Logique linéaire et sémantique différentielle
Des espaces de finitude aux espaces de Lefschetz.

Christine Tasson

CHoCo, le jeudi 22 octobre 2009.

1 Sémantique quantitative

La sémantique quantitative [Gir88] a été introduite afin de rendre compte de propriétés non-déterministes (ou probabilistes) de langages de programmation.

1.1 Idées

À chaque **type**, on associe l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les données de ce type. À partir d'une entrée, un programme non-déterministe peut renvoyer différents résultats. On collecte tous ces résultats en une **donnée** représentée formellement par une combinaison linéaire (possiblement infinie) de valeurs. Un **programme** va prendre en entrée une combinaison linéaire de valeurs initiales et pour chaque valeur initiale renvoyer une combinaison linéaire de valeurs résultantes.
Plus précisément,

- ⋆ À chaque **type** A, on associe une trame $|A|$.
- ⋆ Chaque **donnée** est une combinaison linéaire $\sum_{a\in|A|} x_a\, e_a$ (possiblement infinie) d'éléments a de la trame. Pour chaque $a \in |A|$, x_a représente le nombre de fois qu'apparaît la valeurs a dans la donnée.
- ⋆ Un **programme** f est représenté par une fonction assez régulière, c'est-à-dire calculable par approximation finie (connaissant $\mathrm{f}(\sum_{a\in u} x_a e_a)$ pour toute partie finie u de $|A|$, on veut être capable d'en déduire $\mathrm{f}(\sum_{a\in|A|} x_a\, e_a)$).

Quel formalisme ? Historiquement, la sémantique quantitative est réalisée dans la catégorie des ensembles [Joy86, Has02, FGHW08]. Le but de cet exposé est d'explorer la sémantique quantitative dans les *espaces vectoriels topologiques*. Dans ce contexte, les *combinaisons linéaires* de valeurs seront des séries convergentes et la *régularité* des programmes correspondra à leur continuité. Citons d'autres études similaires [BS96, Gir96, Ehr02, Ehr05].

Anneau ou corps ? L'interprétation non-déterministe suggère de prendre un anneau pour les scalaires, par exemple les entiers. On considère plutôt un corps car cela simplifie les raisonnements.

1.2 Formule de la sémantique quantitative

Un programme **linéaire** $P_1 : A \multimap B$ est un programme qui consulte une seule fois son argument. Il demande à son contexte de lui donner l'une des valeurs de $\sum_{a\in|A|} x_a\, e_a$, par exemple e_a, et il renvoie $P_1(e_a)$ qui est une combinaison linéaire des différents résultats possibles dans B. On en déduit que si le contexte fournit x_a fois la valeur a, le programme produira x_a fois $P_1(e_a)$. Sur une entrée non-déterministe $\sum_{a\in|A|} x_a e_a$, on a donc

$$P_1\left(\sum_{a\in|A|} x_a\, e_a\right) = \sum_{a\in|A|} x_a P_1(e_a).$$

Plus généralement, un programme **n-linéaire** P_n consulte n fois son argument. À chaque fois que le programme demande à son environnement quel est son argument, l'environnement lui donne un e_{a_i} possiblement différent et le programme renvoie $P_n(e_{a_1},\dots,e_{a_n})$. Ainsi, sur une entrée non-déterministe, le résultat sera

$$P_n\left(\sum_{a\in|A|} x_a\, e_a\right) = \sum_{a_1,\dots,a_n\in|A|} x_{a_1}\dots x_{a_n} P_n\left(e_{a_1},\dots,e_{a_n}\right).$$

La **formule de la sémantique quantitative** permet de représenter un programme selon les différents *scénarios* d'évaluation : pour toute donnée x, si le programme f termine, on sait qu'il va faire un nombre fini n_x d'appels à x. On note P_{n_x} la routine qui est utilisée pour calculer le résultat, c'est un programme n-linéaire tel que $P_{n_x}(x) = \mathrm{f}(x)$. On regroupe les routines selon le nombre d'appels

$$\begin{aligned} P_n :\ x &\mapsto P_{n_x}(x) \text{ si } n_x = n \\ &\mapsto 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

La sémantique quantitative représente un programme comme la superposition des différents scénarios possibles :

$$\mathrm{f}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P_n(x).$$

Dans cet exposé, nous allons donner un sens à cette formule dans les espaces de finitude et les espaces de Lefschetz (qui sont des espaces vectoriels topologiques). Le but est de la relier avec la formule de Taylor grâce à un opérateur différentiel.

2 Espaces de finitude

Les espaces de finitude permettent de *contrôler* le non-déterminisme. L'idée est de ne représenter que les programmes qui interagissent de façon *finie*. En particulier, les espaces de finitude ne représentent pas les points fixes.

Plus précisément, soient deux programmes $P : A \Rightarrow B$ et $Q : B \Rightarrow C$ et une donnée x de type A. On a

$$P(x) = \sum_{b\in|B|} P_b(x)\, e_b.$$

on veut trouver une sémantique qui capture la propriété suivante :«le nombre de valeurs de $|B|$ prises en compte pour calculer $Q(P(x))$ est fini». Autrement dit, il existe $J \subseteq |B|$ fini tel que

$$Q\left(P(x)\right) = Q\left(\sum_{b\in J} P_b(x)\, e_b\right).$$

On va commencer par implémenter cette idée au niveau relationnel. Puis on va la transposer au niveau des espaces vectoriels topologiques.

2.1 Du modèle relationnel...

On considère le modèle relationnel de la logique linéaire. Dans le **modèle relationnel**, toute formule A est représentée par un ensemble $|A|$, sa trame ; toute preuve $\pi : A$ par une partie $[\![\pi]\!]$ de la trame. Lorsque l'on observe la sémantique, on s'aperçoit que l'interaction entre deux preuves est finie.

