SUR L'APPROXIMATION UNIVERSELLE DES SYSTEMES FLOUS

B. BOUCHON-MEUNIER[1], R. HARTANI[1,2], H.T. NGUYEN[*] [1,3]

1 LAFORIA (LAboratoire FORmes et Intelligence Artificielle)
2 INRETS (Institut National de Recherches sur les Transports et leur Sécurité)
3 New Mexico State University - Department of mathematical sciences

Résumé. Nous pésentons un état de l'art des travaux relatifs à l'approximation des fonctions numériques multi-variables par les systèmes flous. Nous analysons de nouveaux aspects aussi bien théoriques que pratiques relatifs aux propriétés des systèmes flous. Nous considérons les possibilités d'approximation des systèmes distribués et des fonctions mesurables non nécessairement continues et analysons finalement le cas des systèmes flous à plusieurs variables en sortie.

Abstract. We present a survey of the state of the art for the problem of universal approximation of multivariables numerical functions using fuzzy systems as well as new insights into technical and applied aspects of designs. We analyse and propose some extensions to the approximation of distributed systems and measurable functions by fuzzy systems and analyse finaly the case of multi outputs fuzzy systems.

---

[*] Cette étude a été réalisée durant le séjour du Professeur Nguyen en tant que professeur invité de l'université Pierre et Marie Curie au LAFORIA durant l'été 1994.

1. Introduction

L'analyse des propriétés d'approximation universelle des systèmes flous constitue l'un des axes de recherches théoriques les plus développés actuellement. De façon analogue aux réseaux de neurones artificiels, les systèmes flous sont désormais justifiés, de façon théorique, par leurs propriétés d'approximation de fonctions de plusieurs variables, définies sur des parties compactes des espaces euclidiens. Dans ce papier, nous voulons particulièrement porter l'attention des praticiens sur les résultats théoriques concernant différents aspects. Nous commençons par définir, dans un premier temps, les systèmes flous et les modes de raisonnement flou considérés tout en proposant des justifications théoriques aux choix qui sont généralement faits en pratique. Nous présentons dans cet article une synthèse assez complète des travaux qui rentrent dans le contexte de l'approximation universelle. La construction de sous-espaces denses de l'espace des fonctions continues sur un compact se base sur deux principales approches. La première s'inspire des travaux de Hornik et Al (Hornik et Al 1989) en réseaux de neurones et repose sur l'utilisation des conditions suffisantes du théorème de Stone-Weiestrass en théorie de l'approximation de fonctions (Wang et Mendel 1992). La seconde démontre directement la densité sans utiliser le théorème de Stone-Weiestrass et concerne principalement le cas des sous-espaces de fonctions continues ne formant pas une sous-algèbre de fonctions (Nguyen et Al 1993). Nous analysons par la suite de nouveaux aspects relatifs à l'approximation universelle. En premier lieu, nous abordons le cas des systèmes distribués, c'est à dire de dimension infinie. En second lieu, le cas des fonctions mesurables non nécessairement continues qui fournit une extension des propriétés actuelles d'approximation universelle est étudié. En dernier lieu, le cas des systèmes flous MIMO (Multi-Inputs Multi-Outputs) est abordé comme une généralisation du cas MISO (Multi-Inputs Single-Output). Nous donnons avant de conclure, un bref aperçu de deux aspects liés aux problèmes discutés. Ils discutent la question suivante: étant donné le large éventail de choix possibles pour les paramètres des systèmes flous, lesquels considerer et comment les construire ? Le premier aspect concerne l'identification des paramètres, le second est relatif à la robustesse des systèmes conçus.

2. Motivations de l'étude

La principale motivation de ce travail consiste à apporter aux praticiens, concepteurs de systèmes flous (commande, aide à la décision,...), les justifications théoriques nécessaires relatives aux propriétés fonctionnelles de ces systèmes.

La construction de systèmes flous revient à la modélisation d'une fonction de transfert de l'espace d'entrée vers l'espace de sortie. Cette constatation nous amène naturellement à lier la construction de systèmes flous à la théorie de l'approximation de fonctions. Les mêmes constatations sont faites en ce qui concerne la théorie des réseaux de neurones artificiels et différents travaux analysent les propriétés des réseaux de neurones dans une

optique d'approximation de fonctions voir (Leshno et al 1993) pour une synthèse. Différents travaux se sont intéressés à la notion d'approximateur universel de façon à donner une justification théorique aux succès réalisés au niveau des applications. Les premiers travaux pertinents dans ce contexte sont ceux de (Hornik et al 1989) utilisant le théorème de Stone-Weiestrass et ceux de (Kurkova 1991) utilisant le théorème de Kolmogorov (Kolmogorov 1957). Ils ont servi de base de réflexion aux différents auteurs travaillant sur des problèmes similaires en ce qui concerne les systèmes flous.
Ce lien entre approximation de fonctions et construction de systèmes flous amène à analyser les différentes possibilités d'approximation selon les différentes catégories de fonctions à approcher, que l'on retrouve de façon plus pratique en termes de relation entre entrées et sorties dans des systèmes physiques.
L'une des principales questions qui se posent au concepteur de systèmes flous est la suivante: quelles classes (type de fonctions d'appartenance, type d'opérateurs logiques) de systèmes flous choisir ? En liant la construction de systèmes flous à l'approximation de fonctions, nous apportons des éléments de réponse à cette question en analysant les possibilités d'approximation des différentes classes de systèmes flous. Une question aussi importante et que nous nous contenterons de souligner dans cette étude concerne le problème de l'identification des paramètres des systèmes flous en question (Sugeno et al 1993, Hartani et al 1994). Les paramètres dans ce cas précis, concernent ceux des fonctions d'appartenance (par exemple la moyenne et l'écart type pour une gaussienne), après avoir fixé la structure du système flou (nombre de règles, nombre de sous-ensembles flous par variable). Cette question est similaire à celle que l'on se pose en réseaux neuronaux: étant donné une architecture neuronale (nombre de couches, nombre de neurones par couche), comment estimer les poids du réseau de neurones ? Des algorithmes d'optimisation du type rétropropagation de l'erreur sont généralement utilisés.

Dans un premier temps et avant d'aborder le problème de l'approximation, on définit les modes de raisonnement flou considérés tout en proposant des justifications théoriques aux choix qui sont généralement faits en pratique.

