Logique linéaire et sémantique différentielle
Des espaces de finitude aux espaces de Lefschetz.

Christine Tasson
tasson@pps.jussieu.fr

CHoCo
le jeudi 22 octobre 2009.

Interprétation des multiplicatifs

$$A \multimap B$$

Quelle topologie pour avoir la réflexivité ?

Soient E et F deux espaces de Lefschetz.

$\perp$ et 1

L'espace à une dimension $\Bbbk$.

Flèche linéaire : $E \multimap F$

L'espace des fonctions linéaires continues de E dans F.

Orthogonal : $E' = E \multimap \perp$

Le **dual topologique** de E est l'espace des formes linéaires continues sur E.

Réflexivité : $E \simeq (E \multimap \perp) \multimap \perp$

On dit que E est **réflexif** lorsque l'**évaluation** est un homéomorphisme linéaire.

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{ev}_E : & E & \to & E'' \\ & x & \mapsto & \mathrm{ev}(x) : x' \mapsto \langle x', x \rangle. \end{array}$$

Le cas finitaire

Soient $A = (|A|, \mathcal{F}(A))$ *et* $B = (|B|, \mathcal{F}(B))$ *deux espaces de finitude.*

Tout espace de finitude est réflexif.

L'espace $E_{A^{\perp\perp}}$ est linéairement homéomorphe à E_A.

Quelle topologie sur l'espace des fonctions ?

- Finitaires : $\forall u \in \mathcal{F}(A), \mathcal{K}(u) = \{x \in E_A \; ; \; |x| \subseteq u\}$.
- Ouverts : $\forall v' \in \mathcal{F}(B)^{\perp}, \mathcal{V}(v') = \{x \in E_B \; ; \; |x| \subseteq u\}$.

L'espace de Lefschetz engendré par $A \multimap B$ est linéairement homéomorphe à l'espace $E_A \multimap E_B$ muni de la topologie de la **convergence uniforme** sur les sous-espaces K de support finitaire engendrée par

$$\mathcal{W}(K, V) = \{f \in E \multimap F \; ; \; f(K) \subseteq V\}$$

avec K de support finitaire et V ouvert linéaire.

Quelles propriétés pour la réflexivité ?

Soit E un espace de Lefschetz

Linéairement compacts

Adaptation au cas linéarisé de la propriété des segments emboîtés.

Linéairement bornés

Un sous-espace B est dit linéairement **borné** lorsque son intersection avec un ouvert linéaire U de E est de codimension finie dans B, c'est-à-dire $B/(B \cap U)$ est de dimension finie.

Linéairement équicontinus

Un sous-espace Q de son dual topologique est dit linéairement **équicontinu** lorsque toutes les formes linéaires continues de Q ont le même module de continuité, autrement dit il existe un ouvert linéaire U tel que $Q \subseteq \mathrm{ann}_{E'}(U)$.

Dans les espaces de finitude, les espaces de supports finitaires sont linéairement bornés, linéairement compacts et linéairement équicontinus.

Rôle de ces propriétés dans la réflexivité.

Soit E un espace de Lefschetz.
L'évaluation est **linéaire** et **injective**

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{ev}_E : & E & \to & (E')^* \\ & x & \mapsto & \mathrm{ev}(x) : x' \mapsto \langle x', x \rangle. \end{array}$$

Si le dual est muni de la topologie de la convergence uniforme sur

Linéairement compacts : $\neg_{\mathfrak{C}} E$

alors l'évaluation $\mathrm{ev} : E \to \neg_{\mathfrak{C}} \neg_{\mathfrak{C}} E$ est **surjective** ;

Linéairement bornés : $\neg_{\mathfrak{B}} E$

alors l'évaluation $\mathrm{ev} : E \to \neg_{\mathfrak{B}} \neg_{\mathfrak{B}} E$ est **ouverte** ;

Linéairement équicontinus : $\neg_{\mathfrak{Q}} E'$

alors l'évaluation $\mathrm{ev} : E \to \neg_{\mathfrak{Q}} E'$ est **continue** ;

Le rôle de la complétude

Soit E un espace de Lefschetz.

Définition

Un espace de Lefschetz est dit **complet** lorsque tout réseau de Cauchy est convergent.

Dans un espace complet

les linéairement compacts sont les linéairement bornés fermés.