Rappel: *Soient A, Γ et Δ des formules de* LL. *La coupure entre une preuve $\pi \vdash \Gamma, A$ et une preuve $\pi' \vdash A^\perp, \Delta$ est interprétée par*

$$[\![\pi\ ;\ \pi']\!] = \{(\gamma, \delta) \in |\Gamma| \times |\Delta|\ ;\ \exists a \in |A|\,, (\gamma, a) \in [\![\pi]\!]\,, (a, \delta) \in [\![\pi']\!]\}\,.$$

Théorème 1. *[Ehr05] Soient A, Γ et Δ des formules de* LL. *Une preuve $\pi \vdash \Gamma, A$ et une preuve $\pi' \vdash A^\perp, \Delta$ n'ont qu'un nombre fini d'interactions possibles à travers $[\![A]\!]$, i.e. pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $\delta \in \Delta$, il n'existe qu'un nombre fini de $a \in [\![A]\!]$ tels que $(\gamma, a) \in [\![\pi]\!]$ et $(a, \delta) \in [\![\pi']\!]$.*

Ainsi, via Curry-Howard, le nombre de données sur lesquelles deux programmes interagissent est *borné*.

Remarquons que l'on peut certainement prouver ce théorème directement mais que l'induction sur les preuves est délicate car il y a beaucoup de cas à traiter. La démonstration la plus directe passe par la sémantique des espaces de finitude.

Pour traduire cette propriété finitaire dans la sémantique, on utilise la construction usuelle par **bi-orthogonalité** [Gir06, HS03] :

$$\forall u,\ u' \subseteq |A|\,,\ u \perp u' \iff u \cap u' \text{ fini.}$$

L'orthogonal d'une famille $\mathcal{F}$ de parties de $|A|$ est $\mathcal{F}^\perp = \{u' \in |A|\ ;\ \forall u \in \mathcal{F},\ u \cap u' \text{ fini}\}$.

On adjoint à la trame du modèle relationnel une **structure finitaire** $\mathcal{F}(A)$, c'est-à-dire un ensemble de parties dites finitaires, clos par bi-orthogonalité : $\mathcal{F}(A)^{\perp\perp} = \mathcal{F}(A)$.

Prenons des exemples pour comprendre la structure finitaire.

Exemple 1. Les booléens sont formés de deux éléments incomparables «vrai», noté `T` et «faux», noté `F`. Ils sont interprétés par

$$\begin{array}{rcl} |\mathcal{B}| & = & \{\mathtt{T}, \mathtt{F}\}, \\ \mathcal{F}(\mathcal{B}) & = & \mathcal{P}_{\text{fin}}(\{\mathtt{T}, \mathtt{F}\})\,. \end{array}$$

S'il n'existe qu'une seule structure finitaire sur une trame finie, on peut munir un ensemble dénombrable de beaucoup de structures finitaires différentes.

Exemple 2. Les espaces de finitude définis dans cet exemple ont tous pour trame l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

- ⋆ On note $\mathcal{N}at$ l'espace de finitude dont la trame est l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ et dont la structure finitaire est l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, noté $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$. La structure de finitude de son orthogonal $\mathcal{N}at^\perp$ est l'ensemble de toutes les parties $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- ⋆ On note $2\mathcal{N}at$ l'espace de finitude dont la trame est $\mathbb{N}$ et la structure finitaire est l'orthogonal de $\mathcal{P}(2\mathbb{N})$. Ainsi, une partie est finitaire si et seulement si elle ne contient qu'un nombre fini de nombres pairs.

Dans le modèle des espaces de finitude, une formule est interprétée par la trame $|A|$ et une structure finitaire $\mathcal{F}(A)$; une preuve $\pi : A$ est interprétée par une partie finitaire $[\![\pi]\!] \in \mathcal{F}(A)$.

Proposition 1. *[Ehr05] Les espaces de finitude forment un modèle de la logique linéaire. De plus, l'interprétation d'une preuve est la même dans le modèle relationnel et dans le modèle des espaces de finitude.*

Le théorème 1 est un corollaire de cette proposition. La sémantique finitaire permet donc de montrer que *l'interaction de la sémantique relationnelle des preuves en logique linéaire est non-déterministe mais contrôlée.*

2.2 ... aux espaces vectoriels topologiques

On reprend les idées de la sémantique quantitative.

Définition des espaces de finitude. Soit $\Bbbk$ un corps discret.

- ⋆ un **type** est défini par une trame $|A|$ et une structure finitaire $\mathcal{F}(A)$;
- ⋆ une **donnée** est une combinaison linéaire **finitaire** de valeurs $a \in |A|$:

$$x = \sum_{a \in |A|} x_a e_a;$$

  elle est définie par une famille $(x_a)_{a \in |A|} \in \Bbbk^{|A|}$ de scalaires dont le **support** est finitaire, i.e. $|x| \in \mathcal{F}(A)$ avec

$$|x| \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in |A| \ ; \ x_a \neq 0\} ;$$

  ainsi, le type A est interprété par

$$E_A = \{x \in \Bbbk^{|A|} \ ; \ |x| \in \mathcal{F}(A)\};$$

  c'est un espace topologique ;
- ⋆ un **programme** de type $A \Rightarrow B$ est une fonction linéaire continue de $E_{!A}$ dans E_B.

Rappel: *Une base topologique d'un espace vectoriel topologique est une famille de vecteurs telle que tout vecteur se décompose de façon unique en une combinaison linéaire convergente de vecteurs de la base.*

Les notions de support et de base permettent de faire le lien entre le niveau relationnel et le niveau vectoriel. Soit A une formule de la logique linéaire. L'interprétation relationnelle $|A|$ forme une *base* (topologique) de l'interprétation vectorielle $\Bbbk^{|A|}$ et de E_A. Ainsi, l'interprétation vectorielle d'une preuve est une combinaison linéaire infinie (convergente) des éléments de son interprétation relationnelle. Dans l'autre sens, l'interprétation relationnelle d'une preuve est le *support* de son interprétation vectorielle.