Le lecteur pourra par la suite, trouver un panorama assez exhaustif des travaux préalablement réalisés dans ce contexte. Les différentes approches seront décrites de façon à présenter les principaux résultats ainsi que le principe général des démonstrations. Il sera renvoyé aux différentes références pour de plus amples détails.
Trois autres aspects seront introduits et analysés:

- le cas des systèmes distribués: le principal interêt de ce type de systèmes réside dans l'analyse des systèmes dont l'état est décrit par un très grand nombre de variables

(voire infini). Certains systèmes industriels ont cette caractéristique même si, en pratique, la modélisation consiste à considérer un sous-ensemble fini de variables d'état.
Un exemple illustratif concerne la commande des hauts fourneaux, où il est normalement nécessaire de connaître la température en tout instant et en tout point.

- le cas des fonctions mesurables: notre interêt pour les fonctions mesurables concerne un renforcement des propriétés actuelles d'approximation ainsi que de l'équivalence fonctionnelle avec les réseaux de neurones. Il est dû au fait que plusieurs applications dans le domaine du contrôle et de la décision reviennent à modéliser des fonctions de transfert (état - action) qui ne sont pas toujours continues. La littérature du contrôle nous fournit plusieurs exemples, nous citerons tout particulièrement les systèmes de commande de type bang-bang ou encore les systèmes dont la trajectoire d'équilibre optimale possède des discontinuités schématisées par des sauts. Mis à part le contrôle, d'autres systèmes que l'on peut modéliser par des systèmes flous peuvent présenter un caractère discontinu. Le cas le plus typique concerne la modélisation de certaines perceptions humaine, pour lesquelles certains variations des variables d'état, engendrent une variation brusque de la perception humaine. Un exemple pour cela peut être trouvé dans (Ralescu et Hartani 1994).

- le cas des systèmes MIMO: ce type de systèmes est peu étudié dans la littérature bien qu'il représente un potentiel important d'applications. Nous analysons donc l'extension naturelle des propriétés démontrées dans le cas des systèmes MISO et discutons plus particulièrement l'aspect constructif des systèmes MIMO dans un contexte d'acquisition des connaissances (identification des paramètres des règles floues).

3. Structure des règles et modes de raisonnement

Par système flou, nous désignons tout système dont certaines de ces composantes sont floues. Nous considérons plus particulièrement les systèmes à base de règles floues pour lesquels aussi bien la connaissance que le raisonnement utilisent des concepts flous.
Nous donnons dans ce qui suit des précisions concernant la structure des règles considérées et des éclaircissements par rapport aux différents modes de raisonnement correspondants. Ces précisions nous serviront d'une part à expliquer et à justifier les choix qui sont généralement réalisés en pratique, et d'autre part à restreindre notre cas d'étude pour l'analyse des propriétés d'approximation.

Considérons les systèmes à base de règles floues du type:

"Si X1 est A1 et ... et Xn est An alors Y1 est B1 et .... et Ym est Bm"

où (X1, ... , Xn) constitue le vecteur d'entrée schématisant les variables d'état et (Y1,...,Ym) le vecteur de sortie schématisant les variables d'action. Ai et Bj désignent les

sous-ensembles flous correspondants aux différentes variables. Un système de ce type sera dénoté MIMO. La restriction au cas m=1 sera notée MISO.

Dans ce qui suit, nous considérons un système flou de type MISO comme une fonction de transfert de R^n vers R représentée par une base de règles floues telle que Rj: " Si Xi est A_{ij} alors Y est B_j ; i=1,..,n ; j=1, ..., r" r constitue le nombre de règles floues de la base. Le premier point à préciser concerne la structure générale de la base de règles. Nous distinguons deux principales variantes:
- la première consiste à considérer l'opérateur "ou" comme liaison entre les différentes règles de la base. Cette structure sera dite de type 1 dans ce qui suit.
- la seconde consiste à considérer que les règles sont fournies indépendamment les unes des autres, de façon similaire à ce que l'on retrouve dans les systèmes experts et les systèmes d'intelligence artificielle. Nous dirons que cette structure est de type 2.

Le mécanisme permettant la détermination de la sortie en fonction des entrées, soit y=f(x1, ..., xn) est obtenu suite à l'aide d'un processus de fuzzification, d'inférence combinant les règles préalablement définies et de défuzzification. Ce mécanisme est complètement déterminé par deux principales familles de paramètres (ou trois si l'on intègre indépendamment la procédure de défuzzification):

- les fonctions d'appartenance Ai et Bj utilisées,
- les opérateurs logiques utilisés : norme triangulaire (ou t-norme) pour l'agrégation des prémisses, la représentation de la relation, , conorme triangulaire (ou t-conorme) pour l'agrégation collective des règles, enfin l'opérateur de défuzzification. Nous notons que différents opérateurs peuvent être choisis, voir (Bouchon-Meunier 1991) pour une synthèse.

De façon plus explicite, nous distinguons deux niveaux:
- un niveau local, où les règles sont observées séparemment les unes des autres. Pour chaque observation (x1,...,xn), les règles sont déclenchées et chacune d'elles produit un résultat,
- un niveau global, ou encore de fusion de données, dans lequel les résultats partiels des différentes règles sont combinés de façon à produire le résultat final correspondant à la sortie y.

Au niveau local, deux choix sont à effectuer:
-le degré de compatibilité de l'observation X=(x1,...,xn) avec la partie prémisse de la règle Rj est donné par $a_j=T(A_{ij}(x_i), i=1,...,n)$ où T est une t-norme (qui représente la conjonction). Différentes t-normes peuvent être choisies, par exemple T(a,b)=min (a,b), T(a,b)=a.b et T(a,b)=max(0,a+b-1)

-si l'on représente la règle Rj comme une implication, alors on associe à l'observation une valeur de vérité α_j=J(aj,bj) où bj=Bj(y).

Prenons par exemple l'implication, J_S(aj,bj)=S(T'(aj,bj),N(aj)) où S est une t-conorme, T' une t-norme et N une négation. Différentes t-conormes peuvent être choisies, par exemple S(a,b)=max(a,b), S(a,b)=min(a+b,1), pour la négation nous considérons N(a)=1-a.

Le niveau global consiste à combiner les différentes règles, c'est à dire à agréger les différents α_j, j=1,...,r. Le mode de combinaison que l'on choisit doit nécessairement dépendre de la structure de la base de règles. Si l'on se place dans le cas de la structure de type 1 (liaison avec "ou"), alors une t-conorme S' est utilisable. De ce fait, μ(y)=S'(α_j, j=1,...,r) sera le degré de possibilité pour chaque y. La valeur finale discrète y* est obtenue par un processus de défuzzification. A titre d'illustration, nous pouvons prendre:

$$y^* = \frac{\int y\mu(y)dy}{\int \mu(y)dy}$$

Sur l'exemple simple suivant, nous observons comment l'interprétation des règles par une implication floue peut conduire à des résultats abhérrants dans le cas de l'utilisation d'une t-conorme S'. Supposons que pour une observation X, il existe une règle $R_{k(X)}$ telle que A_{ki}(xi)=0, pour un certain i, (ce que l'on trouve généralement dans les cas pratiques). Nous aurons donc:

aj=T(A_{kl}(xl), i=1,...,n)=0,

ce qui conduit à :

J_S(aj,bj)=J_S(0,bj)=S(T'(0,bj),N(0)) = S(T'(0,bj), 1) = S(0,1) = 1.

