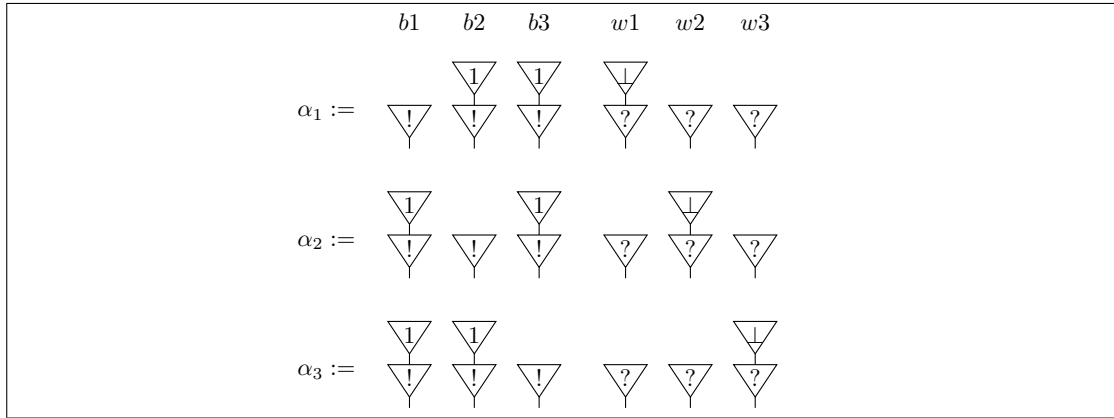
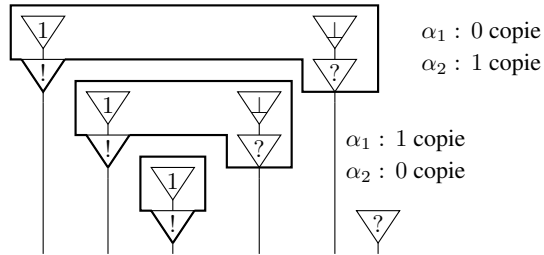


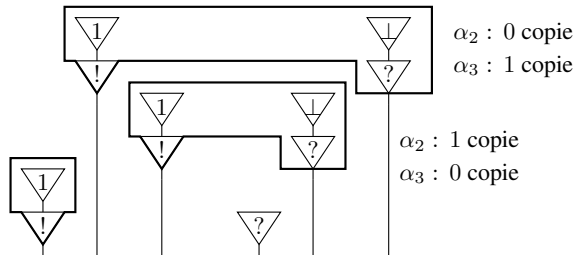
FIG. V.13: Un ensemble non-uniforme de réseaux différentiels deux à deux uniformes

Les co-dérélictions/co-affaiblissements sont nommés respectivement $b1, b2, b3$ et les trois déréllections/affaiblissements sont nommés respectivement $w1, w2, w3$. Nous fusionnons les (co-)affaiblissement, (co-)contraction et (co-)déréllection en une unique cellule ? (resp. !).

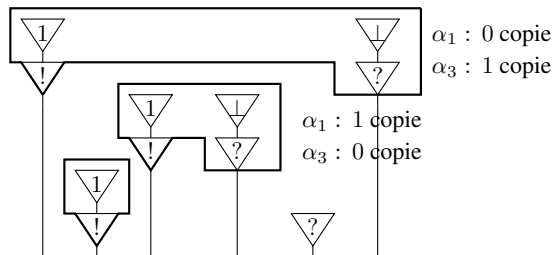
Chacun des couples de $R(DILL)$ parmi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ est *uniforme*. En effet, α_1, α_2 est contenu dans le développement de Taylor du $R(LL)$



α_2, α_3 est contenu dans le développement de Taylor du $R(LL)$



α_1, α_3 est contenu dans le développement de Taylor du $R(LL)$



Cependant, il n'existe pas de $R(LL)$ dont le développement de Taylor contienne les trois $R(DiLL)$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. En effet, supposons qu'il en existe un noté π . Alors, comme $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{T}(\pi)$, l'affaiblissement $w2$ est un port auxiliaire de $b1$; mais comme $\alpha_3 \in \mathbb{T}(\pi)$, l'affaiblissement $w2$ devrait être une déréluction dans α_3 . Nous pouvons donc conclure qu'un tel $R(LL)$ n'existe pas.

Remarquons que l'on aurait aussi bien pu présenter une version n -aire de ce contre-exemple, qui aurait démontré que l'uniformité n'est pas une relation n -aire (pour $n \geq 3$).

On aurait aussi pu présenter un contre-exemple qui n'utilise ni le (Mix) ni les unités. Il suffit pour cela de remplacer les unités par un réseau formé d'une cellule $\mathfrak{A}$ dont les ports auxiliaires sont reliés par un axiome et d'ajouter un arbre de tenseurs en bas du réseau.