Interaction dans les espaces vectoriels. Soit A une formule. On note $|A|$ la trame associée. Une preuve π de $\vdash \Gamma, A$ est représentée par une fonction linéaire de $\Bbbk^{|\Gamma|}$ dans $\Bbbk^{|A|}$. Cette fonction linéaire peut-être considérée comme une matrice. Pour tout $\gamma \in |A|$, on note $[\![\pi]\!]_\gamma = \sum_{a \in |A|} [\![\pi]\!]_{\gamma,a}\ e_a$ la ligne d'indice γ.. Une preuve de $\vdash A^\perp, \Delta$ est interprétée par une fonction linéaire $[\![\pi']\!]$ de $\Bbbk^{|A|}$ dans $\Bbbk^{|\Delta|}$. Cette fonction linéaire peut-être considérée comme une matrice. Pour tout $\delta \in \Delta$, on note $[\![\pi']\!]_\delta = \sum_{a \in |A|} [\![\pi']\!]_{a,\delta}\ e_a$ la colonne d'indice δ. La composition des fonctions linéaires correspond à la multiplication matricielle. On en déduit l'interprétation de la coupure :

$$\forall \gamma \in \Gamma, \delta \in \Delta,\ [\![\pi \ ; \ \pi']\!]_{\gamma,\delta} = \sum_{a \in |A|} [\![\pi]\!]_{\gamma,a} [\![\pi']\!]_{a,\delta} \, .$$

On doit donner un sens à cette somme de scalaires. On va dire que l'interprétation de la coupure est bien définie lorsque la famille $(x_a)_{a\in|A|}$ est sommable.

Rappel: *Un* **réseau** $(r_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *est une famille indexée par un ensemble filtrant* ($\forall\alpha,\beta\in\Gamma,\exists\gamma\in\Gamma,\ \gamma\geq\alpha,\beta$)*.*

Un réseau converge vers une limite l lorsque pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de l, il existe β tel que $\gamma\geq\beta\Rightarrow r_\gamma\in\mathcal{V}$.

Une famille $(x_a)_{a\in|A|}$ est dite **sommable** *lorsque le réseau des sommes partielles $(\sum_{a\in J}x_a)_{J\subseteq_{\mathrm{fini}}|A|}$ converge.*

Si le corps est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on va retrouver les espaces de Köthe [Ehr02]. Lorsque le corps est discret[1], la famille est sommable si et seulement si son support est fini, on définit ainsi les espaces de finitude :

$$[\![\pi\ ;\ \pi']\!]_{\gamma,\delta}=\sum_{a\in|A|}[\![\pi]\!]_{\gamma,a}\,[\![\pi']\!]_{a,\delta}\ \text{finie}\quad\Longleftrightarrow\quad\left|[\![\pi]\!]_{\gamma}\right|\cap|[\![\pi']\!]_{\delta}|\ \text{fini.}$$

Proposition 2. *[Ehr05] Les espaces de finitude vectoriels forment un modèle de la logique linéaire.*

Ce n'est pas un simple corollaire du cas relationnel. En effet, il n'y a pas d'équivalence de catégorie entre les espaces de finitude relationnels et les espaces de finitude vectoriels.

Toutes les constructions de la logique linéaire dans les espaces de finitude peuvent être décrites d'un point de vue relationnel (voir l'article [Ehr05]) mais aussi comme des constructions dans les espaces munis d'une topologie linéairisée, nommés espaces de Lefschetz.

3 Espaces de Lefschetz

3.1 Topologie linéarisée

Rappel: *Soit E un espace vectoriel topologique. Une base de filtres sur E est une famille dirigée pour l'ordre inverse de l'inclusion (si F et G sont dans la famille, $F\cap G$ contient un élément de la famille) et qui ne contient pas l'ensemble vide. Une base de filtres engendre un filtre par clôture par sur-espace.*

Définition 1. [Lef42] Un $\Bbbk$-espace vectoriel topologique E est appelé **espace de Lefschetz** lorsqu'il existe une base de filtres $\mathcal{V}$ vérifiant les propriétés

(TL1) tout élément V de $\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel de E,

(TL2) $\bigcap\mathcal{V}=\{0\}$,

et telle qu'une partie U de E soit ouverte si et seulement si

$$\forall x\in U,\ \exists V\in\mathcal{V}\ ;\ x+V\subseteq U.$$

La base de filtres $\mathcal{V}$ est appelée **système fondamental linéaire** de l'espace de Lefschetz E. Un **ouvert linéaire** est un sous-espace vectoriel ouvert de E.

3.2 Les espaces de finitude

Soit $(|A|,\mathcal{F}(A))$ un espace de finitude. Pour toute partie anti-finitaire $u'\in\mathcal{F}(A)^\perp$, le sous-espace de E_A co-engendré par u' est noté

$$\mathcal{V}(u')=\{x\in E_A\ ;\ |x|\cap u'=\emptyset\}.$$

[1] Un espace est discret lorsque toute partie est ouverte.

Proposition 3. *[Ehr05] Soit $A = (|A|, \mathcal{F}(A))$ un espace de finitude relationnel. Muni de la topologie engendrée par le système fondamental linéaire $\mathcal{V}(u')$ pour $u' \in \mathcal{F}(A)^{\perp}$, E_A est un espace de Lefschetz.*

Exemple 3. L'espace de Lefschetz engendré par l'espace de finitude relationnel $\mathcal{B}$ dont la trame est $\{\mathtt{T}, \mathtt{F}\}$ est l'espace $\Bbbk^2$ muni de la topologie discrète.