Ce qui donne μ(y)=1, pour tout X et pour tout y. Ceci veut tout simplement dire que si l'agrégation collective des règles est une t-conorme (le max en particulier), le résultat obtenu est indéterminé, ce qui n'a aucun sens en contrôle. Ceci nous suggère donc de dire que si la structure de la base de règles est du type 1, il ne faut pas considérer une implication floue de la forme J_S pour l'interprétation de chaque règle.

Nous pouvons dans ce cas calculer le degré de vérité de chaque règle Rj en utilisant une t-norme T'', de façon à avoir:

α_j(y)=T''(aj,bj).

Dans ce cas et pour l'exemple précédent, α_k(y)=0, mais pour $j \neq k$, α_j(y)$\neq$0, de sorte que S'(α_j(y), j=1,...,n) n'est pas uniformément égale à 1. Ceci explique et dans un certain sens justifie la règle de Mamdani en pratique.

D'une façon analogue, on s'aperçoit que si l'interprétation de chaque règle se fait à l'aide d'une t-norme T'' (qui traduit donc la relation entre prémisse et conséquence), alors on ne

peut considérer une t-norme T''' comme opérateur d'agrégation collective des règles. Pour s'en convaincre, reprenons l'exemple précédent: nous avons $A_{ki}(x_i)=0$, ce qui conduit à:
$a_k=T(A_{kl}(xl), l=1,...,n)=0$, et donc $\alpha_k(y)=T''(a_k,b_k)=0$ pour tout y.
De ce fait, prendre T''' pour l'agrégation, nous amène à $\mu(y)=T'''(\alpha_j(y), j=1,...,r)=0$ et donc $\mu(y)=0$ pour tout y, ce qui est un résultat sans aucune utilité.
Par contre, pour ce même cas, l'utilisation de l'implication floue de la forme J_S choisie, nous fournit des résultats sans aucune incohérence, comme cela a été observé précédemment.

Les différents résultats constatés sont indépendants des t-normes et t-conormes choisis (on utilise tout simplement les éléments neutres des deux opérateurs binaires), néanmoins une application particulière a été choisie pour l'illustration. Différents opérateurs d'implication floue sont donnés dans la littérature (donner référence). nous pouvons réetablir un raisonnement analogue pour d'autres choix d'implications floues.

Les conclusions que nous pouvons tirer de ces interprétations sont les suivantes:
- la considération d'une base de règles de type 1 suggère une agrégation par la recherche du degré de possibilité maximal correspondant à :
$\mu(y)=S(T''(aj,b_j))$
et à observer la relation prémisse-conséquence de chacune des règles comme une relation de conjonction.

-la considération par contre d'une base de règles du type 2, suggère d'interpréter la relation prémisse-conséquence de chacune des règles floues par une implication floue et d'agréger les résultats du niveau local par la recherche d'une possibilité minimale schématisant un mécanisme d'interpolation, ce qui donne:
$\mu(y)= T''(S(T'(a_j,b_j), N(a_j), j=1,...r)$.

3. Approximation universelle des systèmes flous

Dans cette section, nous présentons un panorama des travaux réalisés dans le contexte de l'approximation de fonctions numériques multi-variables par des systèmes flous.
Deux principales approches sont utilisées pour démontrer les propriétés d'approximation universelle des systèmes flous: la première utilisant le théorème de Stone-Weiestrass, la seconde en démontrant la densité directe des sous-espaces de fonctions.

Analysons tout d'abord les travaux relatifs à la première approche. Le théorème de Stone-Weiestrass servant de base aux différentes démonstrations s'énonce comme suit (Rudin 1964): soit A une algèbre de fonctions numériques continues définies sur un espace

compact K (fermée par rapport à l'addition, la multiplication et la multiplication par un scalaire). Si A est séparatrice sur K (pour tout x,y de K, $x \neq y$, il existe une fonction f de A telle que $f(x) \neq f(y)$) et A ne s'annule pas sur K (pour tout x de K, il existe f de A telle que $f(x) \neq 0$) alors la fermeture uniforme B de A consiste en l'ensemble des fonctions numériques continues sur K. Autrement dit, A est dense par rapport à la norme-sup dans l'espace des fonctions numériques continues définies sur K.

Wang et Mendel (Wang et Mendel 1992) utilisant une démarche analogue à celle de Hornik et al (Hornik et al 1989), sont les premiers à montrer qu'une famille particulière de systèmes flous, celle utilisant des fonctions d'appartenance Ai et Bj gaussiennes en considérant simplement le sommet de la fonction d'appartenance pour Bj (équivalent à un singleton), la multiplication comme T-norme d'agrégation des prémisses et une défuzzification par la méthode du centre de gravité, constituent un sous-espace dense dans l'ensemble des fonctions continues. Ils utilisent pour cela la condition suffisante de densité fournie par le théorème de Stone-Weiestrass. Ils vérifient donc que la famille de fonctions est une sous-algèbre de fonctions continues (la somme, le produit et la multiplication par un scalaire de deux fonctions de la famille considérée donnent une fonction appartenant à la même famille). Ils vérifient que la famille de fonctions est séparatrice, ne s'annulant pas sur le support compact de définition et concluent sur leur densité. Nguyen et al (Nguyen et al 1993) montrent que le résultat demeure valide et retrouvent donc des propriétés équivalentes dans le cas de l'utilisation de l'opérateur minimum comme T-norme d'agrégation. Buckley (Buckley 1993) considère le cas des contrôleurs flous avec conséquent polynomial du type "Si x1 est A1 et ... et Xn est An alors y=f(xi)", f(xi) est une fonction polynomiale des différentes variables xi, avec n=2 et une possibilité de généralisation au cas n>2. Il utilise une défuzzification de type linéaire et la T-norme produit pour l'agrégation des prémisses. Les sous-ensembles flous Ai sont choisis (sans être définis explicitement) de façon à constituer une famille de fonctions qui soit une sous-algèbre dans l'ensemble des fonctions continues. Sous ces différentes considérations, les conditions du théorème de Stone Weiestrass sont vérifiées et il conclut sur la densité des systèmes flous obtenus.