Une deuxième conjecture permet de justifier la restriction à des ensembles finis de réseaux différentiels pour étudier le développement de Taylor. Nous pensons que tout le développement de Taylor n'est pas nécessaire pour reconstruire exactement le réseau dont on est parti. Nous pensons que tout réseau de la logique linéaire est entièrement codé par une partie finie de son développement de Taylor.

Conjecture 2. *Soit π un réseau de la logique linéaire. Il existe une partie finie $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ du développement de Taylor de π telle que*

$$\left[\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \xrightarrow{\text{mrg}^*} \pi' \right] \Rightarrow \pi' = \pi.$$

Cette conjecture ouvre la voie vers l'injectivité de la sémantique relationnelle : pour tous réseaux de preuve π et π' β/η -différents, $\llbracket \pi \rrbracket_{\text{Rel}} \neq \llbracket \pi' \rrbracket_{\text{Rel}}$. C'est un problème soulevé par Tortora De Falco [Tdf03] encore ouvert à ce jour.

Cette question se ramène à l'injectivité du développement de Taylor. En effet, comme l'ont montré d'une part De Carvalho et d'autre part Pagani et Mazza [MP07], pour tous réseaux de preuve π et π' , on a

$$\mathbb{T}(\pi) \neq \mathbb{T}(\pi') \iff \llbracket \pi \rrbracket_{\text{Rel}} \neq \llbracket \pi' \rrbracket_{\text{Rel}}.$$

La Conjecture 2 implique l'injectivité du développement de Taylor. En effet, supposons que $\pi \neq \pi'$. Soient $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq \mathbb{T}(\pi)$ des réseaux différentiels caractérisant π dans la conjecture. Supposons qu'il existe $\pi_0 \ll \pi'$ tel que $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \xrightarrow{\text{mrg}^*} \pi_0$ alors $\pi_0 = \pi$ (car les α_i caractérisent π). On en déduit que $\pi \ll \pi'$. Or π et π' sont des réseaux de la logique linéaire, donc $\pi \ll \pi' \Rightarrow \pi = \pi'$ (voir la Définition V.10 page 220 de l'ordre d'information). On aboutit à une contradiction et on en déduit que pour tout $\pi_0 \ll \pi'$, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ne mène pas à π_0 . Par le Théorème V.3 page 237 de complétude, il existe donc $i \leq n$ tel que $\alpha_i \notin \mathbb{T}(\pi')$. On a donc montré que $\mathbb{T}(\pi) \neq \mathbb{T}(\pi')$.

Nous avons donc ramené le problème de l'injectivité de **Rel** à un problème exprimé en termes de confluence dans un système de réécriture.

PERSPECTIVES

En conclusion, nous présentons quelques questions soulevées par notre travail ainsi que quelques axes de recherche.

Sémantique de Lefschetz de la logique linéaire. Nous avons décrit les constructions de la logique linéaire dans les espaces de Lefschetz. Nous avons également proposé une classe d'espaces, les espaces de Lefschetz linéairement bornologiques et complets, qui est stable par la négation et par les constructions additives de la logique linéaire. La suite naturelle est de montrer que cette famille est stable par les constructions multiplicatives et exponentielles.

Par ailleurs, les espaces de Lefschetz présentent un cadre topologique plus simple que les espaces localement convexes. Une fois les constructions de la logique linéaire comprises, on pourra essayer de les transporter au cadre des espaces topologico-bornologiques et localement convexes. Ce travail entamé avec Blute, Ehrhard et Scott pourra prendre appui sur la théorie de la différentiation de Frölicher et Kriegl [FK88].

Caractérisation de l'exponentielle libre. Dans les espaces de finitude, l'exponentielle est libre. Pourtant, les formules existant pour la calculer ne sont pas adaptées à ce cadre. Dans les espaces de Lefschetz finitaires, ce phénomène se traduit de la manière suivante : l'exponentielle correspond à l'espace des séries formelles muni de la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts alors que la formule de Melliès et Tabareau calcule l'espace des polynômes muni de la topologie co-produit. La première chose à vérifier est que l'exponentielle des espaces de Lefschetz finitaires est libre. Ensuite, on pourra chercher une formule généralisant celle de Melliès et Tabareau et englobant le cas des espaces de finitude et des espaces de Lefschetz finitaires. Enfin, il faudra comprendre quel est le rôle joué par l'opérateur de différentiation.

Complétude dénotationnelle du raffinement total des espaces de finitude. La sémantique totale n'est pas complète en général. Le type $\mathcal{B}^n \Rightarrow \mathcal{B}$ semble donc être une exception.

Du défaut de complétude, on peut conclure à l'existence de termes totaux construits à partir de termes non totaux. Afin d'obtenir la complétude tout en laissant la sémantique inchangée, il faudra donc ajouter des constructions élémentaires non totales et donner une propriété caractérisant la totalité des termes construits à partir de celles-ci. On peut penser notamment aux termes obtenus grâce à l'opérateur de différentiation. En effet, la formule de Taylor permet de construire des fonctions totales à partir des dérivées de ces fonctions.

