Problème pour la séance du 4 mars 2014

Christine Tasson

La catégorie cartésienne fermée des domaines de Scott.
L'exercice vise à démontrer que le modèle historique du lambda-calcul forme une catégorie cartésienne fermée.

---

1. Domaines de Scott

Commençons par donner quelques définitions, exemples et propriétés qui permettront d'illustrer les intuitions derrières les domaines de Scott.

Définition 1

Un élément de x_0 d'un **cpo** $(X, \leq)$ *est dit* isolé *(traditionnellement, on parle d'élément compact), si pour toute partie filtrante D de X, on a*

$$x_0 \leq \vee D \quad \Rightarrow \quad \exists x \in D,\ x_0 \leq x.$$

Intuitivement, un élément isolé représente une information finie.

Question 1

Montrer que dans le **cpo** *des parties de $\mathbb{N}$ muni de l'inclusion, les isolés d'une partie filtrante de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont des parties finies.*

Question 2

Soit X un **cpo** *et B une partie finie d'éléments isolés de X. S'il existe, le sup de B est un élément isolé.*

Définition 2

Un domaine de Scott *est un* **cpo** *X tel que :*
- *toute partie bornée de X a un sup (en particulier la partie vide a un sup que l'on note $\perp$ et qui est l'élément minimal de X) :*
- *l'ensemble des éléments isolés de X est dénombrable ;*
- *tout élément de X est le sup de l'ensemble de ses minorants isolés (on dit que X est* algébrique*).*

Question 3

Soit x et y des éléments d'un domaine de Scott X.

On a $x \leq y$ si et seulement si : pour tout élément isolé x_0 de X, $x_0 \leq x$ implique $x_0 \leq y$.

Question 4

Soit X l'ensemble des fonctions partielles de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$, muni de l'ordre :

$$f \leq g \qquad \text{ssi} \qquad \forall x \in D(f),\ x \in D(g) \text{ et } f(x) = g(x),$$

où $D(f) \subseteq \mathbb{N}$ représente le domaine de définition de la fonction partielle f.

Montrer que X est un domaine de Scott.

2. Fonctions Scott-continues

Définition 3

Rappelons qu'une fonction entre **cpo** *est dite* scott-continue *lorsqu'elle est croissante et commute au sup de parties filtrantes.*

La question suivante montre l'intuition derrière les domaines de Scott : une fonction est continue lorsque pour obtenir une information finie sur le résultat, il suffit d'une information finie sur l'argument.

Question 5

Soient X et Y des domaines de Scott et soit $f : X \to Y$ une fonction. Alors f est continue si et seulement si :

- *f est croissante*
- *pour tout $x \in X$ et tout élément isolé y_0 de Y, si $y_0 \leq f(x)$, il existe un élément isolé x_0 de X tel que $x_0 \leq x$ et $y_0 \leq f(x_0)$.*

Pour montrer la propriété suivante, utiliser le fait que X a un nombre au plus dénombrable d'éléments isolés.

Question 6

Soient X et Y des domaines de Scott, et soit $f : X \to Y$ une fonction croissante. Montrer que f est continue si et seulement si, pour toute suite croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X, on a $f(\vee_{n=0}^{\infty} x_n) = \vee_{n=0}^{\infty} f(x_n)$.

3. Catégorie des domaines de Scott

Définition 4

La catégorie Scott est la catégorie dont les objets sont des domaines de Scott et les morphismes sont des fonctions continues.

- *L'objet terminal est un singleton $\{\perp\}$.*
- *Le produit cartésien $X \times Y$ de deux domaines de Scott X et Y est le produit des ensembles muni de l'ordre produit :*
$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \text{ ssi } x_1 \leq x_2 \text{ et } y_1 \leq y_2.$$
- *L'objet des morphismes $X \Rightarrow Y$ entre deux domaines de Scott X et Y est l'ensemble des fonctions continues munie de l'ordre* extensionnel *:*
$$f \leq g \text{ ssi } \forall x \in X,\ f(x) \leq g(x).$$

Question 7

Vérifier que Scott est une catégorie.