La seconde famille de démonstrations revient à montrer que certaines classes de systèmes flous constituent des familles denses dans l'espace des fonctions numériques continues, sans utiliser les conditions du théorème de Stone-Weiestrass. Elle concerne principalement le cas où les systèmes flous considérés ne constituent pas une algèbre de fonctions.

Kosko (Kosko 1992) montre comment un système flou du type "Si X est A alors Y est B", A et B désignent le produit cartésien de sous-ensembles flous, peut approcher toute fonction f continue définie sur un compact K. Etant donné $\xi > 0$, on montre qu'il existe

F tel que $|F(x) - f(x)| < \xi$ pour tout x de K, F(x) étant la sortie après defuzzification par la méthode du centre de gravité, d'un système flou. En partant du principe que tout élément x de K active p sous-ensembles flous ($p \geq 1$). Pour p=1, p=2 et en généralisant à $p \leq m$, m étant le nombre de règles floues, il montre, en utilisant la compacité du support et la continuité de la fonction de transfert F, que F approche f uniformément. La démonstration nécessite la symétrie des sous-ensembles flous du conséquent (triangle, trapèze, ...) si la T-norme minimum est utilisée pour l'agrégation des prémisses, la symétrie n'est pas imposée si la T-norme produit est utilisée. Le résultat demeure valide si les fonctions d'appartenance sont définies de façon non plus continue mais discrète. Nguyen et al (Nguyen et al 1993) montrent que, sous certaines considérations, les systèmes flous constituent une famille dense dans l'ensemble des fonctions numériques continues. Ils considèrent les fonctions d'appartenance telles que : $\mu(x) = \mu_0(ax + b)$, pour a et b deux réels, $a \neq 0$ *et* $\mu_0(x)$continue non négative sur un intervalle donné et nulle ailleurs, les T-normes et T-conormes devant être continues, la procédure de défuzzification pouvant se faire aussi bien par la méthode du centre de gravité que par celle du centre des maxima. Ils montrent ainsi que le résultat de la défuzzification peut être aussi proche que possible de la valeur de la fonction à approcher.

Zeng et Singh (Zhang et Singh 1994) considèrent un système SISO "Si x est Ai alors Y est Bi" et utilisent le fait que ces systèmes peuvent être représentés par une combinaison linéaire de fonctions de base $B_i(x) = \dfrac{A_i(x)}{\sum_i A_i(x)}$ *et* $F(x) = \sum_i B_i(x) y_i$, F(x) étant la sortie du système flou. Les sous-ensembles flous en sortie sont assimilés à des singletons et le produit est choisi comme T-norme. Les sous-ensembles flous Ai étant de type triangulaires. Etant donné ces considérations et une fonction continue f définie sur un compact, un procédé constructif utilisant les fonctions de base définies permet de démontrer la convergence uniforme vers la fonction f en question et donc de l'approcher avec la précision voulue.

D'autres travaux font état de l'approximation universelle des systèmes flous en montrant une équivalence fonctionnelle entre certaines classes de systèmes flous et les réseaux de neurones et déduisent de ce fait les propriétés d'approximation. Jang et al (Jang 1992) utilise l'équivalence avec les réseaux de neurones à fonctions de base radiales. Buckley et al (Buckley et al 1993) montrent l'équivalence entre un système expert flou et un réseau de neurones multicouches et concluent donc sur des propriétés d'approximation des systèmes experts flous.

En dernier lieu, il nous semble utile de revenir sur les énoncés de quelques théorèmes importants dans ce contexte. Ils illustrent les deux approches utilisées pour démontrer la densité.

Théorème 1 (Wang et Mendel 1992) : les systèmes flous caractérisés par le choix de fonctions d'appartenance Ai et Bj gaussiennes en considérant simplement le sommet de la fonction d'appartenance pour Bj (équivalent à un singleton), la multiplication comme T-norme d'agrégation des prémisses et utilisant une défuzzification par la méthode du centre de gravité, constituent un sous-espace dense dans l'ensemble des fonctions continues.

Théorème 2 (Nguyen et al 1993) : Si M caractérise la famille des fonctions d'appartenance Ai et Bj, L celle des opérateurs logiques utilisés, D la procédure de défuzzification et si l'on considère tout compact K de R^n, la famille de fonctions *F(M,L,D)* associée à la méthodologie floue *(M,L,D)* est dense par rapport à la norme-sup sur K. La distance définie par la norme-sup est: $d(f,g) = \max_{x \in K} |f(x) - g(x)| = \|f - g\|_\infty$. Les seules hypothèses émises concernent le choix pour L de T-normes et T-conormes continues, pour M de fonctions d'appartenance de la forme $\mu(x) = \mu_0(ax + b)$, a et b deux réels, $a \neq 0$ *et* $\mu_0(x)$continue non négative sur un intervalle donné et nulle ailleurs et pour D des procédures de défuzzification pouvant se faire aussi bien par la méthode du centre de gravité que par celle du centre des maxima.

4. Le cas des systèmes distribués

Dans cette section, nous présentons des résultats concernant l'approximation de fonctions numériques définies sur un compact de dimension infinie c'est à dire que l'espace de départ est de dimension infinie (ce qui constitue une généralisation du cas des compacts des espaces euclidiens) par des systèmes flous. Les travaux de (Kreinovich et al 1994) établissent les propriétés d'approximation des systèmes distribués par des systèmes flous. Pour de plus amples détails, nous renvoyons à (Kreinovich et al 1994). Dans ce qui suit, une autre manière d'arriver au résultat est présentée.

Les résultats standars concernant l'approximation universelle par les systèmes flous s'énoncent comme suit: soit F une classe de systèmes flous dont les éléments f sont des fonctions continues de R^n dans R. Pour toute partie compacte K de R^n, la restriction de F à K (c'est à dire chaque f de F est restreinte à K), notée F_K, est dense dans l'ensemble C(K) des fonctions continues sur K, par rapport à la norme-sup.
Typiquement, un "état " d'un système distribué est de la forme $s=(x_1,x_2,...,x_q,f_1,...,f_p)$ où $x_i \in R$, $f_j \in C(U_j)$, avec U_j compact. L'espace des états d'un tel système est donc : $S \subseteq R^q \times C(U_1) \times ... \times C(U_p)$. La distance que l'on considère sur S est :

$\|S, S'\| = \max\{|x_i - x_i'|, \|f_j - f_j'\|, i = 1,...,q\ ;\ j = 1,...p\}$

avec: $\|f_j - f_j'\| = \sup_{U_j} |f_j(u) - f_j'(u)|$

Un contrôle d'un tel système est donc une fonction J: S---> R.

Pour S compact et J continue, il est intéressant de savoir si l'on peut utiliser les résultats standards énoncés pour les systèmes flous afin d'approcher J.