Par ailleurs, on pourra se demander si la sémantique totale caractérise les termes algébriques qui sont barycentriques. Autrement dit, soit $\sum_{i \leq n} a_i s_i$ un terme barycentrique de type A . Supposons que sa sémantique soit dans la totalité de A . Peut-on en déduire que le terme est barycentrique, autrement dit que $\sum_{i \leq n} a_i = 1$?

Logique de la formule de Taylor. Savoir caractériser la relation d'uniformité des réseaux différentiels issus du développement de Taylor de réseaux de la logique linéaire est un problème difficile. C'est pourquoi l'algorithme que nous avons proposé est dans la classe NP. La principale source de complexité est la reconstruction des boîtes. En effet, le développement de Taylor efface toute trace des boîtes de la logique linéaire. Au contraire, dans le cadre du λ -calcul, la relation d'uniformité est très simple à définir car les boîtes sont faciles à reconstruire. Ainsi, sur les réseaux issus du λ -calcul, une grande partie du non-déterminisme de l'algorithme disparaît car l'emboîtement est déjà connu.

Remarquons par ailleurs que l'algorithme de fusion que nous avons introduit ne reconstruit pas directement les boîtes mais plutôt un ordre entre les cellules qui est défini par rapport à un étiquetage. Cette façon de procéder semble équivalente à ajouter des sauts à la structure des réseaux. Il sera donc intéressant d'ajouter de tels sauts aux réseaux différentiels. Ceci nous permettra de reconstruire tout ou une partie des boîtes. Un réseau uniforme sera alors un réseau sur lequel on peut ajouter des sauts corrects. Il sera alors possible de délimiter une classe de réseaux dont on comprendra mieux la logique.

Formule de Taylor syntaxique et réduction. Dans le cadre du λ -calcul, Ehrhard et Regnier [ER08] ont montré que la formule de Taylor et la β -réduction commutent. L'algorithme de fusion que nous avons présenté ne concerne que les réseaux sans coupure.

Il serait naturel de dynamiser notre étude en l'adaptant aux réseaux avec coupure. Plusieurs questions se posent alors. Est-ce que l'uniformité des réseaux différentiels est stable par réduction ? Vis-à-vis de quelle réduction ? (Il est probable que l'uniformité ne soit stable que par une réduction à grands pas qui reste à définir.)

Par ailleurs, afin d'obtenir un théorème similaire à celui de Ehrhard et Regnier, il faudra étudier les coefficients du développement de Taylor. Rappelons que notre étude s'est limitée au support du développement. Il faudra notamment associer à tout réseau uniforme un coefficient et étudier son comportement face à la réduction.

Injectivité du modèle relationnel. Nous avons vu que notre algorithme de fusion était lié au modèle relationnel. En effet, si tout réseau de la logique linéaire peut-être caractérisé par un ensemble fini de réseaux différentiels apparaissant dans sa formule de Taylor syntaxique, alors nous pourrions en déduire l'injectivité du modèle relationnel. Il sera intéressant d'explicitier les liens qu'entretiennent les étiquetages que notre algorithme construit et les expériences du modèle relationnel. Nous pourrions alors mieux comprendre ce que notre approche apporte au problème de l'injectivité.

BIBLIOGRAPHIE

- [AC98] Roberto AMADIO et Pierre-Louis CURIEN : *Domains and Lambda Calculi*. Cambridge tracts in theoretical computer science. Cambridge University Press, juillet 1998.
- [AJ92] Samson ABRAMSKY et Radha JAGADEESAN : Games and Full Completeness for Multiplicative Linear Logic (Extended Abstract). *In Proceedings of the 12th Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science*, pages 291–301. Springer, 1992.
- [AM99] Samson ABRAMSKY et Guy MCCUSKER : Game semantics. *In Computational logic*, volume 30, pages 88–221. Springer Verlag, 1999.
- [Bar76] Michael BARR : Duality of vector spaces. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, 17(1):3–14, 1976.
- [Bar79] Michael BARR : $*$ -autonomous categories. *Lecture Notes in Mathematics*, (752), 1979.
- [Bar84] Henk BARENDREGT : *The lambda calculus, its syntax and semantics*. Numéro 103 de Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland, second édition, 1984.
- [Bar91] Michael BARR : $*$ -autonomous categories and linear logic. *Math. Struct. in Comput. Sci.*, 1(2):159–178, 1991.
- [BBPH92] Nick BENTON, Gavin BIERMAN, Valeria PAIVA et Martin HYLAND : Term assignment for intuitionistic linear logic. *In Proceedings of the International Conference on Typed Lambda Calculi and Applications, 1992, Springer Lecture Notes in Computer Science 664*, 1992.
- [BCS06] Richard BLUTE, Robin COCKETT et Robert SEELY : Differential categories. *Mathematical structures in computer science*, 16(06):1049–1083, 2006.
- [Bec69] Jon BECK : Distributive laws. *In Seminar on Triples and Categorical Homology Theory*, volume 80, pages 119–130, 1969.
- [Ben95] Nick BENTON : A mixed linear and non-linear logic : Proofs, terms and models (extended abstract). *In CSL '94 : Selected Papers from the 8th International Workshop on Computer Science Logic*, pages 121–135, London, UK, 1995. Springer-Verlag.
- [Bie95] Gavin BIERMAN : What is a categorical model of intuitionistic linear logic ? *Lecture Notes in Computer Science*, 902:78–93, 1995.