Exemple 4. L'espace de finitude relationnel $\mathcal{N}at$ a pour trame $\mathbb{N}$, pour structure finitaire les parties finies de $\mathbb{N}$ et pour structure anti-finitaire toutes les parties de $\mathbb{N}$. L'espace de Lefschetz engendré par $\mathcal{N}at$ est l'espace des suites finies

$$E_{\mathcal{N}at} = \{x \in \Bbbk^{\mathbb{N}} \; ; \; |x| \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})\} = \Bbbk^{(\mathbb{N})}.$$

Comme $\mathbb{N}$ est une partie anti-finitaire, $\mathcal{V}(\mathbb{N}) = \{x \in \Bbbk^{(\mathbb{N})} \; ; \; |x| \cap \mathbb{N} = \emptyset\} = \{0\}$ est un ouvert linéaire. On en déduit que $E_{\mathcal{N}at}$ est muni de la topologie discrète.
L'espace de Lefschetz engendré par $\mathcal{N}at^{\perp}$ est l'espace de toutes les suites

$$E_{\mathcal{N}at^{\perp}} = \{x \in \Bbbk^{\mathbb{N}} \; ; \; |x| \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\} = \Bbbk^{\mathbb{N}}.$$

Les parties anti-finitaires de $\mathcal{N}at^{\perp}$ sont les parties finies de $\mathbb{N}$. Ainsi, la topologie de $E_{\mathcal{N}at^{\perp}}$ est engendrée par les ouverts linéaires

$$\mathcal{V}(u') = \{x \in \Bbbk^{\mathbb{N}} \; ; \; |x| \cap u' = \emptyset\} = \{x \in \Bbbk^{\mathbb{N}} \; ; \; \forall a \in u', \, x_a = 0\},$$

où u' est une partie finie de $\mathbb{N}$.

Ainsi, un réseau $(s_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ de $E_{\mathcal{N}at^{\perp}}$ converge vers l si et seulement pour toute partie finie $u'\mathbb{N}$, il existe β tel que

$$\forall \gamma \geq \beta, \; s_\gamma - l \in \mathcal{V}(u')$$

autrement dit,

$$\forall \gamma \geq \beta, \; \forall n \in u', \; s_{\gamma,n} = l_n.$$

Donc un réseau est convergent si et seulement si chacune de ses composantes est stationnaire.

Définition 2. On appelle espace de Lefschetz finitaire tout espace de Lefschetz E tel qu'il existe un espace de finitude (relationnel) A et un homéomorphisme linéaire entre E et E_A.

On note **LinFin** la catégorie des espaces de Lefschetz finitaires et **RelFin** la catégorie des espaces de finitude relationnels.

Proposition 4. *Le foncteur $A \mapsto E_A$ est un plongement de* **RelFin** *dans* **LinFin** *(il est plein et fidèle).*

Par contre, il n'existe pas de foncteur de **LinFin** dans **RelFin**. En effet, un tel foncteur nécessiterait le choix d'une base canonique d'un espace de Lefschetz finitaire.

3.3 Propriétés

Proposition 5. *[Köt79, §10.2] Soit E un espace de Lefschetz. Tout ouvert linéaire est fermé.*

Cette propriété est contre-intuitive vis-à-vis des espaces vectoriels normés dans lesquels tout sous-espace est connexe (car connexe par arcs et $\mathbb{R}$ est connexe). Ici, un sous-espace peut-être à la fois ouvert et fermé. Le corps $\Bbbk$ est discret donc totalement déconnecté et plus généralement, tout espace est totalement déconnecté.

Proposition 6. *[Köt79, §10.2] Tout espace de Lefschetz de dimension finie est discret.*

MALL peut être interprété dans les espaces vectoriels de dimension finie. Dans les espaces de finitude, toute formule de MALL est interprétée par le même espace de dimension finie. La topologie linéairisée n'apporte aucune structure. Par contre dans les espaces de dimension *infinie*, la topologie permet d'avoir la réflexivité (dualité) nécessaire en logique linéaire classique.

4 Interprétation des multiplicatifs

On s'intéresse plus particulièrement aux espaces de fonctions pour obtenir la réflexivité. Le dual topologique permet d'interpréter l'orthogonal. Comme en logique linéaire on a $A^{\perp\perp} = A$, on se pose la question suivante. Quelle topologie mettre sur le dual topologique pour avoir $E'' \simeq E$?

Définition 3. Soient E et F deux espaces de Lefschetz. L'espace de fonctions $E \multimap F$ est l'ensemble des fonctions linéaires continues de E dans F.
Le **dual topologique** de E est l'espace des formes linéaires continues sur E (son noyau contient un ouvert de E).

La topologie que l'on met sur l'espace de fonctions est la topologie de la convergence uniforme sur une famille de parties de E.

Définition 4. Soient E et F deux espaces de Lefschetz. Soit $\mathfrak{S}$ une famille de sous-espaces vectoriels qui contient les espaces de dimension finie et qui est stable par union. La topologie de la convergence uniforme sur $\mathfrak{S}$ est engendrée par

$$\mathcal{W}(S, V) = \{f \in E \multimap F \ ; \ f(S) \subseteq V\}.$$

4.1 Le cas finitaire

Théorème 2. *[Ehr05] Soient A et B deux espaces de finitude relationnels. Toute fonction linéaire $f : E_A \to E_B$ dont la matrice $|f|$ est finitaire dans $A \multimap B$ est continue. Réciproquement, si $f \in E_A \multimap E_B$ est une fonction linéaire continue, alors sa matrice est bien définie et finitaire.*

Ce théorème montre qu'il y a un foncteur fidèle des espaces de finitude relationnels vers les espaces de Lefschetz. Cependant, ce foncteur n'induit pas une équivalence de catégorie (de même que le foncteur qui a tout entier n associe l'espace de dimension finie $\mathbb{k}^n$ n'induit pas une équivalence entre la catégorie $\mathbb{N}$ et la catégorie des espaces de dimension finie.

Topologie de l'espace de fonctions. Pour toute partie finitaire $u \in \mathcal{F}(A)$, le sous-espace de E_A engendré par u est noté

$$\mathcal{K}(u) = \{x \in E_A \ ; \ |x| \subseteq u\}.$$

Proposition 7. *[Ehr05] Soient A et B deux espaces de finitude. L'espace de Lefschetz engendré par $A \multimap B$ est linéairement homéomorphe à l'espace $E_A \multimap E_B$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les sous-espaces K de support finitaire, i.e. tels qu'il existe $u \in \mathcal{F}(A)$ avec $K \subseteq \mathcal{K}(u)$.*

Les sous-espaces de support finitaire sont des linéairement compacts et des linéairement bornés.