Etant donné que le domaine de J est de dimension infinie, cela n'est possible que si l'on arrive à réduire, en quelque sorte, la dimension de l'espace. On va montrer qu'il suffit d'approcher une certaine fonction J* définie sur un compact d'un espace euclidien de dimension finie. Nous présentons la démonstration ci-dessous pour un cas simple (à savoir $S \subseteq C(U)$), mais la technique s'applique aisément au cas général.

Théorème: Soit C(U) l'espace des fonctions numériques continues sur un métrique compact U et soit S une partie compacte de C(U),U étant le compact métrique.

Soit J: S---> R une fonction continue. Pour tout $\xi > 0$, il existe une fonction continue $\prod_\xi$: S----> R^q, (q entier dépendant de ξ) et une fonction J_ξ continue, définie sur la partie compacte $\prod_\xi$(S) telle que:

$$\forall f \in S, \quad |J(f) - J_\xi(\prod_\xi(f))| \le \xi$$

Démonstration: Soit $\xi > 0$ donné. On va associer à ξ deux nombres $\delta(\xi)$ et $\beta(\xi)$ de la façon suivante:

J étant continue et S compact, J est donc uniformément continue sur S. Donc, il existe $\delta(\xi)$ tel que $\|J(f) - J(g)\| \le \xi$, dès que $\|f - g\| \le \delta(\xi)$, pour tout f,g de S.

S étant une famille de fonctions équicontinues, on peut trouver $\beta(\xi)$ tel que si $\|u - v\| \le \beta(\xi)$, on a $\|f(u) - f(v)\| \le \delta(\xi)/4$, pour tout f de S.

Comme U est compact, on peut trouver un sous-ensemble fini V de points v de U, tel que: $\forall u \in U, \exists v \in V \text{ tel que } \|u - v\| \le \beta(\xi)$

Soit q la cardinalité de V. Pour réduire J, on va projeter les éléments de S sur V de la façon suivante:

à tout f ∈ S, on associe le vecteur (f(v), v ∈ V) de R^q. On considére la distance $\|\prod_\xi(f) - \prod_\xi(g)\| = \max\{|f(v) - g(v)|, v \in V\}$ qui est visiblement inférieure ou égale à $\sup_U |f(u) - g(u)| = \|f - g\|$, donc $\prod_\xi$ est continue et $\prod_\xi$(S) est compact.

On construit J_ξ: $\prod_\xi(F)$---->R, en prenant $J_\xi(\prod_\xi(f)) = \dfrac{\sum_G \alpha_g(f).J(g)}{\sum_G \alpha_g(f)}$, où G est un sous-ensemble fini de S, tel que pour tout f de S, il existe g de G telle que : $\|f - g\| \le \delta(\xi)/3$. G existe car S est compact.

Les coefficients sont choisis tels que $\alpha_g(f) = \max\{0, \delta(\xi)/2 - \|\prod_\xi(f) - \prod_\xi(g)\|\}$.

Alors, $\sum_G \alpha_g(f) > 0$, car il existe g de G pour lequel $\|f-g\| \le \delta(\xi)/3$, et aussi, $\left\|\prod_\xi(f)-\prod_\xi(g)\right\| \le \|f-g\| \le \delta(\xi)/3$, de sorte que $\frac{\delta(\xi)}{2} - \left\|\prod_\xi(f)-\prod_\xi(g)\right\| \ge \frac{\delta(\xi)}{2} - \frac{\delta(\xi)}{3} = \frac{\delta(\xi)}{6} > 0$.

Ceci nous permet de conclure que $J_\xi(\prod_\xi(f))$ est bien définie et que J_ξ est continue en $\prod_\xi(f)$. Il vient donc:

$$\left|J(f)-J_\xi(\prod_\xi(f))\right| = \left|\frac{\sum_G \alpha_g(f).(J(f)-J(g))}{\sum_G \alpha_g(f)}\right|$$

$$\le \frac{\sum_G \alpha_g(f)|J(f)-J(g)|}{\sum_G \alpha_g(f)}$$

$$\le \max|J(f)-J(g)|$$

où le maximum est pris sur tous les g de G tels que $\left\|\prod_\xi(f)-\prod_\xi(g)\right\| \le \delta(\xi)/2$.

Le résultat est établi si l'on montre que $|J(f)-J(g)| \le \xi$ dès que $\left\|\prod_\xi(f)-\prod_\xi(g)\right\| \le \delta(\xi)/2$.

On a que $\forall u,v \in U, |f(u)-g(u)| \le |f(u)-f(v)| + |f(v)-g(v)| + |g(v)-g(u)|$

En particulier, c'est vrai pour v de V, tel que $\|u-v\| \le \beta(\xi)$

Pour ce v, on a $\forall u \in U, |f(u)-g(u)| \le \frac{\delta(\xi)}{2} + |f(v)-g(v)| \le \frac{\delta(\xi)}{2} + \left\|\prod_\xi(f)-\prod_\xi(g)\right\|$

et donc $\sup_U |f(u)-g(u)| = \|f-g\| \le \delta(\xi)$ dès que $\left\|\prod_\xi(f)-\prod_\xi(g)\right\| \le \delta(\xi)/2$.

J étant uniformément continue, il vient $\left|J(f)-J_\xi(\prod(f))\right| \le \xi$

Le résultat est donc démontré.

5. Approximation des fonctions mesurables

Nous nous intéressons dans cette section au cas des fonctions mesurables non nécessairement continues et montrons qu'elles peuvent être également approchées par des systèmes flous. On se base sur les résultats relatifs à l'approximation de fonctions numériques continues définies sur des parties compactes des espaces euclidiens. Soit K un compact arbitraire mais fixe de R^n, on désigne par (K,β_K,μ_K) l'espace de mesure où β_K est la tribu des parties boréliennes de K, μ_K (que nous noterons μ dans la suite) la mesure de Lebesgue sur β_K avec $\mu_K(K) < +\infty$.

Soit C(K) l'espace des fonctions numériques continues sur K et f,g deux fonctions de C(K). On considère la distance définie par la norme-sup comme: $d(f,g) = \max_{x\in K}|f(x)-g(x)| = \|f-g\|_\infty$

Soit M(K) l'espace des fonctions numériques mesurables définies sur K. Nous notons que le problème d'approximation des éléments de M(K) par les systèmes flous est induit

par celui de l'approximation des éléments de C(K). Dans un souci de clarté, nous présentons la démonstration directe se basant sur les résultats donnés dans (Halmos 1974) et exposés sommairement dans (Hornik et al 1989).

Théorème : les systèmes flous de type MISO sont approximateurs universels des fonctions de M(K).