-
- [Bir67] Garrett BIRKHOFF : *Lattice theory*. American Mathematical Society, 1967.
 - [Bom67] Jan BOMAN : Differentiability of a function and of its compositions with functions of one variable. *Mathematica Scandinavica*, 20(249-268):39–44, 1967.
 - [Bou56] Nicolas BOURBAKI : *Espaces vectoriels topologiques*, volume 3. 1956.
 - [Bou93] Gérard BOUDOL : The lambda-calculus with multiplicities. Technical Report 2025, INRIA Sophia-Antipolis, 1993.
 - [BS96] Richard BLUTE et Philip SCOTT : Linear Lauchli semantics. *APAL*, 77(2):101–142, 1996.
 - [Dan90] Vincent DANOS : *La logique linéaire appliquée à l'étude de divers processus de normalisation (principalement du λ -calcul)*. Thèse de doctorat, Université Paris VII, 1990.
 - [DB87] Nicolaas Govert DE BRUIJN : Generalizing Automath by means of a lambda-typed lambda calculus. *Mathematical Logic and Theoretical Computer Science*, 106:71–92, 1987.
 - [dC07] Daniel de CARVALHO : *Sémantiques de la logique linéaire et temps de calcul*. Thèse de doctorat, Université Paris VII, 2007.
 - [DF09] Marc DE FALCO : *a remplir*. Thèse de doctorat, Annals of Mathematics, 2009.
 - [DP95] Ugo DE' LIGUORO et Adolfo PIPERNO : Nondeterministic extensions of untyped λ -calculus. *Inf. Comput.*, 122(2):149–177, 1995.
 - [DR89] Vincent DANOS et Laurent REGNIER : The structure of multiplicatives. *Archive for Mathematical Logic*, 1989.
 - [Ehr02] Thomas EHRHARD : On Köthe sequence spaces and linear logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 12(05):579–623, 2002.
 - [Ehr05] Thomas EHRHARD : Finiteness spaces. *Mathematical Structures in Computer Science*, 15(04):615–646, 2005.
 - [Ehr07] Thomas EHRHARD : On finiteness spaces and extensional presheaves over the lawvere theory of polynomials. 2007.
 - [EL08] Thomas EHRHARD et Olivier LAURENT : Interpreting a finitary pi-calculus in differential interaction nets. Submitted journal version, avril 2008.
 - [ER] Thomas EHRHARD et Laurent REGNIER : Böhm Trees, Krivine's Machine and the Taylor Expansion of λ -Terms.
 - [ER03] Thomas EHRHARD et Laurent REGNIER : The differential lambda-calculus. *Theoretical Computer Science*, 309(1-3):1–41, 2003.
 - [ER06] Thomas EHRHARD et Laurent REGNIER : Differential interaction nets. *Theoretical Computer Science*, 364(2):166–195, 2006.
 - [ER08] Thomas EHRHARD et Laurent REGNIER : Uniformity and the Taylor expansion of ordinary lambda-terms. *Theoretical Computer Science*, 403(2-3):347–372, 2008.
 - [ES] Thomas EHRHARD et Thomas STREICHER : An unnatural(?) finiteness space. communication privée.