4.2 Compacts, bornés et équicontinus

Rappel: *Les* **compacts** *peuvent être caractérisés par la propriété de l'intersection (l'intersection d'une famille de segments emboîtés est non vide) ou par la notion de suite extraite (tout réseau d'un compact admet un sous-réseau qui converge). La version linéarisée des compacts reprend la définition par l'intersection et remplace la famille de segments emboîtés par un filtre de sous-espaces* affines *fermés.*

Définition 5. Soit E un espace de Lefschetz. Un sous-espace K est dit linéairement **compact** lorsque l'intersection avec K de tout filtre de sous-espaces affines fermés qui rencontrent K est non vide.

Tout espace de dimension finie est linéairement compact et la somme de deux linéairement compacts est linéairement compacte. On peut donc considérer la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts. On note $\neg_{\mathfrak{C}} E$ le dual topologique E' muni de la convergence uniforme sur les linéairement compacts, engendrée par les annulateurs $\mathrm{ann}\,[E']K$ de linéairement compacts ($\Bbbk$ étant discret, sa topologie est engendrée par $\{0\}$).

Rappel: *Dans un espace vectoriel normé, une partie est* **bornée** *si et seulement si elle est bornée en norme, c'est-à-dire que l'inclure dans une dilatation de la boule unité. Dans les espaces dont la topologie est linéarisée, la notion de dilatation n'a pas de sens. Un sous-espace est linéairement borné si on peut l'inclure presque totalement dans tout sous-espace ouvert, c'est-à-dire modulo un sous-espace de dimension finie.*

Définition 6. Soit E un espace de Lefschetz. Un sous-espace B est dit linéairement **borné** lorsque son intersection avec un ouvert linéaire U de E est de codimension finie dans B, c'est-à-dire $B/(B \cap U)$ est de dimension finie ou encore

$$\forall U \subseteq E \text{ ouvert linéaire, } \exists D \subseteq E \text{ de dimension finie } \;;\; B = B \cap U + D.$$

Tout espace de dimension finie est linéairement borné et la somme de deux linéairement bornés est linéairement bornée. On peut donc considérer la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement bornés. On note $\neg_{\mathfrak{B}} E$ le dual topologique E' muni de la convergence uniforme sur les linéairement bornés.

Rappel: *Une fonction linéaire $f : E \to F$ entre deux espaces vectoriels topologiques est continue lorsque l'image de tout voisinage de zéro est ouvert. Si E est un espace de Lefschetz et $x' : E \to \Bbbk$ est une forme linéaire, la continuité de x' est équivalente à l'existence d'un ouvert linéaire de E tel que $U \subseteq \ker(x')$, autrement dit $x' \subseteq \mathrm{ann}\,[E']U$. En effet, $\Bbbk$ est discret et sa topologie est engendrée par $\{0\}$. On appelle U le module de continuité de x'.*

Définition 7. Soit E un espace de Lefschetz. Un sous-espace Q de son dual topologique est dit linéairement **équicontinu** lorsque toutes les formes linéaires continues de Q ont le même module de continuité, autrement dit il existe un ouvert linéaire U tel que $Q \subseteq \mathrm{ann}_{E'}(U)$.

Tout sous-espace de dimension finie de E' est linéairement équicontinu et la somme de deux sous-espaces équicontinus est équicontinue. On peut donc considérer la topologie de la convergence uniforme sur les équicontinus. On note $\neg_{\mathfrak{Q}} E'$ le dual topologique de E' muni de la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement équicontinus.

4.3 Réflexivité

Chacune de ces topologies permet d'avoir une partie de la réflexivité.

Définition 8. Soit E un espace de Lefschetz. On dit que E est réflexif lorsque l'application canonique suivante est un homéomorphisme linéaire.

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{ev}_E: & E & \to & E'^* \\ & x & \mapsto & \mathrm{ev}(x) : x' \mapsto \langle x', x \rangle. \end{array}$$

Selon la topologie que l'on va mettre sur le dual topologique, l'évaluation va avoir différentes propriétés.

Proposition 8. *Soit E un espace de Lefschetz. L'évaluation $\mathrm{ev}_E : E \to E'^*$ est* **linéaire** *et* **injective** *quelque soit la topologie sur le dual.*
Pour la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement **compacts** $\mathrm{ev}_E : E \to \neg_{\mathfrak{C}} \neg_{\mathfrak{C}} E$ *est* **surjective***.*
Pour la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement **bornés***,* $\mathrm{ev}_E : E \to \neg_{\mathfrak{B}} \neg_{\mathfrak{B}} E$ *est* **ouverte***.*
Elle est **continue** *si et seulement si tout linéairement compact (resp. borné) du dual topologique est linéairement* **équicontinu***.*

4.4 Complets

Rappel: *Soit E un espace vectoriel normé et $\mathcal{V}$ la famille des voisinages de 0 de E.*
Un **réseau** *est une famille $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ d'éléments de E indicée par un ensemble filtrant Γ.*
On dit qu'un réseau $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ **converge** *vers une limite $x \in E$ lorsque :*

$$\forall V \in \mathcal{V},\ \exists \alpha \in \Gamma\ ;\ \forall \beta \geq \alpha,\ x - x_\beta \in V.$$

Enfin, un réseau $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ est dit de **Cauchy** *lorsque :*

$$\forall V \in \mathcal{V},\ \exists \alpha \in \Gamma\ ;\ \forall \beta, \beta' \geq \alpha,\ x_\beta - x_{\beta'} \in V.$$

Un réseau qui converge est aussi un réseau de Cauchy.
Un espace de Lefschetz est dit **complet** *lorsque tout réseau de Cauchy est convergent.*

Proposition 9. *[Köt79] Dans un espace de Lefschetz complet, un sous-espace est linéairement borné si et seulement si sa fermeture est linéairement compacte.*

Complétion. L'évaluation permet de plonger E dans l'espace de Lefschetz complet $\neg_{\mathfrak{Q}} E'$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les équicontinus :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{ev}_E: & E & \to & \neg_{\mathfrak{Q}} E' \\ & x & \mapsto & \mathrm{ev}(x) : x' \mapsto \langle x', x \rangle. \end{array}$$