Démonstration:

Soit $D(K) \subset C(K)$, une classe particulière de systèmes flous telle que $\overline{D(K)} = C(K)$ par rapport à la topologie $\|.\|_\infty$ dans C(K). Nous précisons dans quel sens D(K) approche M(K).

Par rapport à la mesure choisie, l'écart en mesure est défini comme suit:

$$\rho(f,g) = \inf\left\{\xi > 0 : \mu_K\left\{x \in K : |f(x) - g(x)| > \xi\right\} < \xi\right\}$$

Comme $D(K) \subset C(K) \subset M(K)$, la notion d'approximation se traduit par:

$$\forall f \in M(K),\ \forall \xi > 0,\ \exists g \in D(K)\ \textit{telle que} : \rho(f,g) \le \xi$$

Nous observons tout d'abord que si $g \in D(K)$ et $h \in C(K)$ telles que $\|g - h\|_\infty \le \delta$, alors il existe une constante c (indépendante de g et h) telle que $\rho(f,g) \le c.\delta$.

En effet, considérons

$$c > \sqrt{\frac{\mu(K)}{\delta}}\ \textit{et}\ \xi_0\ \textit{tel que}\ \frac{\mu(K)}{c} < \xi_0 < \sqrt{\delta\mu(K)}$$

$$\textit{comme}: \mu\left\{|g - h| > \xi_0\right\} \le \frac{1}{\xi_0}\delta\mu(K) = \xi'$$

$$\textit{avec}\ \xi_0 < \xi',$$

Nous obtenons en vertu de la décroissance de la fonction $\mu\left\{|g - h| > \xi\right\}$ *en* ξ, *implique que* $\mu\left\{|g - h| > \xi'\right\} \le \xi'$

Le résultat énoncé s'en suit du moment que $\xi' < c.\delta$

Donc $\forall \xi > 0$, *prenons* $c > \frac{2\mu(K)}{\xi}$ *et* $\delta = \frac{\xi}{2c}$

On en déduit que $\rho(f,g) \le \frac{\xi}{2}$

Il nous reste donc à montrer que $\forall f \in M(K),\ \forall \xi > 0,\ \exists h \in C(K)\ \textit{telle que} : \rho(f,h) \le \frac{\xi}{2}$

Comme nous sommes sur l'espace de mesure (K, β_K, μ_K), nous pouvons associer à $\frac{\xi}{4}$ un compact K_ξ (dans K) tel que $\mu(K - K_\xi) \le \frac{\xi}{4}$ et f est continue sur K_ξ (voir théorème de Lusin, Halmos 1974, p. 243).

Comme :

$$\left\{x:\left|f(x)-f(x)\right|_{K_\xi}\right|>\frac{\xi}{4}\right\}\subseteq K-K_\xi$$

$$\text{on aura}:\mu\left\{\left|f-f\right|_{K_\xi}\right|>\frac{\xi}{4}\right\}\leq\frac{\xi}{4}$$

D'autre part, $f\big|_{K_\xi}$ est mesurable, bornée et intégrable sur K. En considérant la densité de C(K) dans $\alpha^1(K,\beta_K,\mu_K)$, il existe une fonction $h\in C(K)$ telle que $\int_K\left|h-f\big|_{K_\xi}\right|d\mu \leq\frac{\xi^2}{16}$

ce qui implique $\mu\left\{\left|h-f\big|_{K_\xi}\right|>\frac{\xi}{4}\right\}\leq\frac{\xi}{4}$

Comme :

$$\left\{|h-f|>\frac{\xi}{2}\right\}\subseteq\left\{\left|h-f\big|_{K_\xi}\right|>\frac{\xi}{4}\right\}\cup\left\{\left|h-f\big|_{K_\xi}\right|>\frac{\xi}{4}\right\}$$

on a finalement:

$$\mu\left\{|h-f|>\frac{\xi}{2}\right\}\leq\frac{\xi}{2}\quad \text{et donc}:\rho(f,h)\leq\frac{\xi}{2}$$

Le résultat relatif à l'approximation de fonctions mesurables s'en trouve donc démontré.

6. L'analyse des systèmes MIMO

Dans cette section, nous analysons le cas de l'approximation de fonctions numériques multivariables à image dans l'espace de dimension m, m>1, par des systèmes flous de type MIMO. Deux approches sont considérées dans ce cas. La première de nature fonctionnelle considère directement l'approximation des fonctions continues ou mesurables de R^n vers R^m. La seconde passe par une interprétation logique de la base de règles floues en décomposant un système de type MIMO en une superposition de systèmes MISO.

On définit respectivement par $C^m(K)$ et $M^m(K)$, les familles de fonctions continues et mesurables de $K\subset R^n$ vers R^m. On considère la généralisation appropriée de la norme-sup dans R^m définie par : $d^m(f,g)=\max(\max_{x\in K}|f_i(x)-g_i(x)|, i=1,\ldots,m)=\|f-g\|_\infty^m$ et la généralisation analogue de l'écart en mesure par: $\rho^m(h,g)=\sum_{i=1}^m\inf\left\{\xi_i>0:\mu_K\left\{x\in K:|h_i(x)-g_i(x)|>\xi_i\right\}<\xi_i\right\}$. $g_i(x)$ correspondant à la $i^{ème}$ (i=1,...,m) composante du vecteur de sortie du système flou, $f_i(x)$ correpondant à la $i^{ème}$ composante de l'image de x par la fonction continue à approcher et $h_i(x)$ à la $i^{ème}$ composante de l'image de x par la fonction mesurable à approcher. Nous notons que la façon de généraliser la norme n'est pas unique.

Le cas des fonctions continues :

Théorème: Les systèmes flous de type MIMO sont approximateurs universels des fonctions de $C^m(K)$.

Démonstration: Le résultat préalablement établi pour le cas des fonctions numériques nous permet de déduire que: étant donné $\xi_i > 0$, $\max_{x\in K}|f_i(x)-g_i(x)| \le \xi_i$.

On pose: $\xi = \max(\xi_i)$. En considérant les m composantes du vecteur de sortie, il vient : pour tout $\xi > 0$ (les ξ_i étant quelconques), il vient: $d^m(f,g) = \max\left(\max_{x\in K}|f_i(x)-g_i(x)|, i=1,...,m\right) \le \max(\xi_i) = \xi$.

Nous obtenons donc $d^m(f,g) \le \xi$, ce qui généralise les propriétés d'approximation de fonctions continues à image vectorielle par des systèmes MIMO.

Le cas des fonctions mesurables:

Théorème: Les systèmes flous de type MIMO sont approximateurs universels des fonctions de $M^m(K)$.