- [FG64] Hans FISCHER et Herbert GROSS : Quadratic forms and linear topologies, I. *Mathematische Annalen*, 157(4):296–325, 1964.
- [FG65] Hans FISCHER et Herbert GROSS : Tensorprodukte linearer Topologien (Quadratische Formen und lineare Topologien, III). *Mathematische Annalen*, 160(1):1–40, 1965.
- [FGHW08] Marcelo FIORE, Nicolas GAMBINO, Martin HYLAND et Glynn WINSKEL : The cartesian closed bicategory of generalised species of structures. *London Mathematical Society Lecture Note Series*, 77(1):203, 2008.
- [Fio04] Marcelo FIORE : Generalised species of structures : Cartesian closed and differential structure, 2004.
- [Fio05] Marcelo FIORE : Mathematical models of computational and combinatorial structures. *Invited address, FOSSACS*, 5, 2005.
- [Fio07] Marcelo FIORE : Differential structure in models of multiplicative biadditive intuitionistic linear logic. *Lecture Notes in Computer Science*, 4583:163, 2007.
- [FK88] Alfred FROLICHER et Andreas KRIEGL : Linear spaces and differentiation theory. *New York*, 1988.
- [GF65] Herbert GROSS et Hans FISCHER : Non real field and infinite dimensional k-vectorspaces (quadratic forms and linear topologies, II). *Mathematische Annalen*, 159(4):285–308, 1965.
- [Gir86] Jean-Yves GIRARD : The system F of variable types, fifteen years later. *Theoretical Computer Science*, 45:159–192, 1986.
- [Gir87] Jean-Yves GIRARD : Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 50:1–102, 1987.
- [Gir88] Jean-Yves GIRARD : Normal functors, power series and λ -calculus. *Annals of Pure and Applied logic*, 37:129–177, 1988.
- [Gir96] Jean-Yves GIRARD : Coherent banach spaces : a continuous denotational semantics. 1996.
- [Gir01] Jean-Yves GIRARD : Locus solum : From the rules of logic to the logic of rules. *Mathematical Structures in Computer Science*, 11(3):301–506, juin 2001.
- [Gir06] Jean-Yves GIRARD : *Le point aveugle, tome 1 : vers la perfection*. 2006.
- [Gir07] Jean-Yves GIRARD : *Le point aveugle, tome 2 : vers l'imperfection*. 2007.
- [GM96] Stephano GUERRINI et Andrea MASINI : Parsing mell proof nets. *Ircs report* 96-37, 1996.
- [Gro50] Alexandre GROTHENDIECK : Sur la completion du dual d'un espace vectoriel localement convexe. *CR Acad. Sci. Paris*, 230:605–606, 1950.
- [Gro55] Alexandre GROTHENDIECK : Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, volume 16. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1955.
- [Gro71] Herbert GROSS : Linearly topologized spaces without continuous bases. *Mathematische Annalen*, 194(4):313–315, 1971.

-
- [GSS92] Jean-Yves GIRARD, Andre SCEDROV et Philip SCOTT : Bounded linear logic. *Theoretical computer science*, 97(1):1–66, 1992.
 - [Gue99] Stefano GUERRINI : Correctness of multiplicative proof nets is linear. *In Proceedings of the fourteenth annual symposium on Logic In Computer Science*, pages 454–463, Trento, juillet 1999. IEEE, IEEE Computer Society Press.
 - [Has99] Masahito HASEGAWA : Categorical glueing and logical predicates for models of linear logic. 1999.
 - [Has02] Ryu HASEGAWA : Two applications of analytic functors. *Theoretical Computer Science*, 272(1-2):113–175, 2002.
 - [HN77] Henri HOGBE-NLEND : *Bornologies and functional analysis : introductory course on the theory of duality topology-bornology and its use in functional analysis*. North Holland, 1977.
 - [HO00] Martin HYLAND et Luke ONG : On full abstraction for PCF. *Information and Computation*, 163(2):285–408, décembre 2000.
 - [How80] William Alvin HOWARD : The formulae-as-types notion of construction. *To HB Curry : essays on combinatory logic, lambda calculus and formalism*, pages 479–490, 1980.
 - [HS03] Martin HYLAND et Andrea SCHALK : Glueing and orthogonality for models of linear logic. *Theoretical Computer Science*, 294(1-2):183–231, 2003.
 - [Hyv08a] Pierre HYVERNAT : A completeness theorem for "total boolean functions". unpublished note (hal-00387612), July 2008.
 - [Hyv08b] Pierre HYVERNAT : Finiteness spaces, graphs and "coherence". unpublished note (hal-00387650), April 2008.
 - [Jar81] Hans JARCHOW : *Locally convex spaces*. Teubner Stuttgart, 1981.
 - [Joy86] André JOYAL : Foncteurs analytiques et espèces de structure. *In Combinatoire Enumérative*, volume 1234 de *Lecture Notes in Mathematics*, pages 126–159. Springer Verlag, 1986.
 - [Köt79] Gottfried KÖTHE : *Topological Vector Spaces*. Springer-Verlag, 1979.
 - [Kri90] Jean-Louis KRIVINE : *Lambda-Calcul : Types et Modèles*. Études et Recherches en Informatique. Masson, 1990.
 - [Laf88] Yves LAFONT : *Logique, catégories et machines*. Thèse de doctorat, Université Paris VII, 1988.
 - [Laf90] Yves LAFONT : Interaction nets. *In POPL '90 : Proceedings*, pages 95–108, New York, NY, USA, 1990. ACM.
 - [Laf95] Yves LAFONT : From proof nets to interaction nets. *In Advances in Linear Logic*, volume 222 de *London Mathematical Society Lecture Note Series*, pages 225–247. Cambridge University Press, 1995.
 - [Lam80] Joachim LAMBEK : From lambda-calculus to cartesian closed categories. *To HB Curry : essays on combinatory logic, lambda calculus and formalism*, pages 375–402, 1980.