Proposition 10. *[Köt79] Soit E un espace de Lefschetz et $\mathcal{V}$ un système fondamental de E. Soit $\widetilde{E}$ l'espace des formes linéaires y^* sur E' qui coïncident avec ev_x sur tous les annulateurs des ouverts linéaires de E, i.e.*

$$\widetilde{E} = \{y^* \in E'^*\ ;\ \forall V \in \mathcal{V}, \exists x \in E, \forall x' \in \mathrm{ann}_{E'}(V),\ \langle y^*, x' \rangle = \langle \mathrm{ev}_x, x' \rangle\}.$$

Muni de la topologie de la convergence uniforme sur les **équicontinus** *engendrée par le système fondamental*

$$\widetilde{E} \cap \mathrm{ann}_{E'^*}(\mathrm{ann}_{E'}(V))\ ;\ V \in \mathcal{V},$$

$\widetilde{E}$ est un espace de Lefschetz complet, c'est le complété de E.

En conclusion, lorsqu'un espace de Lefschetz est complet, les linéairement compacts, les linéairement bornés et les équicontinus sont reliés.

4.5 Bornologiques

Les espaces de finitude sont complets donc les linéairement bornés et les linéairement compacts coïncident. Un sous-espace est linéairement borné si et seulement si son support est finitaire.

Le dernier élément important des espaces de finitude est l'existence d'une dualité entre les linéairement bornés et les ouverts linéaires. Celle-ci, résumée dans le tableau ci-dessous, montre que les linéairement bornés du dual sont exactement les équicontinus (sous-espaces d'annulateurs des ouverts linéaires) et vice versa.

Soit E un espace de Lefschetz. Soient A un sous-espace de E et B un sous-espace de E'. On note $\mathrm{ann}_{E'}(A)$ ou $A^\perp$ l'annulateur de A dans E' et $\ker B$ ou ${}^\perp B$ le noyau de B :

$$\begin{array}{rcl} A^\perp & = & \{x' \in E' \ ; \ \forall x \in A, \langle x', x\rangle = 0\}, \\ {}^\perp B & = & \{x \in E \ ; \ \forall x' \in B, \langle x', x\rangle = 0\}. \end{array}$$

Le cas finitaire. Soit $(|A|, \mathcal{F}(A))$ un espace de finitude. Pour tout $u \in \mathcal{F}(A)$, $\mathcal{K}(u)_A = \{x \ ; \ |x| \subseteq u\}$ et pour tout et $u' \in \mathcal{F}(A)^\perp$, $\mathcal{V}(u')_A = \{x \ ; \ |x| \cap u' = \emptyset\}$.

	E_A	$E'_A \simeq E_{A^\perp}$
partie finitaire	$u \in \mathcal{F}(A)$	$u' \in \mathcal{F}\left(A^\perp\right)$
linéairement borné	$\mathcal{K}(u)_A$ et ${}^\perp\mathcal{V}(u)_{A^\perp}$	$\mathcal{V}(u')_A^\perp$ et $\mathcal{K}(u')_{A^\perp}$
ouvert linéaire	$\mathcal{V}(u')_A$ et ${}^\perp\mathcal{K}(u')_{A^\perp}$	$\mathcal{V}(u)_{A^\perp}$ et $\mathcal{K}(u)_A^\perp$

Afin de caractériser cette dualité dans les espaces de Lefschetz, on introduit les notions de bornivores et de linéairement bornologiques.

Définition 9. Soit E un espace de Lefschetz. Un sous-espace U de E est dit **linéairement bornivore** lorsque pour tout linéairement borné B, le quotient $B/(B \cap U)$ est de dimension finie.

Définition 10. Un espace de Lefschetz **linéairement bornologique** est un espace dans lequel tous les linéairement bornivores fermés sont ouverts.

	E	E'
linéairement borné	B et ${}^\perp V'$	B' et $V^\perp$
linéairement bornivore	V et ${}^\perp B'$	V' et $B^\perp$

Théorème 3. *Soit E un espace de Lefschetz complet. E est réflexif si et seulement s'il est linéairement bornologique.*

5 Interprétation des exponentielles

Soient E et F deux espaces de Lefschetz complets et réflexifs.

Revenons à la formule de la sémantique quantitative pour comprendre les constructions exponentielles de la logique linéaire dans les espaces de Lefschetz issus des espaces de finitude.

$$\mathrm{f}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P_n(x)$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est un polynôme homogène de degré n.

5.1 Espaces de séries formelles

Rappel: *La notion d'hypocontinuité est à mi-chemin entre la notion de continuité séparée et de continuité. Étant donné une fonction n-linéaire, au lieu de fixer toutes les variables sauf une et d'étudier la continuité de la fonction ainsi obtenue, on se donne $n-1$ linéairement compacts et on cherche un module de continuité commun aux fonctions obtenues en choisissant les $n-1$ variables respectivement dans ces compacts. Soit h une fonction n-linéaire sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ à valeurs dans F. On dit que h est hypocontinue lorsque pour tout $j \leq n$, pour tous linéairement compacts K_i de E_i $i \neq j$, pour tout ouvert linéaire de F, il existe un ouvert linéaire U_j de E_j tel que*

$$h(K_1, \ldots, K_{j-1}, U_j, K_{j+1} \ldots, K_n) \subseteq V.$$

Définition 11. Une fonction $P_n : E \to F$ est un **polynôme homogène de degré** n lorsqu'il existe une forme n-linéaire hypocontinue $h : \times_{1\leq i\leq n} E \to F$ telle que

$$\forall x \in E,\ P_n(x) = h(\underbrace{x, \ldots, x}_{n}).$$

Proposition 11. *L'espace $\mathrm{Pol}^n_{\mathbb{k}}(E\ ;\ F)$ des polynômes homogènes de degré n est un espace de Lefschetz lorsqu'il est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts.*

Définition 12. L'espace $\mathrm{Pol}_{\mathbb{k}}(E\ ;\ F)$ des combinaisons linéaire (finies) de polynômes homogènes, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts n'est pas complet. Son complété $\mathrm{Ser}_{\mathbb{k}}(E\ ;\ F)$ est l'espace des séries formelles de E dans F muni de la topologie de la convergence uniforme sur les linéairement compacts.