Complétion [Köt79]

Muni de la topologie uniforme sur les équicontinus, $(E')^*$ est complet. L'évaluation $\mathrm{ev} : E \to \neg_{\mathfrak{Q}} E'$ plonge E dans un espace complet. Le complété de E est la fermeture $\overline{\mathrm{ev}(E)}$:

$$\widetilde{E} = \big\{ y^* \in E'^* \; ; \; \forall V \in \mathcal{V}, \, \exists x \in E, \\ \forall x' \in \mathrm{ann}_{E'}(V), \, \langle y^*, x' \rangle = \langle \mathrm{ev}_x, x' \rangle \big\} \, .$$

Résumé sur les espaces de finitude

Soit $(|A|, \mathcal{F}(A))$ *un espace de finitude.*

- complets
- ouvert linéaire ssi coengendré par un support antifinitaire $\mathcal{V}(v') = \{x \in E_B \ ; \ |x| \subseteq u\}$ avec $v' \in \mathcal{F}(B)^{\perp}$.
- linéairement borné ssi support finitaire $\mathcal{K}(u) = \{x \in E_A \ ; \ |x| \subseteq u\}$ avec $u \in \mathcal{F}(A)$.
- dualité linéairement bornés vs ouverts linéaires linéaires

	E_A	$E'_A \simeq E_{A^\perp}$
partie finitaire	$u \in \mathcal{F}(A)$	$u' \in \mathcal{F}\left(A^\perp\right)$
linéairement borné	$\mathcal{K}(u)_A$ et ${}^\perp\mathcal{V}(u)_{A^\perp}$	$\mathcal{V}(u')_A^\perp$ et $\mathcal{K}(u')_{A^\perp}$
ouvert linéaire	$\mathcal{V}(u')_A$ et ${}^\perp\mathcal{K}(u')_{A^\perp}$	$\mathcal{V}(u)_{A^\perp}$ et $\mathcal{K}(u)_A^\perp$

Espaces linéairement bornologiques

Dualité bornivores versus bornés.

	E	E'
linéairement borné	B et ${}^{\perp}V'$	B' et $V^{\perp}$
linéairement bornivore	V et ${}^{\perp}B'$	V' et $B^{\perp}$

Théorème

Soit E un espace de Lefschetz complet. E est réflexif si et seulement si il est linéairement bornologique.

Espaces linéairement bornologiques

Définition

Un sous-espace B est dit linéairement **borné** lorsque $B/(B \cap U)$ est de dimension finie.

Définition

Soit E un espace de Lefschetz. Un sous-espace U de E est dit **linéairement bornivore** lorsque pour tout linéairement borné B, le quotient $B/(B \cap U)$ est de dimension finie.

Définition

Un espace de Lefschetz **linéairement bornologique** est un espace dans lequel tous les linéairement bornivores fermés sont ouverts.

Interprétation des exponentielles

$$A \Rightarrow B$$

Retour sur la sémantique quantitative

On va interpréter la flèche intuitionniste dans les espaces de Lefschetz issus des espaces de finitude grâce à la formule

$$\mathrm{f}(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P_n(x)$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est un polynôme homogène de degré n.
Soient E et F deux espaces de Lefschetz complets et réflexifs.

Definition

Une fonction $P_n : E \to F$ est un **polynôme homogène de degré** n lorsqu'il existe une fonction n-linéaire hypocontinue $h : \times_{1 \leq i \leq n} E \to F$ telle que

$$\forall x \in E,\ P_n(x) = h(\underbrace{x, \ldots, x}_{n}).$$

Polynômes et séries formelles

Soient E et F deux espaces réflexifs et complets.

$\mathrm{Pol}^n_{\Bbbk}(E\ ;\ F)$

espace des polynômes homogènes de degré n muni de la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts. C'est un espace de Lefschetz complet.

$\mathrm{Pol}_{\Bbbk}(E\ ;\ F)$

espace des combinaisons linéaire (finies) de polynômes homogènes, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts n'est pas complet.

$\mathrm{Ser}_{\Bbbk}(E\ ;\ F)$

espace des séries formelles de E dans F muni de la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts.

Théorème [Ehr07]

Soient A et B deux espaces de finitude. $E_{A\Rightarrow B} \simeq \mathrm{Ser}_{\Bbbk}(E_A\ ;\ E_B)$.

Dérivation

On suppose le corps $\mathbb{k}$ infini. Soient E et F complets et réflexifs.

Dérivée de Gâteaux.

C'est la dérivée directionnelle qui est linéaire en u

$$\partial f(x) = \lambda u \cdot \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t}.$$

Dérivation des polynômes.