- [Lef42] Saunders LEFSCHETZ : *Algebraic topology*. American Mathematical Society, 1942.
- [Loa94] Ralph LOADER : Linear logic, totality and full completeness. *Logic in Computer Science, 1994. LICS'94. Proceedings., Symposium on*, pages 292–298, 1994.
- [LS88] Joachim LAMBEK et Philip SCOTT : *Introduction to higher order categorical logic*. Cambridge Univ Pr, 1988.
- [Mac43] George MACKKEY : On infinite dimensional linear spaces. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 29(7):216–221, 1943.
- [Mat80] Hideyuki MATSUMURA : Commutative algebra. *Mathematics lecture note series*, 56, 1980.
- [Mel08a] Paul-André MELLIÈS : Categorical semantics of linear logic. *Panoramas et Synthèses*, Interactive models of computation and program behaviour, 2008.
- [Mel08b] Paul-André MELLIÈS : Sujet 4 de travaux dirigés sur les modèles de langage de programmation, mpri, 2008. [http ://www.pps.jussieu.fr/~mellies/master.html](http://www.pps.jussieu.fr/~mellies/master.html).
- [Mit90] John MITCHELL : Type systems for programming languages. *Handbook of Theoretical Computer Science : Formal Models and Semantics*, pages 365–458, 1990.
- [MP07] Damiano MAZZA et Michele PAGANI : The separation theorem for differential interaction nets. *In LPAR*, pages 393–407, 2007.
- [MS93] John MITCHELL et Andre SCEDROV : Notes on sconing and relators. *Lecture Notes in Computer Science*, pages 352–352, 1993.
- [MT] Paul-André MELLIÈS et Nicolas TABAREAU : Free models of T-algebraic theories computed as Kan extensions. Submitted to Journal of Pure and Applied Algebra.
- [MTT09] Paul-André MELLIÈS, Nicolas TABAREAU et Christine TASSON : An explicit formula for the free exponential modality of linear logic. *In 36th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP)*. Springer, 2009.
- [PT09] Michele PAGANI et Christine TASSON : The inverse Taylor expansion problem in linear logic. *In Proceedings of the 2009 24th Annual IEEE Symposium on Logic In Computer Science-Volume 00*, pages 222–231. IEEE Computer Society, 2009.
- [Reg92] Laurent REGNIER : *λ -calcul et réseaux*. Thèse de doctorat, Université Paris VII, 1992.
- [See89] Robert SEELY : Linear logic, *-autonomous categories and cofree coalgebras. *Categories in Computer Science and Logic, Contemporary Mathematics*, 92, 1989.
- [Str72] Ross STREET : The formal theory of monads. *JPA*, 2(2):149–168, 1972.
- [Tab08] Nicolas TABAREAU : *Modalités de ressources et contrôle en logique tensorielle*. Ph.D. Thesis, Paris VII, 2008.
- [Tai67] William Walker TAIT : Intensional interpretations of functionals of finite type I. *Journal of Symbolic Logic*, pages 198–212, 1967.
- [Tan97] Audrey TAN : *Full completeness for models of linear logic*. Thèse de doctorat, Cambridge University, 1997.

- [Tas09] Christine TASSON : Algebraic totality, towards completeness. *In Typed Lambda Calculi and Applications : 9th International Conference, TLCA 2009, Brasilia, Brazil, July 1-3, 2009, Proceedings*, page 219. Springer-Verlag New York Inc, 2009.
- [TdF00] Lorenzo Tortora de FALCO : *Réseaux, cohérence et expériences obsessionnelles*. Thèse de doctorat, Université Paris VII, janvier 2000.
- [TdF03] Lorenzo Tortora de FALCO : Obsessional experiments for linear logic proof-nets. *Mathematical Structures in Computer Science*, 13(6):799–855, 2003.
- [Tra08] Paolo TRANQUILLI : Intuitionistic differential nets and lambda-calculus. *Conditionally accepted to Theor. Comput. Sci*, 2008.
- [Tra09] Paolo TRANQUILLI : *Nets between Determinism and Nondeterminism*. Thèse de doctorat, Université Paris VII, 2009.
- [Trè67] François TRÈVES : *Topological vector spaces, distributions and kernels*. Academic Press Inc, 1967.
- [Vau07] Lionel VAUX : *λ -calcul différentiel et logique classique : interactions calculatoires*. Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille II, novembre 2007.
- [Vau09] Lionel VAUX : The algebraic lambda calculus. *Mathematical Structures in Computer Science*, 19(05):1029–1059, 2009.