Proposition 12. *[Ehr07] Soient A et B deux espaces de finitude. L'espace de Lefschetz engendré par $A \Rightarrow B$ est linéairement homéomorphe à l'espace $\mathrm{Ser}_{\mathbb{k}}(E_A\ ;\ E_B)$.*

Attention : Remarquons que chacun des $\mathrm{Pol}^n_{\mathbb{k}}(E\ ;\ F)$ est complet. Leur colimite $\oplus\mathrm{Pol}^n_{\mathbb{k}}(E\ ;\ F)$ est donc un espace complet de polynômes. Sa topologie est engendrée par les

$$\mathcal{W}((K_n)_{n\in\mathbb{N}}, V) = \left\{ \sum_{n=1}^{k} P_n\ ;\ \forall n,\ P_n(K_n) \subseteq V \right\}$$

avec K_n linéairement compact de E et V ouvert linéaire de F. Cette topologie n'est pas celle de la convergence uniforme sur les linéairement compacts qui est engendrée par les

$$\mathcal{W}(K, V) = \left\{ \sum_{n=1}^{k} P_n\ ;\ \forall n,\ P_n(K) \subseteq V \right\}$$

avec K linéairement compact de E et V ouvert linéaire de F.

5.2 Lien avec la dérivation

On suppose le corps $\Bbbk$ infini.

Extraire les polynômes homogènes. On introduit une fonction qui extrait le polynôme homogène de degré n d'un polynôme.

Proposition 13. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction linéaire suivante $\mathcal{E}^n$ est continue sur* $\mathrm{Pol}_\Bbbk(E\ ;\ F)$.

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{E}^n: & \mathrm{Pol}_\Bbbk(E\ ;\ F) & \to & \mathrm{Pol}^n_\Bbbk(E\ ;\ F) \\ & \displaystyle\sum_{k=0}^{m} P_k & \mapsto & P_n \end{array}$$

Elle peut donc être prolongée par continuité uniforme sur $\mathrm{Ser}_\Bbbk(E\ ;\ F)$.

Rappel: *La dérivée est la meilleure approximation linéaire d'une fonction au voisinage d'un point. Dérivée de Gateau :*

$$\partial f(x)(u) \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tu)-f(x)}{t}.$$

On commence par construire la dérivée sur les polynômes. Ensuite, on la prolonge aux séries formelles.

Soit $P \in \mathrm{Pol}^n_\Bbbk(E\ ;\ F)$. Il existe une forme n-linéaire symétrique (hypocontinue) $h : E \times \ldots \times E \to F$ telle que $P(x) = h(x, \ldots, x)$. Pour tous $x \in E$, la fonction

$$\lambda u \cdot (P(x+u) - P(x)) = \lambda u \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} h(\overbrace{x, \ldots, x}^{n-k}, \overbrace{u, \ldots, u}^{k})$$

est un polynôme en u. La dérivée est son polynôme homogène de degré 1. En effet, la dérivée de Gâteau de P est

$$\begin{aligned} \lambda u \cdot \lim_{t\to 0} \frac{(P(x+tu) - P(x))}{t} &= \lambda u \cdot \lim_{t\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{n! t^{k-1}}{k!(n-k)!} h(\overbrace{x, \ldots, x}^{n-k}, \overbrace{u, \ldots, u}^{k}) \\ &= \lambda u \cdot n\, h(\overbrace{x, \ldots, x}^{n-1}, u) \\ &= \mathcal{E}^1\left(\lambda u . P(x+u) - P(x)\right). \end{aligned}$$

Définition 13. Soit $P \in \mathrm{Pol}^n_\Bbbk(E\ ;\ F)$. La **dérivée** de P est définie par

$$\begin{array}{rrcl} \partial: & \mathrm{Pol}^n_\Bbbk(E\ ;\ F) & \to & \mathrm{Pol}^{n-1}_\Bbbk(E\ ;\ \mathcal{L}_c(E\ ;\ F)) \\ & P & \mapsto & x \mapsto \mathcal{E}^1\left(\lambda u . P(x+u) - P(x)\right) \\ & & & x \mapsto \left(\lambda u . n h(x \ldots, x, u)\right). \end{array}$$

C'est une fonction linéaire continue.

On itère l'opérateur de dérivation.

$$\begin{aligned} \partial^1 P &= x \mapsto \lambda u . n h(x, \ldots, x, u) \\ \partial^2 P &= x \mapsto \lambda u_1 \lambda u_2 . n(n-1) h(x, \ldots, x, u_1, u_2) \\ \ldots & \quad\ \ldots \\ \partial^n P &= x \mapsto \lambda u_1 \ldots \lambda u_n \cdot n! h(u_1, \ldots, u_n) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\partial^k P(0) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq n \\ \lambda u_1 \dots \lambda u_n \cdot n! h(u_1, \dots, u_n) \text{ si } k = n \end{cases}$$

Remarquons que ∂ est à valeurs dans $\mathrm{Pol}^{n-1}_{\Bbbk}(E\ ;\ \mathcal{L}_c(E\ ;\ F))$ qui est un sous-espace de $\mathrm{Ser}_{\Bbbk}(E\ ;\ \mathcal{L}_c(E\ ;\ F))$. On prolonge alors ∂ à $\mathrm{Pol}_{\Bbbk}(E\ ;\ F)$ par linéarité. En effet, tous les polynômes s'écrivent comme combinaison linéaire finie de polynômes homogènes. On obtient une fonction linéaire continue $\partial : \mathrm{Pol}_{\Bbbk}(E\ ;\ F) \to \mathrm{Ser}_{\Bbbk}(E\ ;\ \mathcal{L}_c(E\ ;\ F))$ donc uniformément continue (c'est une propriété des espaces de Lefschetz) à valeurs dans un espace complet. On peut donc la prolonger à l'adhérence de $\mathrm{Pol}_{\Bbbk}(E\ ;\ F)$ c'est-à-dire à $\mathrm{Ser}_{\Bbbk}(E\ ;\ F)$.