Démonstration: En reprenant le résultat concernant les fonctions numériques, nous pouvons déduire que: étant donné $\xi' > 0$, il vient $\rho(g_i,h_i) = \inf\left\{\xi' > 0 : \mu_K\left\{x \in K : |g_i(x)-h_i(x)| > \xi'\right\} < \xi'\right\}$ pour tout x de K.

On pose: $\xi' = \frac{\xi}{m}$. En considérant les m composantes du vecteur de sortie, nous obtenons: pour tout $\xi > 0$,

$$\rho^m(h,g) = \sum_{i=1}^{m}\left(\inf\left\{\xi' > 0 : \mu_K\left\{x \in K : |h_i(x)-g_i(x)| > \xi'\right\} < \xi'\right\}\right) \le m.\frac{\xi}{m} = \xi.$$

Nous obtenons donc: $\rho^m(h,g) \le \xi$, ce qui généralise les propriétés d'approximation de fonctions mesurables à image vectorielle par des systèmes MIMO.

Remarque: Une seconde démarche consiste à considérer le fait que tout système MIMO pour lequel les variables de sortie sont indépendantes revient à la superposition de systèmes MISO indépendants (Lee 1990). Chacun de ces systèmes MISO est approximateur universel de fonctions continues et mesurables à valeurs dans R, chaque composante du vecteur sortie est donc approchée indépendamment des autres composantes. La superposition de ces systèmes est donc directement une approximation universelle de l'ensemble des composantes du vecteur et donc des fonctions vectorielles de $K \subset R^n$ vers R^m

Etant donné ce résultat qui montre l'existence d'un système MIMO approximateur, la principale question qui se pose concerne l'identification de ces paramètres ou d'acquisition des connaissances de façon plus générale. Faut-il tout d'abord superposer des systèmes MISO et identifier leurs paramètres séparément (ce qui ne permet donc pas de retrouver la structure du MIMO du moment que l'on modifie les paramètres des sous-

ensembles flous), ou encore identifier directement les paramètres du système MIMO, processus dont la complexité est proportionnelle à la dimension du vecteur de sortie.

7. Identification de paramètres et robustesse

Les résultats préalablement présentés montrent que plusieurs familles de systèmes flous sont approximateurs universels et forment des sous-ensembles denses de C(K). Pour le concepteur de systèmes flous, des questions d'ordre pratique se posent : sur l'ensemble de toutes ces familles de systèmes flous disponibles, laquelle choisir ? En d'autres termes, comment choisir les éléments de M et de L. Cet aspect est similaire à ce que l'on retrouve en théorie des probabilités et en statistiques appliquées. Deux différents problèmes découlent de cette question. Le premier concerne l'identification des paramètres, le second est relatif à la robustesse des systèmes conçus. Nous donnons dans ce qui suit un bref apeçu de ces deux aspects.

1- Identification des paramètres:

Dans la littérature relative à la modélisation floue, cet aspect correspond à la détermination des paramètres de la structure interne du système flou (Sugeno et Al 1993), c'est à dire les paramètres des sous-ensembles flous aussi bien au niveau des prémisses que des conséquences des règles floues. Dans ce contexte, les méthodes usuelles consistent à ajuster de façon manuelle les paramètres de ces fonctions par ajustements successifs (Sugeno 1985). Ces dernières années ont vu un développement de nouvelles approches pour l'identification des paramètres, approches reposant généralement sur l'utilisation de techniques numériques. Nous citerons particulièrement celles utilisant des approches hybrides neurofloues avec algorithmes d'apprentissage de type supervisé (Hartani et al 1994) ou par renforcement (Berenji et al 1992), ou encore celles utilisant des algorithmes génétiques (Fukuda 1994). Nous présentons brièvement dans ce qui suit, la démarche générale pour l'identification. Le principe général consiste à fixer une certaine structure pour le système flou (nombre de règles, nombre de sous-ensembles flous par variable) et à considérer tout sous-ensemble flou comme entièrement identifié par une famille de paramètres (ex: 2 paramètres pour une gaussienne, 3 pour un triangle, 4 pour un trapèze,...). L'identification revient donc à chercher à estimer au mieux ces paramètres, pour chacune des fonctions d'appartenance. Que ce soit avec l'utilisation de réseaux neuronaux ou d'algorithmes génétiques ou encore d'ajustements manuels, on cherchera à minimiser une fonction de coût qui dépend du type d'informations dont on dispose. Il peut, par exemple, s'agir d'une erreur quadratique dans le cas d'un apprentissage supervisé. L'utilisation d'algorithmes d'optimisation de type rétropropagation du gradient permet d'identifier les paramètres du système flou.

2- Robustesse des systèmes:

Contrairement à l'étape d'identification qui concerne principalement les éléments de *M*, la notion de robustesse telle qu'elle est présentée dans la littérature fait allusion à la fois aux éléments de *L* et *D* et ceux de *M*. Leur choix demeure important pour ce qui est des performances des systèmes flous que l'on veut concevoir. Concernant les éléments de *M*, des démarches comparatives ont été proposées dans (Nguyen al 1993), dans le contexte général de la logique floue, mais peuvent être appliquées à l'analyse de la robustesse des systèmes flous. Elles reposent sur la mesure du module de continuité de la fonction de transfert, ou encore l'analyse de l'effet des variations des entrées sur celui de la sortie du système flou. L'autre aspect concerne le choix des éléments de *L*: quelles T-normes, T-conormes et opérateurs d'implication utiliser ? les réponses à ces questions dépendent du choix de la mesure que l'on considère pour la robustesse, celle-ci n'étant pas unique. A titre d'illustration, nous reprenons certains résultats qui montrent que l'utilisation du module de continuité en tant que mesure de la sensitivité (Nguyen et al 1993) donne T(a,b)=min(a,b) et S(a,b)= max(a,b) comme opérateurs les moins sensibles. L'introduction de la notion de "sensitivité moyenne" (Nguyen et al 1994) oriente vers les opérations T(a,b)=ab et S(a,b)= a+b-ab.

Dans cette optique plusieurs autres travaux font état d'analyses comparatives (Sugeno et al 1992) mais aucune méthodologie formelle de choix de paramètres n'est disponible, celui-ci étant toujours liée aux critères de comparaison que l'on se donne. Ce constat n'est peut-être pas étonnant et constitue à notre avis plus un avantage qu'un inconvénient, du moment qu'il se contente de fournir un guide de choix des opérateurs sans avoir à préférer de façon inconditionnelle une certaine famille d'opérateurs par rapport à d'autres.

Remarques et Conclusions.