TABLE DES FIGURES

I.1	Calcul des séquents pour la logique linéaire (LL)	9
I.2	Interprétation dans Set des différentes structures de ILL	14
I.3	Interprétation dans Rel des différentes structures de LL	15
I.4	Interprétation dans LinDF des différentes structures de MALL	16
I.5	Structures de LL héritées par bi-recollement	34
I.6	Interprétation dans une catégorie d'orthogonalité des formules de LL	36
II.1	Interprétation dans RelFin des formules de LL	52
III.1	Résultats sur les linéairement bornologiques complets	129
III.2	Interprétation dans LinFin des formules de LL	164
III.3	Interprétation dans LinFin des preuves de MELL + MIX + SUM	166
IV.1	Interprétation dans TotFin des formules de LL	191
V.1	Calcul des séquents pour la logique linéaire différentielle (DiLL)	204
V.2	Règles de construction des réseaux de la logique linéaire (R(LL))	213
V.3	Règles de construction des réseaux différentiels (R(DiLL))	215
V.4	Co-déréliction et produit de R(DiLL)	217
V.5	Développement de Taylor et linéarisation d'un R(LL)	217
V.6	Exemples de développements de Taylor	218
V.7	Contre-exemple à l'uniformité	219
V.8	Un exemple de réduction réussie	222
V.9	Notations pour les réseaux	227
V.10	Compteur et état initial	228
V.11	Étapes élémentaires de réduction linéaire (l _{nr})	230
V.12	Étapes élémentaires de réduction exponentielle (!p, ?p)	231
V.13	Un ensemble non-uniforme de réseaux différentiels deux à deux uniformes	245

INDEX

- λ -calcul algébrique, 175
- λ -calcul barycentrique, 176
- $\mathcal{Nat}$, 46
- ILL, 10
- IMALL, 10
- IMELL, 10
- LL, 10
- MALL, 10
- MELL, 10
- MLL, 10

- absorber, 27
- absorber linéairement, 115
- adjonction monoïdale, 18
- adresse, 221, 227
- alphabet, 221, 227
- annulateur d'un sous-espace ann, 73
- anti-finitaire, 45
- axiome du choix, 49

- base de Hamel, 79
- base de Schauder, 79
- base topologique, 79
- bi-recollement, double glueing, 33
- boîte vide, 217
- bornivore, 27
- bornologie, 27
- bornologie finitaire, 105
- bornologie linéaire, 103, 104, 110, 119

- câblage (co)-structurel, 211
- candidat de totalité, 188, 189
- carte, espace de Lefschetz finitaire, 75, 180
- catégorie *-autonome, 23
- catégorie bi-recollée, 33
- catégorie d'orthogonalité, 189
- catégorie d'orthogonalité stricte, 35, 190
- catégorie de Lafont, 20
- catégorie de Seely, 18, 182
- catégorie recollée, 24
- cellule, 211
- clos par bi-orthogonalité, 27, 45
- clos par bi-polarité, 188
- co-Kleisli, 18
- compteur, 221, 227
- coproduits, **RelFin**, 53
- critères de correction, 214
- Curry-Howard, 1

- déréliction, 8
- dimension algébrique, 79
- dimension topologique, 79
- direction d'un espace affine, 188
- distribution linéaire, 33

- épimorphisme dans **Rel**, 54
- équivalence logique, 9
- équivalence réseau étiqueté/preuve, 225
- étapes élémentaires de réduction (**ers**), 229
- étiquetage, 223
- espace cohérent, 20
- espace de finitude relationnel, 45
- espace de Köthe, 69
- espace de Lefschetz, 71
- espace de Lefschetz complet, 88, 117
- espace de Lefschetz discret, 79, 117
- espace de Lefschetz engendré, 74
- espace de Lefschetz finitaire, 70, 75, 180
- espace de Lefschetz séquentiel, 127
- espace de totalité, 189

- fait, espace de phase, 29

- famille sommable, 79
- fil, 211
- fil, axiome, 211
- fil, boucle, 211
- fil, coupure, 211
- filtre, 108
- finitaire, 45
- foncteur linéairement distributif, 24
- fonction monomiale, 161
- formule de Taylor syntaxique, 12

- hypocontinue, 141

- interface, 212
- interfaces appariées, 212, 215

- jeton, 221, 227

- linéaire-non-linéaire, 19
- linéairement équicontinu, 103, 120
- linéairement borné, 103, 115
- linéairement bornivore, 131
- linéairement bornologique, 125, 131
- linéairement compact, 103, 108
- loi de distributivité, 24

- masse de Dirac, 162
- modèle catégorique, 12
- modèle dénotationnel, 12
- modèle ensembliste, **Set**, 14
- modèle linéaire, **LinDF**, 16
- modèle relationnel, **Rel**, 14
- monomorphisme dans **Rel**, 54
- multi-ensemble, 15

- noyau d'un sous-espace, $\ker$, 73

- objet dualisant, 23
- opérateur de clôture, 26
- ordre d'information, 209, 220
- orthogonal, 45
- ouvert linéaire, 72

- pôle, 28
- polaire, 187
- polynôme homogène de degré n , 157

- polyréseau, 215
- port, 211
- port auxiliaire, 212
- port libre, 212
- port principal, 212
- produit tensoriel inductif, 135
- produits, **RelFin**, 53
- propriété de séparation, 72