Proposition 14. *La dérivée de Gâteau des séries formelles est la fonction*

$$\partial : \mathrm{Ser}_{\Bbbk}(E\ ;\ F) \to \mathrm{Ser}_{\Bbbk}(E\ ;\ \mathcal{L}_c(E\ ;\ F)).$$

Toute série formelle $\mathrm{f} \in \mathrm{Ser}_{\Bbbk}(E\ ;\ F)$ *est infiniment dérivable. De plus pour* n*,* $\partial^n \mathrm{f}(0)$ *est une fonction* n*-linéaire telle que*

$$\partial^n \mathrm{f}(0)(\overbrace{x, \dots, x}^{n}) = n! \mathcal{E}^n F.$$

5.3 Distributions

Rappel: *Une* **distribution** *est une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions infiniment dérivables et de support compact. Ici on utilise une variante, c'est-à-dire le dual topologiques des séries formelles qui sont en particulier des fonction infiniment dérivables mais qui ne sont pas toujours de support linéairement compact.*

Dans le cas finitaire, l'exponentielle est le dual topologiques des séries formelles.

Proposition 15. *[Ehr05, Ehr07] Pour tout* A *espace de finitude. L'espace de Lefschetz engendré par* $?A^{\perp}$ *est linéairement homéomorphe à* $\mathrm{Ser}_{\Bbbk}(E_A)$ *et l'espace de Lefschetz engendré par* $!A$ *est linéairement homéomorphe à* $\neg\mathrm{Ser}_{\Bbbk}(E_A)$*.*

Définition 14. Soit $x \in E$. La **masse de Dirac** en x est la distribution définie par

$$\begin{array}{rccc} \delta_x : & \mathrm{Ser}_{\Bbbk}(E) & \to & \Bbbk \\ & \mathrm{f} & \mapsto & \mathrm{f}(x). \end{array}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la n-ième **extraction** en x est la distribution définie par

$$\begin{array}{rccc} x^n : & \mathrm{Ser}_{\Bbbk}(E) & \to & \Bbbk \\ & \mathrm{f} & \mapsto & \mathcal{E}^n \mathrm{f}(x). \end{array}$$

Rappelons que $\mathcal{E}^n$ extrait le n-ème polynôme homogène de f (qui coïncide avec un polynôme sur le linéairement compact $\Bbbk \cdot x$ par la caractérisation de la complétion de la Proposition 10).

Proposition 16. *Pour tout* $x \in E$*, la série de terme général* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* δ_x *dans l'espace* $\neg\mathrm{Ser}_{\Bbbk}(E)$*.*

$$\forall \mathrm{f} \in \mathrm{Ser}_{\Bbbk}(E),\ \langle \delta_x, \mathrm{f} \rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x^n, \mathrm{f} \rangle.$$

Théorème 4. *Toute série formelle* $\mathrm{f} \in \mathrm{Ser}_{\mathbb{k}}(E)$ *vérifie la formule de Taylor*

$$\forall x \in E,\, \mathrm{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \partial^n \mathrm{f}(0)(x, \ldots, x).$$

Démonstration. D'après la Définition 14 de x^n et les Propositions 14 et 16, on a

$$\mathrm{f}(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x^n, \mathrm{f} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}^n \mathrm{f}(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} \partial^n \mathrm{f}(x, \ldots, x).$$

□

De la caractérisation de la complétion (Proposition 10) d'un espace de Lefschetz, on déduit la proposition suivante.

Théorème 5. *Soit* $\mathrm{f} \in {?E}$. *Pour tout* B *linéairement borné de* E, *il existe un polynôme* P *tel que*

$$\forall x \in B,\, \mathrm{f}(x) = P(x).$$

Ainsi, pour tout programme de type $A \Rightarrow 1$ et pour tout linéairement borné, il existe une borne sur le nombre d'appel à un argument dans le borné, c'est le degré maximal des polynômes apparaissant dans P. On retrouve le non-déterminisme contrôlé.

Références

[BS96] Richard Blute et Philip Scott : Linear Lauchli semantics. *APAL*, 77(2):101–142, 1996.

[Ehr02] Thomas Ehrhard : On Köthe sequence spaces and linear logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 12(05):579–623, 2002.

[Ehr05] Thomas Ehrhard : Finiteness spaces. *Mathematical Structures in Computer Science*, 15(04):615–646, 2005.

[Ehr07] Thomas Ehrhard : On finiteness spaces and extensional presheaves over the lawvere theory of polynomials. 2007.

[FGHW08] M. Fiore, N. Gambino, M. Hyland et G. Winskel : The cartesian closed bicategory of generalised species of structures. *JOURNAL-LONDON MATHEMATICAL SOCIETY*, 77(1):203, 2008.

[Gir88] Jean-Yves Girard : Normal functors, power series and λ-calculus. *Annals of Pure and Applied logic*, 37:129–177, 1988.

[Gir96] Jean-Yves Girard : Coherent banach spaces : a continuous denotational semantics. 1996.

[Gir06] Jean-Yves Girard : *Le point aveugle, tome 1 : vers la perfection*. 2006.

[Has02] Ryu Hasegawa : Two applications of analytic functors. *Theoretical Computer Science*, 272(1-2):113–175, 2002.

[HS03] Martin Hyland et Andrea Schalk : Glueing and orthogonality for models of linear logic. *Theoretical Computer Science*, 294(1-2):183–231, 2003.

[Joy86] André Joyal : Foncteurs analytiques et espèces de structure. *In Combinatoire Enumérative*, volume 1234 de *Lecture Notes in Mathematics*, pages 126–159. Springer Verlag, 1986.

[Köt79] Gottfried Köthe : *Topological Vector Spaces*. Springer-Verlag, 1979.

[Lef42] Saunders Lefschetz : *Algebraic topology*. American Mathematical Society, 1942.