Question 8

Soient X et Y des domaines de Scott, vérifier que $X \times Y$ est un domaine de Scott. En particulier, vérifier que (x, y) est isolé si et seulement si x et y le sont.

Soient X et Y des domaines de Scott. Les questions suivantes permettent de montrer que $X \Rightarrow Y$ est lui aussi un domaine de Scott.

Question 9

Soit D une partie filtrante de $X \Rightarrow Y$. Notons $h : X \to Y$ la fonction définie par $\forall x \in X,\ h(x) = \vee_{f\in D} f(x)$.

- *Vérifier que h est bien définie et continue.*
- *Montrer que h est le sup de D pour l'ordre extensionnel.*
- *Montrer que $X \Rightarrow Y$ admet un plus petit élément.*

En déduire que $X \Rightarrow Y$ est un **cpo** *.*

Question 10

Soit B une partie bornée de $X \Rightarrow Y$. Notons $h : X \to Y$ la fonction définie par $\forall x \in X,\ h(x) = \vee_{f\in B} f(x)$. Montrer que h est bien définie, et qu'elle est le sup de B.

Les questions suivantes introduisent les fonctions seuils qui sont des éléments isolés et dont on va étudier les propriétés.

Question 11

Soient $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$ des éléments isolés. Soit $[x_0, y_0]$ la fonction seuil *de X dans Y définie par*

$$\forall x \in X,\ [x_0, y_0](x) = \begin{cases} y_0 \text{ si } x_0 \leq x \\ \perp \text{ sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $[x_0, y_0]$ est continue et qu'elle est un élément isolé de $X \Rightarrow Y$.

Question 12

Soient $f \in X \Rightarrow Y$ et $s(f)$ l'ensemble des fonctions de seuil majorées par f :

$$s(f) = \{[x_0, y_0] \mid x_0 \in i(X),\ y_0 \in i(Y) \text{ et } y_0 \leq f(x_0)\},$$

où $i(x)$ représente les éléments isolés de X.

- *Après avoir justifié son existence, montrer que $\vee s(f)$ est égal à f. (Justifier chacune des inégalités $\vee s(f) \leq f$ et $\vee s(f) \geq f$).*
- *En déduire que $X \Rightarrow Y$ est algébrique.*
- *Montrer que tout élément isolé f_0 est le sup d'une famille finie de fonctions de seuil. Pour cela, montrer que*

$$\mathcal{D} = \{\vee\mathcal{B} \mid \mathcal{B} \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(s(f_0))\}$$

  est une partie filtrante de $X \Rightarrow Y$, bornée par f_0 et contenant $s(f_0)$. En déduire que $f_0 = \vee\mathcal{D}$ et qu'il existe une partie finie de $s(f_0)$ dont le sup est f_0.
- *Montrer que l'ensemble des fonctions de seuil est au plus dénombrable et en déduire que $X \Rightarrow Y$ est un domaine de Scott.*

Terminons par montrer que $X \Rightarrow Y$ est un objet des morphismes.

Question 13

Soit $ev_{X,Y} : (X \Rightarrow Y) \times X \to Y$ définie par $ev_{X,Y}(f, x) = f(x)$.

- *Montrer que ev est croissante.*
- *Montrer qu'une fonction croissante $f : X \times Y \to Z$ entre domaines de Scott est continue si et seulement si elle est séparément continue. Commencer par montrer que si D et E sont des parties filtrantes, alors*

$$f(\vee D, \vee E) = \vee f(D, E)$$

- *Montrer que ev est continue.*

Question 14

Soient X, Y et Z des domaines de Scott et soit $f : Z \times X \to Y$ une fonction continue.

- *Pour chaque $z \in Z$, montrer que la fonction $f_z : X \to Y$ définie par $f_z(x) = f(z, x)$ est continue.*
- *Soit $\Lambda(f) : Z \to (X \Rightarrow Y)$ définie par $\Lambda(f)(z) = f_z$. Montrer que $\Lambda(f)$ est continue.*
- *Vérifier que les équations de clôture cartésienne sont satisfaites.*