Soit $P_n \in \mathrm{Pol}^n_{\mathbb{k}}(E\ ;\ F)$. Il existe une forme n-linéaire **symétrique** $h : E \times \ldots \times E \to F$ telle que $P_n(x) = h(x, \ldots, x)$.

$$\begin{array}{rccc} \partial : & \mathrm{Pol}^n_{\mathbb{k}}(E\ ;\ F) & \to & \mathrm{Pol}^{n-1}_{\mathbb{k}}(E\ ;\ \mathcal{L}_c(E\ ;\ F)) \\ & P_n & \mapsto & x \mapsto \lambda u . n\, h(x \ldots, x, u). \end{array}$$

Itération de la dérivée

On suppose le corps $\Bbbk$ infini. Soient E et F complets et réflexifs.

$P_n \in \mathrm{Pol}^n_{\Bbbk}(E\ ;\ F)$.

Il existe une forme n-linéaire symétrique $h : E \times \ldots \times E \to F$ telle que $P_n(x) = h(x, \ldots, x)$.

$$
\begin{array}{rcl}
\partial^1 P_n & = & x \mapsto \lambda u.nh(x, \ldots, x, u) \\
\partial^2 P_n & = & x \mapsto \lambda u_1 \lambda u_2.n(n-1)h(x, \ldots, x, u_1, u_2) \\
\ldots & & \ldots \\
\partial^n P_n & = & x \mapsto \lambda u_1 \ldots \lambda u_n \cdot n! h(u_1, \ldots, u_n)
\end{array}
$$

On en déduit que

$$
\partial^k P_n(0) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq n \\ \lambda u_1 \ldots \lambda u_n \cdot n! h(u_1, \ldots, u_n) \text{ si } k = n \end{cases}
$$

Séries formelles, dérivée et distributions.

On suppose le corps $\mathbb{k}$ infini. Soient E et F complets et réflexifs.

Dérivée des séries formelles

Toute série formelle $\mathrm{f} \in \mathrm{Ser}_{\mathbb{k}}(E\ ;\ F)$ est infiniment dérivable. De plus pour n, $\partial^n \mathrm{f}(0)$ est une fonction n-linéaire telle que

$$\partial^n \mathrm{f}(0)(\overbrace{x, \ldots, x}^{n}) = n! \mathcal{E}_n \mathrm{f}(x).$$

où $\mathcal{E}_n$ extrait le polynôme homogène de degré n de $\mathrm{f}(x)$.

Le cas des espaces de finitude [Ehr05, Ehr07]

Soit A un espace de finitude.

$$?(A^\perp) \simeq \mathrm{Ser}_{\mathbb{k}}(E_A) \qquad\qquad !A \simeq \neg \mathrm{Ser}_{\mathbb{k}}(E_A)$$

Distribution $\neg \mathrm{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$

C'est une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions lisses.

Distributions.

On suppose $\mathbb{k}$ infini. Soit E un espace de Lefschetz complet et réflexif.
Soit $x \in E$. La **masse de Dirac** est la distribution définie par

$$\begin{array}{rccc} \delta_x : & \mathrm{Ser}_{\mathbb{k}}(E) & \to & \mathbb{k} \\ & \mathrm{f} & \mapsto & \mathrm{f}(x). \end{array}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la n-ième **extraction** est la distribution définie par

$$\begin{array}{rccc} x^n : & \mathrm{Ser}_{\mathbb{k}}(E) & \to & \mathbb{k} \\ & \mathrm{f} & \mapsto & \mathcal{E}_n \mathrm{f}(x). \end{array}$$

Séries

Pour tout $x \in E$, la série de terme général $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers δ_x dans l'espace $\neg \mathrm{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$.

$$\forall \mathrm{f} \in \mathrm{Ser}_{\mathbb{k}}(E),\ \langle \delta_x, \mathrm{f} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x^n, \mathrm{f} \rangle.$$

Formule de Taylor

On suppose $\mathbb{k}$ infini. Soit E un espace de Lefschetz complet et réflexif.

Théorème

Toute série formelle $\mathrm{f} \in \mathrm{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$ vérifie la formule de Taylor

$$\forall x \in E,\ \mathrm{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \partial^n \mathrm{f}(0)(x, \dots, x).$$

Non-déterminisme contrôlé.

Soit $\mathrm{f} \in E \Rightarrow 1$. Pour tout B linéairement borné de E, il existe un polynôme P tel que

$$\forall x \in B,\ \mathrm{f}(x) = P(x).$$

Il existe une borne sur le nombre d'appels à un argument dans le borné, c'est le degré maximal des polynômes apparaissant dans P.

Bibliographie

Thomas Ehrhard :
Finiteness spaces.
Mathematical Structures in Computer Science, 15(04):615–646, 2005.

Thomas Ehrhard :
On finiteness spaces and extensional presheaves over the lawvere theory of polynomials.
2007.

Gottfried Köthe :
Topological Vector Spaces.
Springer-Verlag, 1979.