- quotient, 109

- réduction de fusion, 229
- réduit, 229
- réflexif, 123
- réflexivité, 8, 103
- réseau, 88, 108
- réseau étiqueté, 224
- réseau avec compteur, 227
- réseau d'interaction, 211, 213, 214
- réseau d'interaction différentiel, 214
- réseau de Cauchy, 88
- réseau de fusion, 232, 233
- réseau de preuve, 213
- réseau de preuve différentiel, 214
- réseau, état initial, 221, 228, 233
- réseau, boîte, 212
- réseau, cellule de conclusion, 224
- réseau, contenu d'une boîte, 212
- réseau, convergence, 88
- réseau, décomposition canonique, 224
- réseau, développement de Taylor, 217
- réseau, emboîtement, 239
- réseau, linéarisation, 223
- réseau, produit, 216
- réseau, profondeur d'une boîte, 212
- réseau, substitution, 216
- réseau, trame, 227
- recollement, glueing, 13
- redex, 229
- relation d'appariement, 30
- relation d'orthogonalité, 26, 35
- relation d'orthogonalité stable, 35
- relation de cohérence, 20, 29
- relation de polarité, 28

relation finitaire, 45
relation, image, 15
relation, pré-image, 15
relation, trame, 15
relation, transposée, 15

séquentiellement ouvert, 127
série formelle, 161
sous-réseau, 216
structure finitaire, 45
succès, 223, 229
successeur d'une étiquette, 233
support d'une famille, 74
support d'une suite, 180
système fondamental linéaire, 72, 111

topologico-bornologique, 28
topologie, 27
topologie équicontinue, 138
topologie co-produit, 97
topologie de la convergence uniforme, 104
topologie faible, 104
topologie hypoéquicontinue, 145
topologie induite, 95
topologie initiale, 93
topologie produit, 94
topologie terminale, 96
trame, 20, 29, 45
transposée, 34

uniformité, 208, 219, 244, 245

Résumé

SÉMANTIQUES ET SYNTAXES VECTORIELLES DE LA LOGIQUE LINÉAIRE

Avec les espaces de finitude, Ehrhard a exhibé une sémantique de la logique linéaire contenant une opération de différentiation. Dans ce cadre, l'interprétation des formules est décomposable en séries de Taylor. Cette étude a engendré des syntaxes différentielles. Cette thèse de sémantique dénotationnelle prolonge ce travail par une exploration de sémantiques vectorielles de la logique linéaire, et contribue à l'étude sémantique et syntaxique de la formule de Taylor.

La première partie aborde la sémantique. Nous présentons l'interprétation des constructions de la logique linéaire dans les espaces vectoriels munis d'une topologie linéarisée, les espaces de Lefschetz. Nous définissons une notion intrinsèque d'espaces de finitude, les espaces de Lefschetz finitaires. Nous caractérisons les espaces de Lefschetz réflexifs complets à l'aide de bornologies linéaires. Enfin, nous montrons que la décomposition de Taylor reste valide dans ces espaces.

La seconde partie porte sur les syntaxes différentielles. La formule de Taylor syntaxique traduit un terme en une superposition de termes différentiels qui sont autant de possibilités d'exécutions. Comme l'ont montré Ehrhard et Regnier, les termes issus de cette traduction vérifient une relation de cohérence. Nous introduisons une sémantique totale qui capture cette relation. Puis, nous construisons une extension vectorielle du lambda-calcul, le calcul barycentrique, interprété par cette sémantique totale. Enfin, dans le cadre des réseaux différentiels, nous présentons un algorithme non déterministe qui permet de décider si un ensemble fini de réseaux différentiels provient de la traduction d'un réseau de la logique linéaire par la formule de Taylor syntaxique.

Mots clés : Logique linéaire – Espaces de finitude – Topologie linéarisée – Sémantique quantitative – Formule de Taylor syntaxique – λ -calcul algébrique – Réseaux différentiels

Abstract

VECTORIAL SEMANTICS AND SYNTAX OF LINEAR LOGIC

With finiteness spaces, Ehrhard has shown a semantics of linear logic with a differentiation operation. In this framework, the interpretation of formulas can be represented as Taylor series. This has led to the introduction of a differential syntax. This thesis in denotational semantics pursues this work through an exploration of vectorial semantics of linear logic and contributes to the semantic and syntactic study of the Taylor formula.

In the first part, we tackle semantics. We present the interpretation of linear logic constructions in linearised topological vector spaces. We build an intrinsic notion of finiteness spaces, named finitary Lefschetz spaces. We characterise the linearised topological vector spaces which are reflexive and complete thanks to linear bornologies. Last, we show that the Taylor series property of finiteness spaces is still true in the linearised topological vector spaces framework.

The second part is about differential syntax. The syntactic Taylor formula translate terms into a sum of differential terms representing different executions. As shown by Ehrhard and Regnier, the terms that are the target of this translation are coherent. We introduce a total semantics which catch this relation. We build a linear extension of lambda-calculus, named barycentric-calculus, interpreted by the total semantics. Finally, in the differential nets framework, we present a non-deterministic algorithm which decides if a finite set of differential nets comes from a linear logic net through the syntactic Taylor formula.

Keywords : Linear logic – Finiteness spaces – Linearised topology – Quantitative semantics – Syntactic Taylor formula – Algebraic λ -calculus – Differential nets