La modélisation de systèmes flous rentre dans le cadre du développement de nouveaux systèmes intelligents pour le contrôle et l'aide à la décision. L'objectif attendu consiste à reproduire certains aspects du raisonnement d'experts humains. Il se veut une réponse aux différents points suivants:

- pour les systèmes dits complexes, il est généralement difficile de disposer de modèles mathématiques précis représentant la dynamique d'évolution de ces systèmes. A l'aspect modélisation proprement dit, s'ajoute l'aspect optimisation et détermination des lois de commande optimales. La complexité des modèles (non-linéarité, multi-dimensionnalité des vecteurs d'état,...) rend difficile (parfois impossible) la détermination des solutions du problème.
- Les modèles mathématiques classiques intègrent peu les connaissances de nature symbolique et les aspects de raisonnement logique qui, paradoxalement, suffisent parfois aux experts pour résoudre les mêmes problèmes.
- Les lois de commandes obtenues à partir de modèles sont rarement utilisées telles quelles, les hypothèses de modélisation étant souvent réductices par rapport à la réalité

des problèmes. Aussi, les lois de commande sont obtenues en considérant des objectifs à réaliser , qui sont eux mêmes difficiles à expliciter et provoquent un décalage entre ce que l'on obtient et ce que l'on veut obtenir.
- pour certains problèmes (sécurité des systèmes, médecine,...), il est parfois plus important pour l'utilisateur de savoir comment et pourquoi la solution a été obtenue que de connaître la solution elle même. La simplicité de l'explication est donc un problème important. Les modèles à base de règles floues ont pour avantage d'être simples à expliciter et à interpréter.
- l'imprécision, l'incertitude, la complexité des phénomènes réels, sont difficiles à représenter uniquement en termes d'équations. La détermination de solutions optimales exactes est souvent impossibles et presque toujours coûteuses. Il nous faut donc nous acheminer vers "la détermination des solutions donnant le meilleur compromis entre la satisfaction des objectifs, leur coût d'obtention et leur robustesse" (Zadeh 1994).

Les différents points soulevés amènent les concepteurs et ingénieurs à s'intéresser de plus en plus à la conception de systèmes intelligents, les modèles flous et neuronaux en constituant une part importante. Différentes applications ont été réalisées avec succès dans ce contexte, ce qui a amené les chercheurs à établir des justifications théoriques. C'est dans ce cadre que se situe la détermination du lien intrinsèque entrre modélisation floue et approximation de fonctions nous a amené à entrevoir ces justifications dans ce cadre précis. Dans cet article, nous avons synthétisé l'ensemble des travaux relatifs à l'approximation de fonctions par des modèles flous et tenté d'apporter des extensions aux propriétés d'approximations en analysant: le cas des systèmes distribués, le cas des fonctions mesurables et le cas des systèmes MIMO, peu étudiés dans la littérature bien qu'ils représentent un potentiel important d'applications.

La complexité des problèmes réels à traiter laisse bien des questions encore ouvertes. Cependant, il apparaît q'une communication entre différentes techniques du numérique (optimisation, modèles mathématiques, réseaux de neurones,...) et du symbolique (modèles à base de règles,...) s'avère utile.

Bibliographie

Bouchon_Meunier, B. (1991) Various logical opproaches in fuzzy control, Actes journée nationale commande floue, CNRS, PARIS.
Buckley, J.J. (1992) Universal fuzzy controllers. Automatica, vol 28, n°6, 1245-1248
Buckley, J.J. (1993) Sugeno type controllers are universal controllers, FSS, n°53, 299-303
Fukuda, M. Genetic algorithms for identification, LIFE Lecture, April 1994.

Hecht-Nielsen, R. (1987) Kolmogorov's mapping neural networks existence theorem. IEEE conf on Neural Networks, San Diego, Vol 2, 11-14

Halmos, P. (1974) Measure theory. Springer Verlag

Hartani, R. Hayat,S. Gallinari, P. (1994) Structure neuronale d'un système d'inférence floue : formalisation, expérimentations et extensions, To appear IPMU 1994

Hornik, K. Strichcombe, M. et White, H. (1989) Multilayers feedforward neural networks are universal approximators, Neural Networks, Vol 2, 359-366

Kolmogorov, A.N. (1957) On the representation of continuous functions of several variables by superposition of one variable and addition. Dukl. Akad. Nauk. SSSR., Vol 114, 369-373

Kosko, B. (1992) Fuzzy systems are universal approximators, Proc 1st IEEE conf on fuzzy systems, 1153-1162

Kurkova, V. (1992) Kolmogorov's theorem and multilayers neural networks, Neural Networks, Vol 5, 501-506

Lorentz, G. (1966) Approximation of functions.

Nguyen, H.T., Sugeno, M., Tong. R. and Yager., R. (1994) Theoretical aspects of fuzzy control. J. Wiley. To appear.

Nguyen, H.T et Kreinovich, V. (1993) On approximation of controls by fuzzy systems, Proc Fifth IFSA, 1414-1417

Nguyen, H.T. Kreinovich, V. and Tolbert, D. (1993) On robustness of fuzzy logic. Proc IEEE fuzzy, San Fransisco, Vol 1, 543-547

Nguyen, H.T. Kreinovich, V. and Tolbert, D. (1994) A measure of average sensitivity for fuzzy logics. To apperar in international Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge Based Systems.

Kreinovich, V., Nguyen, H.T. et Sirisaengtaksin, O. (1994) On approximation of controls in distribued systems by fuzzy controllers, Proc IPMU 1994

Ralescu, A. and Hartani, R. (1994) Reasoning about the transition between facial expressions, to appear in Proc IEEE human robot communication, Nagoya- Japan.

Sugeno, M. and Yasukawa, S. (1993) Qualitative based approach to fuzzy modeling, IEEE trans on Fuzzy systems, n°1, February 1992.

Sugeno, M. (1985) Industrial applications of fuzzy control, North Holland, Amsterdam.

Sugeno, M. Tanaka, K. (1992) Stability analysis and design of fuzzy control systems, J. fuzzy sets and systems (45), 135,156

Wang, L.X et Mendel, J. (1992-a) Generating fuzzy rules by learning from examples, IEEE transactions on Syst. Man and Cyber, Vol 22, 1414-1427

Wang, L.X et Mendel, J. (1992-b) Fuzzy basis functions, universal approximation and orthogonal least squares, IEEE transactions on neural networks, Vol 3, 807-814

Zadeh, L.A. (1994) Soft Computing, LIFE Lecture, April 1994.

Zeng, X.J et Singh, M.J. (1994) Approximation theory of fuzzy systems: SISO case, IEEE transactions on fuzzy systems, Vol 2, n°2, 162-176

ERROR: undefined
OFFENDING COMMAND: ÿ

STACK: